Úvod do teorie diferenčních rovnic a jejich řešení, $\mathcal{Z}$-transformace

Obsah

13. února 2004

1 Lineární diferenční rovnice a metody jejich řešení

V této úvodní kapitole budeme studovat speciální třídu diferenčních rovnic, které se nazývají **lineární diferenční rovnice**, přičemž použití termínů **lineární** a **nelineární** je zde analogické k jejich použití v oblasti diferenciálních rovnic. Z hlediska rozsáhlosti problematiky lineárních diferenčních rovnic a s ohledem na jejich aplikaci při matematickém popisu různých ekonomických modelů, které budou dále prezentovány, se detailně zaměříme na řešení **lineárních nehomogenních diferenčních rovnic** n**-tého řadu s konstantními koeficienty**. Jejich řešení budeme hledat jednak klasickými cestami (tj. hledání řešení příslušné homogenní diferenční rovnice sestavením charakteristického polynomu a určením jeho kořenů, následované metodou odhadu partikulárního řešení, respektive metodou variace konstant), a jednak si ukážeme elegantní způsob nalezení řešení využitím operátorového počtu (tj. aplikací $\mathcal{Z}$-transformace).

Studium lineárních diferenčních rovnic je důležité z několika důvodů. Mnoho typů problémů jsou přirozeně formulovány jako lineární diferenční rovnice. Rovněž určité podskupiny třídy lineárních diferenčních rovnic, jako jsou diferenční rovnice prvního řádu a diferenční rovnice s konstantními koeficienty, představují rozsáhlou oblast rovnic, které lze vyřešit explicitně. Třída lineárních diferenčních rovnic vykazuje vhodné algrebraické vlastnosti, které dovolují použít k jejich řešení maticové metody, operátorové metody, transformace, generující funkce a podobně. Konečně určité metody analýzy nelineárních diferenčních rovnic, jako například stanovení stability nelineární diferenční rovnice pomocí linearizace, záleží na vlastnostech přidružených lineárních diferenčních rovnic.

1.1 Pojem diferenční rovnice

1.1.1 Definice diferenční rovnice 1. typu

Definice 1.1 *Nechť je funkce* $f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \ldots, \Delta^k y)$ *definována pro všechna* $x \in \mathcal{M}$*. Rovnici tvaru*

$$f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \ldots, \Delta^k y) = 0, \tag{1}$$

ve které je neznámou funkce $y = \varphi(x)$*, nazýváme* **diferenční rovnicí** k**-tého řádu a 1. typu** *definovanou v* $\mathcal{M}$*.* **Partikulárním řešením** *této rovnice v* $\mathcal{M}$ *nazýváme každou funkci* $y = \varphi(x)$*, která pro všechna* $x \in \mathcal{M}$ *splňuje danou rovnici.* **Obecným řešením** *nazýváme vzorec zahrnující všechna partikulární řešení.*

Poznámka 1.1 *V úlohách na diferenci a diferenční rovnice bývá obvykle množina* $\mathcal{M}$ *(definiční obor diference) tak zvanou* **diskrétní množinou ekvidistantních bodů** $(x_0 + nh)$*, kde* x_0 *je dané číslo,* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *a* $h > 0$ *je libovolné číslo, zvané* **diferenční krok**.

Poznámka 1.2 *Aby bylo možné dosadit řešení* $\varphi(x)$ *do dané rovnice, musí existovat* k*-tá diference* $\varphi(x)$ *ve všech* $x \in \mathcal{M}$*; k tomu je nutné, aby definiční obor funkce* $\varphi(x)$ *obsahoval kromě bodů* $x \in \mathcal{M}$ *také body* $x + h, x + 2h, \ldots, x + kh$*.*

Poznámka 1.3 *Definice 1.1 je analogická definici diferenciální rovnice, jestliže diference nahradíme derivacemi příslušného řádu.*

V dalším budeme řešit difereční rovnice jiného typu, než je 1. typ. Pro jednoduchost se především omezíme na diferenční krok $h = 1$, čehož se dosáhne substitucí $x = ht$; definiční obor pak bude množina čísel $\{x_0, x_0 + 1, x_0 + 2, \ldots\}$ nebo speciálně množina $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, jestliže navíc provedeme substituci $t = x - x_0$.

Vraťme se k diferenční rovnici 1. typu. Dosaďme za diference v rovnici (1) výrazy, které jsou ve tvarech

$$
\begin{aligned}
\Delta y &= \varphi(x+1) - \varphi(x), \\
\Delta^2 y &= \varphi(x+2) - 2\varphi(x+1) + \varphi(x), \\
&\vdots \\
\Delta^k y &= \varphi(x+k) - \binom{k}{1}\varphi(x+k-1) + \binom{k}{2}\varphi(x+k-2) + \ldots + (-1)^k\varphi(x).
\end{aligned}
$$

Dále zaveďme obvyklejší značení

$$\varphi(x+j) = y_{x+j}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, k,$$

kde index $x + j$ značí argument funkce. Sloučíme-li po dosazení ve funkci $f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \ldots, \Delta^k y)$ členy se stejnými indexy, dostaneme novou funkci $g(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots, y_{x+k})$. Tak docházíme k jinému vyjádření diferenční rovnice, o kterém pojednává následující odstavec.

1.1.2 Definice diferenční rovnice 2. typu

Definice 1.2 *Nechť je pro všechna $x \in \mathcal{M}$ definována funkce $g(x, y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+k})$, kde $y_{x+j} = \varphi(x+j), j = 0, 1, 2, \ldots, k$. Rovnice tvaru*

$$g(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots, y_{x+k}) = 0, \tag{2}$$

ve které je neznámou funkce $y_x = \varphi(x)$, nazýváme **diferenční rovnicí 2. typu** *definovanou v $\mathcal{M}$. Jestliže jsou v této rovnici koeficienty u y_x a y_{x+k} pro všechna $x \in \mathcal{M}$ nenulové, říkáme, že* **rovnice** *je* **k-tého řádu**.

Poznámka 1.4 *Řešením diferenční rovnice (2) v $\mathcal{M}$ nazýváme každou funkci $y_x = \varphi(x)$, která pro všechna $x \in \mathcal{M}$ splňuje danou rovnici. K tomu je nutné, aby definiční obor funkce $\varphi(x)$ obsahoval všechna $x \in \mathcal{M}$ a také body $x + 1, x + 2, \ldots, x + k$.*

1.1.3 Obecné a partikulární řešení diferenční rovnice 2. typu a lineárně nezávislé funkce

Definice 1.3

1. **Obecným řešením** *diferenční rovnice 2. typu k-tého řádu budeme nazývat takové řešení $y_x = \varphi(x)$, které obsahuje k libovolných periodických funkcí, na sobě lineárně nezávislých, které se nedají nahradit menším počtem funkcí. Jesliže definiční obor rovnice je jen posloupnost bodů $\{x_0 + n\}_{n=0}^{\infty}$, pak obecné řešení bude obsahovat k libovolných lineárně nezávislých konstant $C_1, C_2, \ldots, C_k$, které se nedají nahradit menším počtem obecných konstant.*

2. **Partikulární řešení** *je zvláštní případ obecného řešení, ve kterém za obecné periodické funkce, respektive konstanty dosadíme určité funkce, respektive čísla.*

3. **Počáteční podmínky** *tvoří k daných dvojic hodnot $\{x_j, \varphi(x_j)\}$ pro $j = 1, 2, \ldots,$ k. Funkční hodnoty $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_k)$ pro dané různé body $x_1, x_2, \ldots, x_k$ z množiny $\mathcal{M}$ použijeme k výpočtu konstant $C_1, C_2, \ldots, C_k$ z obecného řešení. Obvykle bývá $x_2 = x_1 + 1, x_3 = x_1 + 2, \ldots, x_k = x_1 + k - 1$.*

V Definici 1.3 se setkáváme s pojmem **lineárně nezávislých funkcí**, respektive **lineárně nezávislých konstant**. Důležitost lineární nezávislosti řešení diferenční rovnice (2) ozřejmíme níže. Protože systematický výklad týkající se problematiky lineárně nezávislých funkcí by přerostl rámec našeho tématu, uvedeme si zde jen stručně definici, se kterou je těsně spjat pojem lineárně nezávislých funkcí, respektive konstant v obecném řešení diferenční rovnice 2. typu.

Definice 1.4 *Říkáme, že funkce $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$, společně definované pro $x \in \mathcal{M}$, jsou* **lineárně závislé** *v $\mathcal{M}$, jestliže existuje aspoň jedna konstanta $C_j \neq 0, j = 1, 2, \ldots, k$, tak, aby pro všechna $x \in \mathcal{M}$ platila rovnice*

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) = 0.$$

Není-li tomu tak, pak říkáme, že funkce $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ jsou **lineárně nezávislé** *v $\mathcal{M}$.*

Pro zjišťování lineární nezávislosti funkcí v množině $\mathcal{M} = \{x_0 + n\}_{n=0}^{\infty}$ se v teorii diferenčních rovnic používá následující vlastnosti. Je-li $\sum_{j=1}^{k} C_j\varphi_j(x) = 0$ pro $x \in \mathcal{M}$, pak platí rovnost i mezi diferencemi obou stran této rovnice (pro stejné konstanty C_j), tj. platí $\Delta^m \sum_{j=1}^{k} C_j\varphi_j(x) = \Delta^m 0$ pro $m = 1, 2, \ldots$ (neboť funkce $\varphi_j(x)$ jsou definovány i v bodech $x_0 + 1, x_0 + 2, \ldots, x_0 + k - 1$). Použijeme-li vzorce pro diferenci součtu a pro diferenci funkce násobené konstantou, dostaneme pro neznámé C_j homogenní soustavu k rovnic ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} C_j\varphi_j(x) &= 0, \\ \sum_{j=1}^{k} C_j\Delta\varphi_j(x) &= 0, \\ &\vdots \\ \sum_{j=1}^{k} C_j\Delta^{k-1}\varphi_j(x) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Pro funkce $\varphi_j(x)$ lineárně nezávislé v $\mathcal{M}$ smí mít (3) pouze nulové (triviální) řešení aspoň pro jedno $x \in \mathcal{M}$. Podle vět z lineární algebry to nastane právě tehdy, když determinant matice soustavy bude různý od nuly. Tím jsme dokázali následující větu.

Věta 1.1 *K tomu, aby funkce $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ byly lineárně nezávislé v množině $\mathcal{M} = \{x_0 + n\}_{n=0}^{\infty}$, stačí, aby byl aspoň pro jedno $x \in \mathcal{M}$ determinant*

$$W = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_k(x) \\ \Delta\varphi_1(x) & \ldots & \Delta\varphi_k(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta^{k-1}\varphi_1(x) & \ldots & \Delta^{k-1}\varphi_k(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Podobně, nahradíme-li v soustavě (3) diference hodnotami funkcí v bodech $x + j$, a dosadíme-li z předcházející rovnice za příslušnou sumu nulu, potom levá strana druhé rovnice dá $\sum C_j[\varphi_j(x+1) - \varphi_j(x)] = \sum C_j\varphi_j(x+1) - \sum C_j\varphi_j(x)] = \sum C_j\varphi_j(x+1)$ atd. Tak dostaneme pro neznámé C_i soustavu ve tvaru $\sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i(x+j) = 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots, k-1$. Odtud vyplývá následující věta.

Věta 1.2 *K tomu, aby funkce $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ byly lineárně nezávislé v množině $\mathcal{M} = \{x_0 + n\}_{n=0}^{\infty}$, stačí, je-li aspoň pro jedno $x \in \mathcal{M}$ determinant*

$$W = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_k(x) \\ \varphi_1(x+1) & \ldots & \varphi_k(x+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x+k-1) & \ldots & \varphi_k(x+k-1) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4}$$

Poznámka 1.5 *V teorii diferenčních rovnic bývá determinant* (4) *nazýván* **Casoratián**. *Casoratián hraje při studiu lineárních diferenčních rovnic podobnou roli jako Wronskián u lineárních diferenciálních rovnic.*

1.2 Lineární diferenční rovnice

1.2.1 Pojem lineární diferenční rovnice

Nyní se budeme zabývat diferenční rovnicí 2. typu s definičním oborem $\mathcal{M} = \{x_0, x_0 + 1, x_0 + 2, \ldots\}$, tj. $h = 1, x = x_0 + n$, kde $n = 0, 1, 2, \ldots$. V tomto případě obecné periodické funkce jsou obecné konstanty $C_1, C_2, \ldots, C_k$.

Definice 1.5 *Diferenční rovnice tvaru*

$$a_0(x)y_x + a_1(x)y_{x+1} + a_2(x)y_{x+2} + \ldots + a_k(x)y_{x+k} = f(x), \tag{5}$$

kde $f(x), a_0(x), a_1(x), a_2(x), \ldots, a_k(x)$ jsou libovolné funkce proměnné x definované v $\mathcal{M}$, přičemž $a_0(x) \neq 0$ a $a_k(x) \neq 0$ pro $x \in \mathcal{M}$, nazýváme **lineárními diferenčními rovnicemi k-tého řádu** *s nekonstantními koeficienty a pravou stranou; $a_0(x), a_1(x), a_2(x), \ldots, a_k(x)$ nazýváme koeficienty, $f(x)$ pravou stranou.*

Poznámka 1.6 *Jestliže všechny funkce* $a_0(x), a_1(x), a_2(x), \ldots, a_k(x)$ *jsou konstanty, říkáme, že rovnice má konstantní koeficienty; pak budeme značit* $a_0(x) = a_0, a_1(x) = a_1, a_2(x) = a_2, \ldots, a_k(x) = a_k$.

Poznámka 1.7 *Jestliže* $f(x) = 0$ *pro* $x \in \mathcal{M}$, *říkáme, že rovnice je bez pravé strany, nebo že je* **homogenní**. *V opačném případě mluvíme o* **nehomogenních** *rovnicích nebo o rovnicích s pravou stranou.*

Homogenní, respektive **nehomogenní** diferenční rovnici můžeme ekvivalentně vystihnout relací ve tvaru

$$\sum_{j=0}^{k} a_j(x) y_{x+j} = 0, \tag{6}$$

respektive

$$\sum_{j=0}^{k} a_j(x) y_{x+j} = f(x). \tag{7}$$

1.2.2 Obecné vlastnosti lineární diferenční rovnice

Věta 1.3 (Existenční věta pro lineární diferenční rovnici). *Nechť je dáno k hodnot* y_c, $y_{c+1}, y_{c+2}, \ldots, y_{c+k-1}$ *v* k *po sobě jdoucích bodech z definičního oboru* $\mathcal{M}$ *lineární diferenční rovnice* (7) k*-tého řádu. Potom existuje v* $\mathcal{M}$ *jediné řešení rovnice* (7)*, která nabývá předepsaných hodnot* $y_c, y_{c+1}, y_{c+2}, \ldots, y_{c+k-1}$ *v daných bodech* $c, c+1, c+2, \ldots, c+k-1$.

Důkaz. Důkaz provedeme úplnou indukcí. Předpokládejme, že $\mathcal{M} = \{x_0, x_0+1, x_0+2, \ldots\}$ a daný bod c lze psát ve tvaru $c = x_0 + N$, kde N je jisté nezáporné celé číslo. Nejprve dokážeme, že řešení (tj. posloupnost) existuje pro $x \geq c+k$; k tomu nejdříve nalezneme y_{c+k}. Do dané rovnice (7) dosadíme $x = c$, čímž dostaneme

$$a_0(c)y_c + a_1(c)y_{c+1} + a_2(c)y_{c+2} + \ldots + a_k(c)y_{c+k} = f(c).$$

Protože $a_k(c) \neq 0$, můžeme jednoznačně vypočítat y_{c+k}, neboť hodnoty $y_c, y_{c+1}, y_{c+2}, \ldots, y_{c+k-1}$ jsou předepsány. Tak dostaneme

$$y_{c+k} = \frac{1}{a_k(c)}[f(c) - a_0(c)y_c - a_1(c)y_{c+1} - a_2(c)y_{c+2} - \ldots - a_{k-1}(c)y_{c+k-1}].$$

Předpokádejme, že lze takto jednoznačně vypočítat hodnoty $y_{c+k}, y_{c+k+1}, y_{c+k+2}, \ldots, y_{c+K}$, kde $K \geq k$. Z toho dokážeme, že lze jednoznačně vypočítat i y_{c+K+1}, a to následovně. Dosadíme do dané rovnice $x_0 = c + K - k + 1$ ($x \in \mathcal{M}$); protože $K - k \geq 0$, je $x_0 \geq c+1$. Čili

$$a_0(x_0)y_{x_0} + a_1(x_0)y_{x_0+1} + a_2(x_0)y_{x_0+2} + \ldots + a_k(x_0)y_{x_0+k} = f(x_0).$$

Protože podle předpokladu je $a_k(x_0) \neq 0$, lze jednoznačně vyjádřit y_{x_0+k} následující relací ve tvaru

$$y_{x_0+k} = y_{x_0+K+1} = \frac{1}{a_k(x_0)}[f(x_0) - a_0(x_0)y_{x_0} - a_1(x_0)y_{x_0+1} - \ldots - a_{k-1}(x_0)y_{x_0+k-1}].$$

Protože $x_0 \geq c+1$, $x_0+k-1 \geq c+k$; jsou tedy hodnoty $y_{x_0}, y_{x_0+1}, \ldots, y_{x_0+k-1}$ podle indukčního předpokladu jednoznačně určeny. Tím jsme dokázali, že řešení existuje, a to jediné, pro všechna $x_0 \geq c+1$. Nyní vypočítáme řešení pro $x = c-N, c-N+1, \ldots, c-1$. Dosadíme do (7) $x = c-1 \in \mathcal{M}$, tedy

$$a_0(c-1)y_{c-1} + a_1(c-1)y_{c-1} + a_2(c-1)y_{c-1} + \ldots + a_k(c-1)y_{c-1} = f(c-1).$$

Odtud můžeme jednoznačně vyjádřit y_{c-1}, protože v diferenční rovnici předpokládáme $a_0(c-1) \neq 0$. Dále, dosadíme-li $x = c-2$, vypočítáme podobně y_{c-2} atd., až po N (po konečně mnoha) krocích vypočítáme $y_{c-N} = y_{x_0}$. ∎

Poznámka 1.8 *Z důkazu Věty 1.3 neplyne návod, jak vypočítat řešení lineární diferenční rovnice; ostatně při nekonečném oboru $\mathcal{M}$ tento postup není proveditelný.*

Poznámka 1.9 *Věta 1.3 platí i pro homogenní diferenční rovnici* (6)*; v tomto případě je všude v důkaze $f(x) = 0$, a tedy*

$$y_{c+k} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{-a_j(c)}{a_k(c)} y_{c+j}.$$

Obdobný tvar mají i $y_{c+k+1}, \ldots,$ a také $y_{c-1}, \ldots, y_{c-N}$.

Poznámka 1.10 *Jestliže všechny dané hodnoty $y_c, \ldots, y_{c+k+1}$ byly nuly, pak i ostatní vypočtené hodnoty jsou nuly (viz Věta 1.4). Jestliže aspoň jedna z daných hodnot není nula, pak samozřejmě i celé řešení $\{y_{c-N}, \ldots, y_{c-1}, y_c, \ldots, y_{c+k}, y_{c+k+1}, \ldots\}$ není posloupnost samých nul.*

1.2.3 Homogenní diferenční rovnice; fundamentální systém řešení

Věta 1.4 *Homogenní lineární diferenční rovnice $\sum_{j=0}^{k} a_j(x)y_{x+j} = 0$ má vždy tzv. triviální řešení $y_x = 0$ pro $x \in \mathcal{M}$.*

Důkaz. Jestliže pro všechna $x \in \mathcal{M}$ je $y_x = 0$, je tedy $y_{x+j} = 0$ pro $j = 0, 1, 2, \ldots, k$, z čehož vyplývá, že

$$\sum_{j=0}^{k} a_j(x)y_{x+j} = 0.$$

∎

Věta 1.5 *Nechť $\varphi(x)$ je partikulární řešení lineární homogenní diferenční rovnice tvaru $\sum_{j=0}^{k} a_j(x)y_{x+j} = 0$ a nechť C je libovolná konstanta. Potom funkce $y_x = C\varphi(x)$ je také řešením lineární homogenní diferenční rovnice.*

Důkaz. Víme, že $\sum_{j=0}^{k} a_j(x)\varphi(x+j) = 0$. Chceme dokázat, že $\sum_{j=0}^{k} a_j(x)[C\varphi(x+j)] = 0$. Ale to je zřejmé, neboť

$$\sum_{j=0}^{k} a_j(x)[C\varphi(x+j)] = C\sum_{j=0}^{k} a_j(x)\varphi(x+j) = C.0 = 0.$$

$\blacksquare$

Poznámka 1.11 *Obecně platí, že je-li $\varphi(x)$ řešením rovnice (6), je i funkce $p(x)\varphi(x)$ řešením rovnice (6) [$p(x)$ je libovolná periodická funkce s periodou 1], neboť $p(x+j) = p(x)$ lze vytknout před sumu, $p(x)\sum_{j=0}^{k} a_j(x)\varphi(x+j)$.*

Věta 1.6 *Nechť $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$ jsou partikulární řešení lineární homogenní diferenční rovnice $\sum_{j=0}^{k} a_j(x)y_{x+j} = 0$. Potom funkce $y_x = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ je také řešením lineární homogenní diferenční rovnice.*

Důkaz. Víme, že platí $\sum_{j=0}^{k} a_j(x)\varphi_1(x+j) = 0$ a $\sum_{j=0}^{k} a_j(x)\varphi_2(x+j) = 0$. Máme dokázat relaci $\sum_{j=0}^{k} a_j(x)[\varphi_1(x+j) + \varphi_2(x+j)] = 0$. Ale to je zřejmé, neboť

$$\sum_{j=0}^{k} a_j(x)[\varphi_1(x+j) + \varphi_2(x+j)] = \sum_{j=0}^{k} a_j(x)\varphi_1(x+j) + \sum_{j=0}^{k} a_j(x)\varphi_2(x+j) = 0 + 0 = 0.$$

$\blacksquare$

Z Vět 1.5 a 1.6 plyne, že nalezneme-li k partikulárních řešení homogenní rovnice $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_k(x)$, pak funkce $y_x = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_k\varphi_k(x)$, kde $C_1, C_2, \ldots, C_k$ jsou libovolné konstanty, je také řešením lineární difereční rovnice $\sum_{j=0}^{k} a_j(x)y_{x+j} = 0$.

V dalším budeme řešit problém, jak nalézt tzv. **lineárně nezávislá řešení** $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$; pak totiž funkce $y_x = \sum_{j=1}^{k} C_j\varphi_j(x)$ bude představovat obecné řešení. To je předmětem Definice 1.6 a Poznámky 1.12.

Definice 1.6 *Říkáme, že funkce $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$, které jsou partikulárním řešením lineární diferenční rovnice $\sum_{j=0}^{k} a_j(x)y_{x+j} = 0$ v množině $\mathcal{M} = \{x_0+n\}_{n=0}^{\infty}$ tvoří* **fundamentální systém řešení**, *jestliže jsou funkce $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ lineárně nezávislé v $\mathcal{M}$.*

Poznámka 1.12 *Na základě Věty 1.2 je fundamentální soustava řešení množina takových funkcí $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$, pro které je v $\mathcal{M} = \{x_0+n\}_{n=0}^{\infty}$ determinant W různý od nuly, tj.*

$$W = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_k(x) \\ \varphi_1(x+1) & \varphi_2(x+1) & \ldots & \varphi_k(x+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x+k-1) & \varphi_2(x+k-1) & \ldots & \varphi_k(x+k-1) \end{vmatrix} \neq 0.$$

1.2.4 Obecné řešení homogenní diferenční rovnice

Věta 1.7 *Nechť funkce $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ tvoří fundamentální systém řešení lineární homogenní diferenční rovnice $\sum_{j=0}^{k} a_j(x) y_{x+j} = 0$ v $\mathcal{M}$. Nechť $\varphi(x)$ je libovolné partikulární řešení lineární homogenní diferenční rovnice $\sum_{j=0}^{k} a_j(x) y_{x+j} = 0$ v $\mathcal{M}$. Potom existují konstanty $C_1, C_2, \ldots, C_k$ tak, že pro $x \in \mathcal{M} = \{x_0 + n\}_{n=0}^{\infty}$ platí*

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k} C_j \varphi_j(x). \tag{8}$$

Důkaz. Protože $\mathcal{M} = \{x_0, x_0 + 1, x_0 + 2, \ldots\}$, lze k výpočtu konstant C_j utvořit následující lineární soustavu k rovnic

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} C_j \varphi_j(x_0) &= \varphi(x_0), \\
\sum_{j=1}^{k} C_j \varphi_j(x_0 + 1) &= \varphi(x_0 + 1), \\
&\vdots \\
\sum_{j=1}^{k} C_j \varphi_j(x_0 + k - 1) &= \varphi(x_0 + k - 1).
\end{aligned}$$

Podle předpokladu je determinant matice soustavy nenulový, tedy existuje jediné řešení $C_1^*, C_2^*, \ldots, C_k^*$. Tím jsme dokázali, že $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k} C_j^* \varphi_j(x)$ pro body $x_0, x_0 + 1, x_0 + 2, \ldots, x_0 + k - 1$. Zbývá ověřit, že i pro ostatní $x \in \mathcal{M}$ platí $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k} C_j^* \varphi_j(x)$. Utvořme pro $x \in \mathcal{M}$ funkci

$$g(x) = \varphi(x) - \sum_{j=1}^{k} C_j^* \varphi_j(x).$$

Tato funkce je podle Vět 1.5 a 1.6 také partikulárním řešením lineární homogenní diferenční rovnice $\sum_{j=0}^{k} a_j(x) y_{x+j} = 0$ pro $x \in \mathcal{M}$. Z výpočtu konstant $C_1^*, C_2^*, \ldots, C_k^*$ vyplývá, že funkce $g(x)$ nabývá ve všech bodech $x_0, x_0 + 1, x_0 + 2, \ldots, x_0 + k - 1$ hodnot 0. Vezmeme-li tyto hodnoty v k po sobě jdoucích bodech za počáteční podmínky, pak z existenční věty (viz Věta 1.3) víme, že jimi je určeno jediné partikulární řešení, což je právě $g(x)$, a že toto řešení je podle Poznámky 1.10 triviální, tj. že pro všechna $x \in \mathcal{M}$ je $g(x) = 0$, a to jsme měli dokázat. ■

Z věty 1.7 lze odvodit, jak vypadá **obecné řešení lineární homogenní diferenční rovnice**; stačí nalézt k nezávislých partikulárních řešení $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ a pak obecné řešení jsou funkce tvaru

$$y_x = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \ldots + C_k \varphi_k(x),$$

kde $C_1, C_2, \ldots, C_k$ jsou libovolné (obecné) konstanty (respektive obecné periodické funkce s periodou 1).

1.2.5 Lineární nehomogenní diferenční rovnice (lineární diferenční rovnice s pravou stranou)

Nyní si uvedeme větu, která bude představovat návodem, jak lze nalézt obecné řešení lineární nehomogenní diferenční rovnice.

Věta 1.8 *Nechť $Y_x = \sum_{j=1}^{k} C_j\varphi_j(x)$ je obecné řešení lineární homogenní diferenční rovnice $\sum_{j=0}^{k} a_j(x)y_{x+j} = 0$; nechť $Z_x = \psi(x)$ je partikulární řešení lineární nehomogenní diferenční rovnice $\sum_{j=0}^{k} a_j(x)y_{x+j} = f(x)$ s pravou stranou $f(x)$. Potom obecné řešení lineární nehomogenní diferenční rovnice je funkce*

$$y_x = Y_x + Z_x. \tag{9}$$

Důkaz. Máme dokázat, že jednak y_x je řešení a že jednak je to obecné řešení lineární nehomogenní diferenční rovnice. Nejprve ověříme dosazením, že y_x je řešením rovnice (7), čili

$$\sum_{j=0}^{k} a_j(x)y_{x+j} = \sum_{j=0}^{k} a_j(x)[Y_{x+j} + \psi(x+j)] = \sum_{j=0}^{k} a_j(x)Y_{x+j} + \sum_{j=0}^{k} a_j(x)\psi(x+j).$$

První suma je rovna nule, protože Y_{x+j} je řešením lineární homogenní diferenční rovnice, druhá suma je rovna funkci $f(x)$, protože $\psi(x)$ byla řešením lineární nehomogenní diferenční rovnice. Tedy dosazením jsme dostali, že $0 + f(x) = f(x)$, což značí, že y_x je řešením rovnice $\sum_{j=0}^{k} a_j(x)y_{x+j} = f(x)$. Nyní dokážeme, že je to obecné řešení, tj. že libovolné řešení rovnice (7) má tvar jako y_x. Nechť $\psi_1(x)$ je libovolné řešení lineární nehomogenní diferenční rovnice; pak funkce $\psi_1(x) - \psi(x)$ je řešením příslušné lineární homogenní diferenční rovnice, neboť

$$\sum_{j=0}^{k} a_j(x)[\psi_1(x+j) - \psi(x+j)] = \sum_{j=0}^{k} a_j(x)\psi_1(x+j) - \sum_{j=0}^{k} a_j(x)\psi(x+j) = 0.$$

Tedy existují konstanty $C_1^*, C_2^*, \ldots, C_k^*$ takové, že $\psi_1(x) - \psi(x) = \sum_{j=1}^{k} C_j^*\varphi_j(x)$, neboli $\psi_1(x) = Y_x - \psi(x)$. Z toho plyne, že obecné řešení lineární nehomogenní diferenční rovnice jsou funkce tvaru

$$y_x = \sum_{j=1}^{k} C_j\varphi_j(x) + \psi(x).$$

■

1.3 Řešení lineární homogenní diferenční rovnice s konstantními koeficienty

Hledejme netriviální řešení lineární homogenní diferenční rovnice s konstantními koeficienty tvaru

$$a_0y_x + a_1y_{x+1} + a_2y_{x+2} + \ldots + a_ky_{x+k} = 0, \tag{10}$$

kde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ jsou dané konstanty, $a_0 \neq 0$, $a_k \neq 0$, a to pro $x = x_0 + n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Předpokládejme, že partikulární řešení rovnice (10) lze psát ve tvaru $y_x = \lambda^x$, kde λ je jistá konstanta. Tuto konstantu λ vypočítáme dosazením $y_x = \lambda^x$ do (10), čili

$$a_0\lambda^x + a_1\lambda^{x+1} + a_2\lambda^{x+2} + \ldots + a_k\lambda^{x+k} = 0.$$

Protože hledáme netriviální řešení, je $\lambda^x \neq 0$ a můžeme předchozí rovnici dělit funkcí λ^x. Tak dostaneme

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_k\lambda^k = 0. \tag{11}$$

Rovnice (11) neobsahuje proměnnou x; je to algebraická rovnice k-tého stupně ($a_k \neq 0$) pro neznámou λ; rovnice (11) má nejvyše k-reálných kořenů, a to nenulových, neboť $a_0 \neq 0$. Tedy lze vyhovět předpokladu, že řešení má tvar λ^x, kde λ je konstanta, a to tehdy, vezmeme-li za λ některý kořen rovnice (11).

Protože k nalezení obecného řešení rovnice (10) je třeba nalézt k lineárně nezávislých partikulárních řešení, budeme se v dalším zabývat problémem, jak nalézt fundamentální systém řešení v závislosti na charakteru kořenů rovnice (11); kořeny algebraické rovnice mohou být reálné jednoduché, reálné vícenásobné, imaginární jednoduché a imaginární vícenásobné.

Definice 1.7 *Rovnici*

$$\sum_{j=0}^{k} a_j\lambda^j = 0 \tag{12}$$

nazýváme **charakteristickou rovnicí** *lineární homogenní diferenční rovnice s konstantními koeficienty tvaru*

$$\sum_{j=0}^{k} a_j y_{x+j} = 0.$$

V dalším budeme probírat různé varianty, které vznikají řešení charakteristické rovnice. Ke zjištění fundamentálního řešení budeme v navazujícím výkladu potřebovat tvrzení následující věty.

Věta 1.9 *Funkce $\lambda_1^x, \lambda_2^x, \ldots, \lambda_k^x$ pro $\lambda_i \neq \lambda_j$, kde $i, j = 1, 2, \ldots, k$, jsou lineárně nezávislé v množině $\mathcal{M} = \{x_0 + n\}_{n=0}^{\infty}$.*

Důkaz. K důkazu budeme vyšetřovat podle Věty 1.2 determinant D, který je v našem případě vystižitelný relací ve tvaru

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_1^x & \lambda_2^x & \ldots & \lambda_k^x \\ \lambda_1^{x+1} & \lambda_2^{x+1} & \ldots & \lambda_k^{x+1} \\ \lambda_1^{x+2} & \lambda_2^{x+2} & \ldots & \lambda_k^{x+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{x+k-1} & \lambda_2^{x+k-1} & \ldots & \lambda_k^{x+k-1} \end{vmatrix}.$$

Z vlastností determinantů vyplývá, že můžeme z každého sloupce vytknout před determinant společného dělitele λ_j^x. Tak dostaneme

$$D = \lambda_1^x \lambda_2^x \dots \lambda_k^x \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = (\lambda_1^x \lambda_2^x \dots \lambda_k^x)^x D_k^*.$$

Protože funkce $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k)^x \neq 0$ pro všechna x, stačí dokázat, že determinant D_k^* (tzv. **Vandermondův**) je různý od nuly. K tomu použijeme věty, že determinant se nezmění, přičteme-li k jednomu řádku násobek jiného řádku. Násobíme tedy první řádek číslem $(-\lambda_1)$ a přičteme první řádek k druhému řádku, násobíme druhý řádek číslem $(-\lambda_1)$ a sečteme druhý řádek se třetím řádkem atd., až $(k-1)$-ní řádek násobíme číslem $(-\lambda_1)$ a sečteme poslední dva řádky. Obdržíme

$$D_k^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_2 & \dots & \lambda_k - \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) & \dots & \lambda_k(\lambda_k - \lambda_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda_2^{k-2}(\lambda_2 - \lambda_1) & \dots & \lambda_k^{k-2}(\lambda_k - \lambda_1) \end{vmatrix}.$$

Rozvineme-li determinant D_k^* podle prvního sloupce a vytkneme-li následně z každého sloupce společného dělitele, získáme výraz

$$D_k^* = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_2^{k-2} & \lambda_3^{k-2} & \dots & \lambda_k^{k-2} \end{vmatrix},$$

čili

$$D_k^* = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_1) D_{k-1}^*.$$

Obdobně upravíme determinant D_{k-1}^* atd., až dojdeme k determinantu D_2^*, který je tvaru

$$D_2^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_{k-1} & \lambda_k \end{vmatrix} = \lambda_{k-1} - \lambda_k.$$

Tím jsme dokázali, že determinant D_k^* je roven součinu všech možných rozdílů $\lambda_i - \lambda_j$, kde $i > j$ a $i, j = 1, 2, \dots, k$. Pro vzájemně různá čísla λ_i a λ_j je tento součin různý od nuly. A to jsme měli dokázat. Pro $k = 3$ je $D_3^* = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)$. Dokázaná věta platí i v případě, že λ_i jsou komplexní čísla. ■

1.3.1 Charakteristická rovnice má k různých reálných kladných kořenů

Označme kořeny charakteristické rovnice $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$; nechť jsou všechny reálné, kladné a jednoduché. Potom pro $x = x_0 + n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, jsou definovány reálné funkce $\varphi_1(x) = \lambda_1^x, \varphi_2(x) = \lambda_2^x, \ldots, \varphi_k(x) = \lambda_k^x$. Z Vět 1.7 a 1.9 vyplývá následující věta.

Věta 1.10 *Jestliže charakteristická rovnice má k různých reálných kladných kořenů λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$, pak příslušná homogenní diferenční rovnice má v množině $\mathcal{M} = \{x_0+n\}_{n=0}^{\infty}$ obecné řešení tvaru*

$$y_x = C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x + \ldots + C_k\lambda_k^x,$$

kde $C_1, C_2, \ldots, C_k$ jsou libovolné konstanty.

1.3.2 Charakteristická rovnice má imaginární kořeny

Než přejdeme k vlastnímu řešení homogenní diferenční rovnice s konstantními koeficienty, jejiž příslušná charakteristická rovnice má imaginární kořeny, zopakujme si některé pojmy z oboru komplexních čísel. Zápisu $\alpha + \mathrm{i}\beta$ říkáme **algebraický tvar komplexního čísla**, číslo α nazýváme **reálnou částí** a číslo β nazýváme **imaginární částí**. Dvě komplexní čísla jsou si rovna, jsou-li si rovny jejich reálné části a jsou-li si rovny jejich imaginární části.

Komplexní číslo se nazývá **imaginární**, je-li $\beta \neq 0$. Je-li $\beta = 0$, je komplexní číslo číslem **reálným**. Číslo $\alpha + \mathrm{i}\beta$ znázorňujeme geometricky jako bod v tzv. Gaussově rovině o souřadnicích $x = \alpha$, $y = \beta$; α, β se také nazývají **algebraické souřadnice komplexního čísla**. Kromě toho užíváme pro komplexní číslo tzv. **goniometrických souřadnic** r, ω, určených vztahy

$$\begin{aligned} \alpha &= r\cos\omega, \\ \beta &= r\sin\omega, \end{aligned}$$

a tedy

$$\alpha + \mathrm{i}\beta = r(\cos\omega + \mathrm{i}\sin\omega).$$

Číslo $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \geq 0$ se nazývá též **absolutní hodnota** nebo **modul** komplexního čísla; ω je úhel. Pro úhel ω platí $\cos\omega = \frac{\alpha}{r}$ a současně $\sin\omega = \frac{\beta}{r}$.

Ještě si připomeňme dobře známou větu. Má-li polynom $P_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} a_j\lambda^j$ s reálnými koeficienty komplexní kořen $\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$, pak má i kořen $\lambda_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$, komplexně sdružený s λ_1.

Protože dále ve výkladu budeme potřebovat funkce e^x a $\ln(z)$ pro $z = \alpha + \mathrm{i}\beta = r(\cos\omega + \mathrm{i}\sin\omega)$, uvedeme si jen stručně ještě tyto vzorce. Platí

$$\mathrm{e}^{\alpha+\mathrm{i}\beta} = \mathrm{e}^{\alpha}(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta).$$

Jelikož $r = \mathrm{e}^{\ln(r)}$, můžeme psát, že

$$z = r(\cos\omega + \mathrm{i}\sin\omega) = \mathrm{e}^{\ln(r)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} = \mathrm{e}^{\ln(r)+\mathrm{i}\omega},$$

tj. $z = \mathrm{e}^u$, a odtud podle definice logaritmu je $u = \ln(z)$. Tedy logaritmus komplexního čísla se vypočítá podle vzorce (pro $r \neq 0$)

$$\ln[r(\cos\omega + \mathrm{i}\sin\omega)] = \ln(r) + \mathrm{i}\omega.$$

Vraťme se k řešení diferenční rovnice $\sum_{j=0}^{k} a_j y_{x+j} = 0$, jejíž charakteristická rovnice má kořeny $\lambda_{1,2} = r(\cos\omega \pm \mathrm{i}\sin\omega)$. Potom lze vzít za partikulární řešení komplexní funkce

$$\lambda_{1,2}^x = \mathrm{e}^{x\ln(\lambda_{1,2})} = \mathrm{e}^{x[\ln(r)\pm\mathrm{i}\omega]},$$

tj.

$$\lambda_{1,2}^x = r^x(\cos\omega x \pm \mathrm{i}\sin\omega x).$$

Potom podle Vět 1.5 a 1.6 jsou řešením lineární homogenní diferenční rovnice s konstantními koeficienty i funkce

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{1}{2}(\lambda_1^x + \lambda_2^x), \\ \varphi_2(x) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\lambda_1^x - \lambda_2^x), \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= r^x\cos\omega x, \\ \varphi_2(x) &= r^x\sin\omega x, \end{aligned}$$

neboli řešením je reálná část komplexního řešení i imaginární část komplexního řešení. Pro imaginární kořeny $\lambda_{1,2}$ jsou funkce $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$ lineárně nezávislé v množině $\mathcal{M} = \{x_0 + n\}_{n=0}^{\infty}$, neboť

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1(x+1) & \varphi_2(x+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r^x\cos\omega x & r^x\sin\omega x \\ r^{x+1}\cos\omega(x+1) & r^{x+1}\sin\omega(x+1) \end{vmatrix} = r^{2x+1}\sin\omega \neq 0,$$

protože $\omega \neq 0, \omega \neq \pi$ (nejedná se o případ reálných kořenů). Tím jsme dokázali následující větu.

Věta 1.11 *Nechť má charakteristická rovnice imaginární kořeny* $\lambda_{1,2} = r(\cos\omega \pm \mathrm{i}\sin\omega)$. *Pak má příslušná homogenní diferenční rovnice lineárně nezávislá partikulární řešení tvaru*

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= r^x\cos\omega x, \\ \varphi_2(x) &= r^x\sin\omega x, \end{aligned}$$

a tedy má za řešení reálnou funkci

$$\varphi_{1,2}(x) = r^x(C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x),$$

kde C_1 *a* C_2 *jsou libovolné konstanty.*

Ještě si uvedeme v následující větě poznatek, ke kterému jsme došli při důkazu předcházející věty.

Věta 1.12 *Nechť rovnice $\sum_{j=0}^{k} a_j y_{x+j} = 0$ má komplexní řešení $y_x = u_x + \mathrm{i}v_x$. Potom jsou také reálné funkce u_x a v_x řešením dané rovnice.*

Důkaz. Víme, že

$$\sum_{j=0}^{k} a_j[u_{x+j} + \mathrm{i}v_{x+j}] = \sum_{j=0}^{k} a_j u_{x+j} + \mathrm{i}\sum_{j=0}^{k} a_j v_{x+j} = 0.$$

Komplexní výraz na levé straně předchozí rovnice je nulový, jestliže $\sum_{j=0}^{k} a_j u_{x+j} = 0$ a $\sum_{j=0}^{k} a_j v_{x+j} = 0$. To znamená, že u_x a v_x jsou řešením dané diferenční rovnice. ■

1.3.3 Charakteristická rovnice má reálný kořen $\lambda_1 < 0$

Jestliže je kořen λ_1 charakteristické rovnice záporný, pak funkce λ_1^x nemusí mít reálné hodnoty; to záleží na tom, jaký je definiční obor $\mathcal{M} = \{x_0, x_0+1, x_0+2, \ldots\}$ řešené diferenční rovnice, respektive na tom, jak je zvolen počáteční bod x_0. Je-li x_0 číslo celé, $x_0 = k$, pak i všechna $x \in \mathcal{M}$ jsou celá čísla a řešení $y_x = \lambda_1^x$ je reálné. V tomto případě můžeme používat stejného postupu jako v případě k reálných kořenů charakteristické rovnice.

Uvažujme tedy lineární homogenní diferenční rovnici s konstantními koeficienty, jejíž charakteristická rovnice má záporný kořen λ_1. Jestliže počáteční bod x_0 je například $x_0 = \frac{1}{2}$, bude mít funkce λ_1^x hodnoty imaginární, neboť pro $x = x_0 + n$, kde $n = 0, 1, 2, \ldots$, je $\lambda_1^x = \lambda_1^{x_0+n} = \lambda_1^{x_0}\lambda_1^n = \lambda_1^{\frac{1}{2}}\lambda_1^n = \sqrt{\lambda_1}\lambda_n$. Pro $\lambda_1 < 0$ je $\sqrt{\lambda_1} = \pm\mathrm{i}\sqrt{|\lambda_1|}$. Podobně, je-li x_0 iracionální, číslo $\lambda_1^{x_0}$ není reálné. Pro tento případ nalezneme reálnou a imaginární část čísla $\lambda_1^{x_0}$ podle vzorce

$$\lambda_1^{x_0} = \mathrm{e}^{x_0 \ln(\lambda_1)} = |\lambda_1|^{x_0}(\cos\pi x_0 + \mathrm{i}\sin\pi x_0) \equiv a_0 + \mathrm{i}b_0.$$

Diferenční rovnice má komplexní řešení $y_x = \lambda_1^x = a_0\lambda_1^n + \mathrm{i}b_0\lambda_1^n$. Ale podle Věty 1.12 má diferenční rovnice též řešení $u_x = a_0\lambda_1^n$ a $v_x = b_0\lambda_1^n$. Dále víme, že řešením je i funkce

$$C_1u_x + C_2v_x = C_1a_0\lambda_1^n + C_2b_0\lambda_1^n = (C_1a_0 + C_2b_0)\lambda_1^n = C\lambda_1^n.$$

Právě prezentovaným postupem jsme odvodili a dokázali následující větu, užívanou pro řešení lineární homogenní diferenční rovnice se záporným kořenem charakteristické rovnice.

Věta 1.13 *Nechť charakteristická rovnice má kořen $\lambda_1 < 0$. Je-li definiční obor příslušné diferenční rovnice $\mathcal{M} = \{x_0 + n\}_{n=0}^{\infty}$, má příslušná diferenční rovnice v množině $\mathcal{M}$ pro $x = x_0 + n$ partikulární řešení tvaru*

$$\varphi_1(x) = \lambda_1^n.$$

1.3.4 Charakteristická rovnice má kořen λ_1 s-násobný

V tomto případě lze charakteristickou rovnici příslušné lineární homogenní diferenční rovnice psát ve tvaru

$$(\lambda - \lambda_1)^s P_{k-s}(\lambda) = 0,$$

přičemž hodnota polynomu $P_{k-s}(\lambda)$ v bodě λ_1 je $P_{k-s}(\lambda_1) \neq 0$. Derivací lze snadno ověřit, že pro s-násobný kořen polynomu $P_{k-s}(\lambda)$ k-tého stupně platí

$$P_k(\lambda_1) = P_k'(\lambda_1) = P_k''(\lambda_1) = \ldots = P_k^{(s-1)}(\lambda_1) = 0, \qquad P_k^{(s)}(\lambda_1) \neq 0.$$

Máme-li v tomto případě nalézt obecné řešení diferenční rovnice, musíme nalézt s nezávislých partikulárních řešení příslušejících kořenu λ_1.

Věta 1.14 *Nechť má charakteristická rovnice dané diferenční rovnice k-tého řádu s-násobný kořen λ_1, kde $1 \leq s \leq k$. Potom má diferenční rovnice lineárně nezávislá řešení tvaru*

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \lambda_1^x, \\ \varphi_2(x) &= x\lambda_1^x, \\ \varphi_3(x) &= x^2\lambda_1^x, \\ &\vdots \\ \varphi_s(x) &= x^{s-1}\lambda_1^x, \end{aligned}$$

tj. má za řešení funkci

$$\varphi_{1,2,3,\ldots,s}(x) = P_{s-1}(x)\lambda_1^x,$$

kde $P_{s-1}(x)$ je polynom stupně $s-1$.

Důkaz. Nebudeme obecně provádět důkaz vzhledem k náročnosti formálních úprav. Ukážeme postup jen pro $s \leq 3$.

Nejprve si ukážeme, že funkce λ_1^x a $x\lambda_1^x$, respektive λ_1^x, $x\lambda_1^x$, $x^2\lambda_1^x$ jsou lineárně nezávislé na množině $\mathcal{M} = \{x_0+n\}_{n=0}^{\infty}$. K tomu vypočítáme determinant 2., respektive 3. řádu. Je-li $s = 3$, pak vyšetřujeme determinant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^x & x\lambda_1^x & x^2\lambda_1^x \\ \lambda_1^{x+1} & (x+1)\lambda_1^{x+1} & (x+1)^2\lambda_1^{x+1} \\ \lambda_1^{x+2} & (x+2)\lambda_1^{x+2} & (x+2)^2\lambda_1^{x+2} \end{vmatrix} = \lambda_1^x\lambda_1^{x+1}\lambda_1^{x+2} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & (x+1) & (x+1)^2 \\ 1 & (x+2) & (x+2)^2 \end{vmatrix} = \lambda_1^{3x+3}D^*.$$

Protože $\lambda_1^{3x+3} \neq 0$, stačí zjistit, že $D^* \neq 0$ pro všechna x. Determinant D^* vypočítáme pomocí již dříve vypočítaného determinantu $D_3^* = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)$ (viz Důkaz k Větě 1.9), ve kterém položíme $\lambda_1 = x$, $\lambda_2 = x+1$ a $\lambda_3 = x+2$. Potom

$$D^* = (x+1-x)(x+2-x)(x+2-x-1) = 2 \neq 0,$$

jak jsme měli dokázat. Z toho vyplývá, že funkce λ_1^x, $x\lambda_1^x$, $x^2\lambda_1^x$ jsou lineárně nezávislé na množině $\mathcal{M} = \{x_0+n\}_{n=0}^{\infty}$.

Nyní přejděme k vlastnímu důkazu naší věty. Nechť je S libovolné přirozené číslo splňující nerovnost $1 \leq S \leq s \leq k$. Máme dokázat, že každá funkce $\varphi_S(x) = x^{S-1}\lambda_1^x$ splňuje diferenční rovnici $\sum_{j=0}^k a_j\varphi_S(x+j) = 0$ pro $x = x_0 + n$; $n = 0, 1, 2, \ldots$. Do sumy na levé straně dosadíme předpokládané řešení a upravíme do tvaru

$$\sum_{j=0}^{k} a_j\varphi_S(x+j) = \sum_{j=0}^{k} a_j(x+j)^{S-1}\lambda_1^{x+j} = \lambda_1^x \sum_{j=0}^{k} a_j(x+j)^{S-1}\lambda_1^j.$$

Použitím binomické věty dostaneme

$$\sum_{j=0}^{k} a_j\varphi_S(x+j) = \lambda_1^x \sum_{j=0}^{k} a_j\lambda_1^j \sum_{K=0}^{S-1} \binom{S-1}{K} x^{S-1-K} j^K, \tag{13}$$

přitom pro $j = 0$, $K = 0$ definujeme $j^K = 1$ a pro $S = 1$, $K = 0$ definujeme $\binom{S-1}{K} = 1$. Za sumačním znakem je polynom v proměnné x stupně $S - 1$. Tento polynom bude identicky roven nule, budou-li všechny jeho koeficienty nulové. Napíšeme si tyto koeficienty a použijeme značení $P_k(\lambda)$ pro polynom tvořící levou stranu charakteristické rovnice. Koeficient b_{S-1} u x^{S-1} dostaneme dosazením $K = 0$ do rovnice (13), čili

$$b_{S-1} = \binom{S-1}{0}(a_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_1^2 + \ldots + a_k\lambda_1^k) = P_k(\lambda_1) = 0,$$

protože λ_1 je kořenem rovnice $P_k(\lambda)$. Koeficient b_{S-2} u x^{S-2} dostaneme dosazením $K = 1$, čili

$$\begin{aligned} b_{S-2} &= \binom{S-1}{1}(a_0.0 + a_1.1.\lambda_1 + a_2.2.\lambda_1^2 + \ldots + a_k.k.\lambda_1^k) \\ &= \binom{S-1}{1}\lambda_1(1.a_1 + 2.a_2\lambda_1 + \ldots + k.a_k\lambda_1^{k-1}) = \binom{S-1}{1}\lambda_1 P_k'(\lambda_1) = 0, \end{aligned}$$

neboť je-li λ_1 aspoň dvojnásobný kořen rovnice $P_k(\lambda) = 0$, je derivace $P_k'(\lambda_1) = 0$. Pro případ $s = 3$ si napíšeme ještě koeficient b_{S-3} u x^{S-3}, který dostaneme dosazením $K = 2$ do výrazu (13), tedy

$$\begin{aligned} b_{S-3} &= \binom{S-1}{2}(1^2a_1\lambda_1 + 2^2a_2\lambda_1^2 + 3^2a_3\lambda_1^3 + \ldots + k^2a_k\lambda_1^k) \\ &= \binom{S-1}{2}\lambda_1(1^2a_1 + 2^2a_2\lambda_1 + 3^2a_3\lambda_1^2 + \ldots + k^2a_k\lambda_1^{k-1}). \end{aligned}$$

Z předchozího použijeme, že $P_k'(\lambda_1) = 0$, tj. že $a_1 = -(2a_2\lambda_1 + 3a_3\lambda_1^2 + \ldots + ka_k\lambda_1^{k-1})$, pak

$$\begin{aligned} b_{S-3} &= \binom{S-1}{2}\lambda_1(-2a_2\lambda_1 - 3a_3\lambda_1^2 - \ldots - ka_k\lambda_1^{k-1} + 2^2a_2\lambda_1 + \ldots + k^2a_k\lambda_1^{k-1}) \\ &= \binom{S-1}{2}\lambda_1^2[2a_2 + 3.2a_3\lambda_1 + \ldots + k(k-1)a_k\lambda_1^{k-2}] = \binom{S-1}{2}\lambda_1^2 P_k''(\lambda_1) = 0, \end{aligned}$$

protože je-li λ_1 aspoň trojnásobný kořen rovnice $P_k(\lambda) = 0$, pak je druhá derivace $P_k''(\lambda_1) = 0$. Obdobně bychom postupovali pro $s > 3$.

Protože libovolná lineární kombinace funkcí $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_s(x)$ také dává řešení homogenní rovnice, je řešením též funkce

$$\varphi_{1,2,\ldots,s}(x) = \sum_{j=1}^{s-1} C_j x^j \lambda_1^x = P_{s-1}(x)\lambda_1^x.$$

■

Věty 1.14 lze použít i pro případ, kdy charakteristická rovnice má s-násobné imaginární kořeny $\lambda_{1,2} = r(\cos\omega + \mathrm{i}\sin\omega)$, neboť úpravy používané v důkazu předchozí věty jsou platné i pro imaginární kořeny. V tomto případě jsou funkce $\varphi_S(x) = x^{S-1}\lambda_1^x$ pro $S = 1, 2, \ldots, s$ komplexní. Podle Věty 1.12 jsou řešením diferenční rovnice také reálná část $\varphi_S(x)$ a imaginární část $\varphi_S(x)$, tj. hledaná reálná partikulární řešení pro $S = 1, 2, \ldots, s$ jsou funkce

$$\begin{aligned} \varphi_{1S}(x) &= x^{S-1} r^x \cos\omega x, \\ \varphi_{2S}(x) &= x^{S-1} r^x \sin\omega x. \end{aligned}$$

1.4 Řešení lineární nehomogenní diferenční rovnice s konstantními koeficienty

V tomto odstavci se budeme zabývat rovnicí

$$\sum_{j=0}^{k} a_j y_{x+j} = f(x), \tag{14}$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_k$ jsou konstanty, přičemž $a_0 \neq 0$ a $a_k \neq 0$. Nehomogenní diferenční rovnici s konstantními koeficienty lze řešit buď **odhadem partikulárního řešení** podle Věty 1.8, nebo tzv. **metodou variace konstant**. Pro oba postupy je třeba nejprve nalézt obecné řešení příslušné homogenní diferenční rovnice, které je, jak již víme, funkce tvaru

$$Y_x = \sum_{j=1}^{k} C_j \varphi_j(x).$$

(Pro obecné řešení homogenní diferenční rovnice budeme nyní užívat značení Y_x na rozdíl od hledaného obecného řešení nehomogenní diferenční rovnice, které budeme značit y_x.)

1.4.1 Metoda odhadu partikulárního řešení

Této metody používáme jen pro speciální pravé strany $f(x)$, a to pro funkce utvořené součtem nebo součinem z funkcí k, x^n, q^x, $\sin\alpha x$, $\cos\alpha x$, jako jsou například

$$f(x) = P_n(x),$$

kde $P_n(x)$ je polynom stupně n,

$$f(x) = P_n(x)q^x,$$

nebo

$$f(x) = P_n(x)\sin\alpha x,$$

nebo

$$f(x) = P_n(x)q^x\cos\alpha x$$

a podobně. Protože tyto funkce mají tu vlastnost, že jejich diference 1., 2., ... až k-tého řádu a jejich lineární kombinace jsou opět funkce téhož druhu, usuzujeme z toho, že platí i obráceně. Známe-li výslednou funkci $f(x)$, utvořenou součtem $\sum_{j=0}^{k} a_j Z_{x+j}$, (tj. utvořenou lineární kombinací), pak funkce Z_x určíme tak, že do dané diferenční rovnice dosadíme předpokládaný (odhadnutý) tvar Z_x [stejný jako je tvar dané funkce $f(x)$) s neurčitými koeficienty, které pak získáme porovnáním s koeficienty pravé strany $f(x)$. Někdy se však může stát, že se některé členy součtu $\sum_{j=0}^{k} a_j Z_{x+j}$ zruší [takže tento součet je například polynom nižšího stupně než daný polynom $f(x)$). V těchto případech stačí náš odhad funkce Z_x znásobit ještě vhodnou mocninou x^m, kde konstanta m souvisí s kořeny charakteristické rovnice v závislosti na tvaru funkce $f(x)$. Obecné řešení dané nehomogenní diferenční rovnice je pak podle Věty 1.8 funkce

$$y_x = Y_x + Z_x. \tag{15}$$

Věta 1.15 *Je dána lineární nehomogenní diferenční rovnice k-tého řadu s konstantními koeficienty, která je vystižitelná relací tvaru*

$$\sum_{j=0}^{k} a_j y_{x+j} = P_n(x)q^x\cos\alpha x, \tag{16}$$

kde $P_n(x)$ je polynom stupně $n \geq 0$, přičemž může být i $q = 1$ nebo $\alpha = 0$.

1. *Nechť má charakteristická rovnice lineární nehomogenní diferenční rovnice* (16) *kořeny*

$$\lambda_j \neq q(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha).$$

   Pak je partikulárním řešením dané lineární nehomogenní diferenční rovnice (16) *funkce tvaru*

$$Z_x = [Q_n(x)\sin\alpha x + R_n(x)\cos\alpha x]q^x, \tag{17}$$

   kde $Q_n(x)$ a $R_n(x)$ jsou jisté polynomy stupně n.

2. *Nechť charakteristická rovnice lineární nehomogenní diferenční rovnice* (16) *má některý kořen*

$$\lambda_j = q(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha).$$

   a to s-násobný, $s \geq 1$. Pak je partikulárním řešením dané lineární nehomogenní diferenční rovnice (16) *funkce tvaru*

$$Z_x = x^s[Q_n(x)\sin\alpha x + R_n(x)\cos\alpha x]q^x. \tag{18}$$

Obdobné tvrzení platí i pro rovnici $\sum_{j=0}^{k} a_j y_{x+j} = P_n(x) q^x \sin \alpha x$, jejíž partikulární řešení má tvar

$$Z_x = x^s [Q_n^*(x) \sin \alpha x + R_n^*(x) \cos \alpha x] q^x, \tag{19}$$

kde může být i $s = 0$. Důkaz pro náročnost zde nebudeme provádět. Potom obecným řešením rovnice s pravou stranou je funkce $y_x = Y_x + Z_x$, kde Y_x je obecné řešení příslušné homogenní diferenční rovnice (viz Věta 1.8).

1.4.2 Metoda variace konstant

Nechť obecné řešení lineární homogenní diferenční rovnice k-tého řádu s konstantními koeficienty, tj. $\sum_{j=0}^{k} a_j y_{x+j} = 0$, je funkce

$$Y_x = \sum_{j=1}^{k} C_j \varphi_j(x).$$

Hledejme řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice k-tého řádu s konstantními koeficienty, tj.

$$\sum_{j=0}^{k} a_j y_{x+j} = f(x),$$

a to ve tvaru, který se liší od obecného řešení Y_x příslušné homogenní diferenční rovnice jen tím, že C_j nebudou konstanty, ale jisté funkce proměnné x, tj. budeme psát $C_j = C_j(x)$; této změně konstant ve funkce říkáme **variace konstant**. Nyní si ukážeme, odkud neznámé funkce $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_k(x)$ vypočítáme. K jejich určení je zapotřebí k rovnic. Při tvoření hodnot $Y_{x+1}, Y_{x+2}, \ldots, Y_{x+k}$ si vhodně zvolíme $k-1$ rovnic, a to pro diference hledaných funkcí $C_j(x)$, a k-tou rovnici bude tvořit daná rovnice s pravou stranou, tj. s funkcí $f(x)$. Dále si ukážeme, že získaná soustava má jediné řešení. Tedy

$$Y_x = \sum_{j=1}^{k} C_j(x) \varphi_j(x)$$

a

$$\begin{aligned}
Y_{x+1} &= \sum_{j=1}^{k} C_j(x+1) \varphi_j(x+1) \\
&= \sum_{j=1}^{k} [C_j(x+1) \varphi_j(x+1) - C_j(x) \varphi_j(x+1) + C_j(x) \varphi_j(x+1)] \\
&= \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x+1) \Delta C_j(x) + \sum_{j=1}^{k} C_j(x) \varphi_j(x+1).
\end{aligned}$$

V předchozí relaci zvolíme první sumu rovnu nule, tj. $\sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x+1) \Delta C_j(x) = 0$. Tím hodnotu Y_{x+2} počítáme jen z druhé, nenulové sumy ve výrazu pro Y_{x+1}. Pak

$$Y_{x+2} = \sum_{j=1}^{k} C_j(x+1) \varphi_j(x+2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{k}[C_j(x+1)\varphi_j(x+2) - C_j(x)\varphi_j(x+2) + C_j(x)\varphi_j(x+2)] \\
&= \sum_{j=1}^{k}\varphi_j(x+2)\Delta C_j(x) + \sum_{j=1}^{k} C_j(x)\varphi_j(x+2).
\end{aligned}
$$

Opět položíme první sumu v předchozí relaci rovnu nule, tj. $\sum_{j=1}^{k}\varphi_j(x+2)\Delta C_j(x) = 0$, a dostáváme tím druhou rovnici a Y_{x+2} pak počítáme jen z druhé sumy ve výrazu Y_{x+2} atd., až do Y_{x+k-1}; celkem jsme tedy zvolili $k-1$ rovnic. Nyní vypočítáme Y_{x+k}, čili

$$
\begin{aligned}
Y_{x+k} &= \sum_{j=1}^{k} C_j(x+1)\varphi_j(x+k) \\
&= \sum_{j=1}^{k}[C_j(x+1)\varphi_j(x+k) - C_j(x)\varphi_j(x+k) + C_j(x)\varphi_j(x+k)] \\
&= \sum_{j=1}^{k}\varphi_j(x+k)\Delta C_j(x) + \sum_{j=1}^{k} C_j(x)\varphi_j(x+k).
\end{aligned}
$$

Zde již nepoložíme první sumu rovnu nule, ale dosadíme $Y_x, Y_{x+1}, Y_{x+2}, \ldots, Y_{x+k}$ do dané rovnice; tím dostáváme poslední k-tou rovnici ve tvaru

$$
f(x) = a_0 Y_x + a_1 Y_{x+1} + a_2 Y_{x+2} + \ldots + a_{k-1} Y_{x+k-1} + a_k Y_{x+k},
$$

tj.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 \sum_{j=1}^{k} C_j(x)\varphi_j(x) + a_1 \sum_{j=1}^{k} C_j(x)\varphi_j(x+1) + a_2 \sum_{j=1}^{k} C_j(x)\varphi_j(x+2) + \ldots + \\
&+ a_k \left[\sum_{j=1}^{k}\varphi_j(x+k)\Delta C_j(x) + \sum_{j=1}^{k} C_j(x)\varphi_j(x+k)\right].
\end{aligned}
$$

Kromě předposledního členu je součet sum na pravé straně poslední rovnice roven nule, neboť tato část je ve skutečnosti levá strana dané rovnice, do které jsme dosadili obecné řešení příslušné homogenní rovnice. Tak dostáváme algebraickou lineární soustavu k rovnic pro k neznámých $\Delta C_1, \Delta C_2, \ldots, \Delta C_k$, kterou si nyní rozepíšeme, tedy

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(x+1)\Delta C_1 + \varphi_2(x+1)\Delta C_2 + \ldots + \varphi_k(x+1)\Delta C_k &= 0, \\
\varphi_1(x+2)\Delta C_1 + \varphi_2(x+2)\Delta C_2 + \ldots + \varphi_k(x+2)\Delta C_k &= 0, \\
&\vdots \\
\varphi_1(x+k-1)\Delta C_1 + \varphi_2(x+k-1)\Delta C_2 + \ldots + \varphi_k(x+k-1)\Delta C_k &= 0, \\
a_k\left[\varphi_1(x+k)\Delta C_1 + \varphi_2(x+k)\Delta C_2 + \ldots + \varphi_k(x+k)\Delta C_k\right] &= f(x).
\end{aligned}
$$

Protože funkce $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ jsou lineárně nezávislé, je determinant matice soustavy nenulový a existuje jediné nenulové řešení, které označíme jako

$$
\Delta C_1(x) = f_1(x),
$$

$$\begin{aligned} \Delta C_2(x) &= f_2(x), \\ &\vdots \\ \Delta C_k(x) &= f_k(x). \end{aligned}$$

Odtud vypočítáme, že

$$\begin{aligned} C_1 &= \Delta^{-1} f_1(x) + K_1, \\ C_2 &= \Delta^{-1} f_2(x) + K_2, \\ &\vdots \\ C_k &= \Delta^{-1} f_k(x) + K_k. \end{aligned}$$

Tím jsme si ověřili, že obecné řešení diferenční rovnice s pravou stranou je funkce ve tvaru

$$y_x = \sum_{j=1}^{k} [\Delta^{-1} f_j(x) + K_j] \varphi_j(x),$$

tj.

$$y_x = \sum_{j=1}^{k} K_j \varphi_j(x) + \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x) \Delta^{-1} f_j(x). \tag{20}$$

Z toho je patrné, že obecné řešení lineární nehomogenní diferenční rovnice s konstantními koeficiety je součet dvou funkcí: **obecného řešení** příslušné homogenní rovnice,

$$Y_x = \sum_{j=1}^{k} K_j \varphi_j(x).$$

a jisté funkce závisející na pravé straně $f(x)$, což je **partikulární řešení** dané rovnice s pravou stranou,

$$Z_x = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x) \Delta^{-1} f_j(x).$$

2 $\mathcal{Z}$-transformace

$\mathcal{Z}$-transformace je matematický prostředek, který poskytuje alternativní metodu pro řešení lineárních diferenčních rovnic a některých sumačních rovnic. Proto v dalším uvedeme velmi stručně definici přímé a zpětné $\mathcal{Z}$-transformace a odvodíme několik jejích vlastností, které následně použijeme k řešení lineárních nehomogenních diferečních rovnic k-tého řádu s konstatními koeficienty. Na okraj poznamenejme, že $\mathcal{Z}$-transformace je velmi důležitý nástroj, který našel převážně uplatnění při analýze a návrhu digitálních kontrolních systémů.

Definice 2.1 (Definice přímé $\mathcal{Z}$-transformace). ***$\mathcal{Z}$*-transformaci** *nazýváme zobrazení $\mathcal{Z}$: $\mathcal{Z}_0 \to K_0$ třídy přípustných posloupností do množiny funkcí komplexní proměnné,* *které každé posloupnosti* $\{y_j\}_0^\infty \in \mathcal{Z}_0$ *přiřazuje funkci komplexní proměnné* $F(z) = \mathcal{Z}\{y_j\}$*, definovanou řadou*

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y_j\} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y_j}{z^j}. \tag{21}$$

Posloupnost $\{y_j\}_0^\infty$ *je* $\mathcal{Z}$*-transformovatelná za předpokladu, že existuje aspoň jedno komplexní číslo* $R \in \mathcal{C} - \{0\}$ *takové, že funkční řada* $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y_j}{z^j}$ *konverguje pro* $\mid z \mid > R$.

Poznámka 2.1 *Třídou přípustných posloupností (nebo též třídou předmětů v* $\mathcal{Z}$*-transformaci) nazýváme množinu posloupností komplexních čísel* $\{y_j\}, j = 0, 1, 2, 3, \ldots,$ *které pro* $j \geq 0$ *vyhovují podmínce*

$$\mid y_j \mid \leq Mc^j. \tag{22}$$

kde M *a* c *jsou nezáporné konstanty, tj.* $M > 0$ *a* $c > 1$. *Třídu přípustných posloupností označujeme symbolem* $\mathcal{Z}_0$.

Poznámka 2.2 *Vlastnost, popsanou podmínkou* (22)*, vyjadřujeme také výrokem, že posloupnost* $\{y_j\}_0^\infty$ *je* **exponenciálního řádu**.

Posloupnost $\{y_j\}_0^\infty$ nazýváme **předmětem** (neboli **originálem**) k funkci $Y(z)$ a funkci $Y(z)$ nazýváme **obrazem** posloupnosti $\{y_j\}_0^\infty$. $\mathcal{Z}$-transformace je zobrazení, které každé posloupnosti $\{y_j\}_0^\infty$ z množiny všech přípustných posloupností jednoznačně přiřazuje obraz $Y(z)$. O přípustných posloupnostech, tj. o posloupnostech, které jsou $\mathcal{Z}$-transformovatelné, hovoří následující věta.

Věta 2.1 *Jestliže je posloupnost* $\{y_j\}_0^\infty$ *exponenciálního řádu, pak* $\mathcal{Z}$*-transformace posloupnosti* $\{y_j\}_0^\infty$ *existuje, tj. posloupnost* $\{y_j\}_0^\infty$ *je* $\mathcal{Z}$*-transformovatelná.*

Důkaz. Předpokládejme, že posloupnost $\{y_j\}_0^\infty$ je exponenciálního řádu. Pak existují $M > 0$ a $c > 1$ taková, že pro $j \geq 0$ platí

$$\mid y_j \mid \leq Mc^j.$$

Z definice $\mathcal{Z}$-transformace obdržíme

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{y_j}{z^j} \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|y_j|}{|z^j|} \leq M \sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{c}{z} \right|^j$$

a poslední suma konverguje pro $|z| > c$. Z toho tedy plyne, že $\mathcal{Z}$-transformace posloupnosti $\{y_j\}_0^\infty$ existuje. ∎

Nyní obraťme naší pozornost na několik důležitých vlastností $\mathcal{Z}$-transformace, které jsou předmětem následujících vět.

Věta 2.2 (Věta o linearitě a násobení konstantou). *Jestliže* $\{u_j\}_0^\infty \in \mathcal{Z}_0$, $\{v_j\}_0^\infty \in \mathcal{Z}_0$ *a jsou-li* a, b *komplexní konstanty, pak pro všechna* z *ze společného definičního oboru funkcí* $U(z) = \mathcal{Z}\{u_j\}$ *a* $V(z) = \mathcal{Z}\{v_j\}$ *platí*

$$\mathcal{Z}\{au_j + bv_j\} = a\mathcal{Z}(u_j) + b\mathcal{Z}(v_j) = aU(z) + bV(z). \tag{23}$$

Důkaz. S využitím definičního vztahu $\mathcal{Z}$-transformace (21) dostaneme po dosazení relaci ve tvaru

$$\mathcal{Z}\{au_j + bv_j\} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{au_j + bv_j}{z^j} = a\sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j}{z^j} + a\sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j}{z^j} = aU(z) + bV(z).$$

■

Věta 2.3 (Věta o substituci). *Jestliže* $\{y_j\}_0^\infty \in \mathcal{Z}_0$ *a* $\mathcal{Z}\{y_j\} = Y(z)$ *pro* $|z| > r$, *pak pro komplexní konstantu* $a \neq 0$ *a pro* $|z| > r|a|$ *platí*

$$\mathcal{Z}\{a^j y_j\} = Y\Big(\frac{z}{a}\Big). \tag{24}$$

Důkaz. S využitím definičního vztahu $\mathcal{Z}$-transformace (21) dostaneme po dosazení relaci ve tvaru

$$\mathcal{Z}\{a^j y_j\} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j y_j}{z^j} = \sum_{j=0}^{\infty} y_j \Big(\frac{z}{a}\Big)^{-j} = Y\Big(\frac{z}{a}\Big).$$

■

Věta 2.4 (Věta o posunutí vpravo). *Nechť* $\{y_j\}_0^\infty \in \mathcal{Z}_0$. *Pro pevné* $k \geq 0$ *celé definujme posloupnost* $\{v_j\} = \{y_{j-k}\}$ *pro* $j \geq k$, $\{v_j\} = 0$ *pro* $j < k$. *Označme* $Y(z) = \mathcal{Z}\{y_j\}$ *a* $V(z) = \mathcal{Z}\{v_j\}$. *Potom platí*

$$\mathcal{Z}\{y_{j-k}\} = \frac{1}{z^k} Y(z). \tag{25}$$

Důkaz. Vyjděme z Definice 2.1, potažmo z relace (21). Označíme-li $Y(z) = \mathcal{Z}\{y_j\}$ a $V(z) = \mathcal{Z}\{v_j\}$, pak dostaneme

$$\mathcal{Z}\{y_{j-k}\} = \mathcal{Z}\{v_j\} = V(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v_j}{z^j} = \frac{1}{z^k} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{y_{j-k}}{z^{j-k}} = \frac{1}{z^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y_m}{z^m} = \frac{1}{z^k} Y(z).$$

■

Poznámka 2.3 *V některých případech platí, že* $\{v_j\} = \{y_{j-k}\}$ *pro* $j \geq k$, *ale* $\{v_j\} \neq 0$ *pro* $j < k$. *Pak musíme relaci* (25) *zobecnit, čímž obdržíme pro translaci vpravo výraz*

$$\mathcal{Z}\{y_{j-k}\} = \frac{1}{z^k}\left[Y(z) + \sum_{m=1}^{k} y_{-m} z^m\right]. \tag{26}$$

Věta 2.5 (Věta o posunutí vlevo). *Nechť* $\{y_j\}_0^\infty \in \mathcal{Z}_0$. *Pro pevné* $k > 0$ *celé definujme posloupnost* $\{v_j\} = \{y_{j+k}\}$ *(samozřejmě jen pro* $n \geq 0$*). Označme* $Y(z) = \mathcal{Z}\{y_j\}$ *a* $V(z) = \mathcal{Z}\{v_j\}$. *Potom platí*

$$\mathcal{Z}\{y_{j+k}\} = z^k \left[Y(z) - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{y_m}{z^m}\right]. \tag{27}$$

Důkaz. Vyjděme z Definice 2.1, potažmo z relace (21). Označíme-li $Y(z) = \mathcal{Z}\{y_j\}$ a $V(z) = \mathcal{Z}\{v_j\}$, pak dostaneme

$$\mathcal{Z}\{y_{j+k}\} = \mathcal{Z}\{v_j\} = V(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v_j}{z^j} = z^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y_{j+k}}{z^{j+k}} = z^k \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{y_m}{z^m} - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{y_m}{z^m} \right)$$

a odtud

$$\mathcal{Z}\{y_{j+k}\} = z^k \left[Y(z) - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{y_m}{z^m} \right].$$

■

V některých případech (například při studiu stability různých systémů) je důležité určit chování posloupnosti exponenciálního řádu v počátku a v nekonečnu. Za tímto účelem je vhodné využít následující větu.

Věta 2.6 (Věta o počáteční a konečné hodnotě).

1. *Nechť $\{y_j\}_0^\infty \in \mathcal{Z}_0$ a $Y(z) = \mathcal{Z}\{y_j\}$. Jestliže $Y(z)$ existuje pro $|z| > r$, pak pro počáteční hodnotu y_0 platí*
$$y_0 = \lim_{z\to\infty} Y(z). \tag{28}$$

2. *Nechť $\{y_j\}_0^\infty \in \mathcal{Z}_0$ a $Y(z) = \mathcal{Z}\{y_j\}$. Jestliže $Y(z)$ existuje pro $|z| > 1$ a funkce $(z-1)Y(z)$ je analytická v bodě $z = 1$, pak platí*
$$\lim_{j\to\infty} y_j = \lim_{z\to 1} (z-1)Y(z). \tag{29}$$

Důkaz. První část Věty 2.6 plyne přímo z definice $\mathcal{Z}$-transformace [viz relace (21)]. Abychom dokázali druhou část předchozí věty, uvažujme výraz ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{y_{j+1} - y_j\} &= \sum_{j=0}^{\infty} y_{j+1} z^{-j} - \sum_{j=0}^{\infty} y_j z^{-j} = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{j=0}^{n} y_{j+1} z^{-j} - \sum_{j=0}^{n} y_j z^{-j} \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[-y_0 + y_1(1 - z^{-1}) + \ldots + y_n(z^{-n+1} - z^{-n}) + y_{n+1} z^{-n} \right]. \end{aligned}$$

Odtud

$$\lim_{z\to 1} [\mathcal{Z}\{y_{j+1}\} - \mathcal{Z}\{y_j\}] = \lim_{n\to\infty} (y_{n+1} - y_0).$$

Aplikujeme-li na levu stranu předchozího výrazu větu o posunutí [viz vztah (27)], dostaneme relaci ve tvaru

$$\lim_{z\to 1} [zY(z) - zy_0 - Y(z)] = \lim_{j\to\infty} (y_j - y_0).$$

Pak

$$\lim_{j\to\infty} y_j = \lim_{z\to 1} (z-1)Y(z).$$

■

Nyní se zabývejme stručně problémem zpětné $\mathcal{Z}$-transformace. Poměrně snadno lze dokázat větu, že $\mathcal{Z}$-transformace je bijektivní zobrazení množiny $\mathcal{Z}_0$ na množinu všech funkcí komplexní proměnné holomorfních v bodě ∞. Funkce komplexní proměnné je tedy obrazem posloupnosti v $\mathcal{Z}$-transformaci právě tehdy, je-li holomorfní v nekonečnu; předmět je k ní určen jednoznačně a je jím posloupnost koeficientů Laurentova rozvoje v okolí nekonečna.

Základní myšlenka zpětné $\mathcal{Z}$-transformace obrazu $Y(z)$ tedy spočívá v tom, že sestrojíme Laurentův rozvoj v okolí nekonečna

$$Y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y_j}{z^j} \tag{30}$$

a koeficienty y_j jsou v podstatě členy hledané posloupnosti $\{y_j\} = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$. Platí pro ně integrální vzorec

$$y_j = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C Y(z) z^{j-1} \mathrm{d}z, \tag{31}$$

kde C je kladně orientovaná kružnice se středem v počátku, taková, že všechny singulární body funkce $Y(z)$ leží v jejím vnitřku. Vzorec (31) však používáme zřídka.

	Posloupnost	**$\mathcal{Z}$-obraz**
1	1	$\frac{z}{z-1}$
2	a^j	$\frac{z}{z-a}$
3	j	$\frac{z}{(z-1)^2}$
4	j^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
5	$\sin(aj)$	$\frac{z \sin a}{z^2-2z\cos a+1}$
6	$\cos(aj)$	$\frac{z^2-z\cos a}{z^2-2z\cos a+1}$
7	$\sinh(aj)$	$\frac{z \sinh a}{z^2-2z\cosh a+1}$
8	$\cosh(aj)$	$\frac{z^2-z\cosh a}{z^2-2z\cosh a+1}$
9	$au_j + bv_j$	$aU(z) + bV(z)$
10	$a^j y_j$	$Y(\frac{z}{a})$
11	jy_j	$-zY'(z)$
12	$u_j * v_j$	$U(z)V(z)$
13	$\sum_{j=0}^{k} y_j$	$\frac{z}{z-1}Y(z)$
14	y_{j-k}	$\frac{1}{z^k}Y(z) + \sum_{m=1}^{k} y_{-m}z^{m-k}$
15	y_{j+k}	$z^kY(z) - \sum_{m=0}^{k-1} y_m z^{k-m}$

Tabulka 1: Vlastnosti $\mathcal{Z}$-transformace a $\mathcal{Z}$-obrazy některých posloupností.

Nejčastěji bývá daným obrazem racionální funkce, jejíž čitatel je ovšem nejvýše téhož stupně jako jmenovatel (jinak by nemohla být holomorfní v ∞). Potom můžeme postupovat několika způsoby. Můžeme obraz rozložit na částečně zlomky tvaru $\frac{A}{(z-a)^m}$ a každý z nich pro dostatečně velká z rozložit na řadu v mocninách zlomku $\frac{1}{z}$. Můžeme také rozložit obraz na součet zlomků typu $\frac{Az}{(z-a)^i}$, k nimž pro $i = 1$ známe předmět (viz Tabulka 1) a pro $i > 1$ jej nalezneme derivováním řady $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{z^j}$. Obecné vzorce, které lze tak získat, jsou nepřehledné a bývá vhodnější provést právě popsanou myšlenku v konkrétním případě. K obecnému vyjádření je nejvhodnější vzorec pro koeficienty Laurentova rozvoje, který dostaneme tak, že rovnost (30) vynásobíme výrazem z^i, takže dostaneme

$$z^i Y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y_j}{z^{j-i}}.$$

Zderivujeme tuto rovnost $(i + 1)$-rát, anulují se kladné mocniny z. Tím dostaneme rovnici ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^{i+1}}{\mathrm{d}z^{i+1}} \left[z^i Y(z)\right] = \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^{i+1}}{\mathrm{d}z^{i+1}} \left[\frac{y_j}{z^{j-i}}\right] = (-1)^{i+1} \left[(i+1)! \frac{y_{j+1}}{z^{j+2}} + (i+2)! \frac{y_{j+2}}{z^{j+3}} + \ldots\right].$$

Odtud

$$f_{i+1} = \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!} \lim_{z\to\infty} \left\{ z^{i+2} \frac{\mathrm{d}^{i+1}}{\mathrm{d}z^{i+1}} \left[z^i Y(z)\right] \right\}. \tag{32}$$

V Tabulce 1 jsou přehledně shrnuty některé předchozí věty týkající se vlastností $\mathcal{Z}$-transformace. Jejím obsahem jsou rovněž $\mathcal{Z}$-obrazy některých nejpoužívanějších posloupností.

Na závěr si uveďme větu, která hovoří o charakteru řešení diferenční rovnice k-tého řádu s konstantními koeficienty pomocí $\mathcal{Z}$-transformace.

Věta 2.7 *Jestliže posloupnost $\{y_j\}_0^\infty$ je exponenciálního řádu, pak každé řešení diferenční rovnice k-tého řádu s konstantními koeficienty,*

$$y_{j+k} + a_1 y_{j+k-1} + a_2 y_{j+k-2} + \ldots + a_n y_j = f_j, \tag{33}$$

je exponenciální řádu a jeho $\mathcal{Z}$-transformace existuje.

Důkaz. Předchozí větu dokážeme pro případ diferenční rovnice 2. řadu s konstantními koeficienty, tj. $k = 2$. Předpokládejme, že y_j je řešení diferenční rovnice

$$y_{j+2} + a_1 y_{j+1} + a_2 y_j = f_j$$

a posloupnost $\{y_j\}_0^\infty$ je exponenciálního řádu. Poněvadž $\{y_j\}_0^\infty$ je exponenciální řádu, existují $M > 0$ a $c > 1$ taková, že pro $j \geq 0$ platí

$$| y_j | \leq M c^j.$$

Jestliže je tedy y_j řešení výše uvedené diferenční rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty, dostaneme

$$| y_{j+2} |\leq| a_1 || y_{j+1} | + | a_2 || y_j | +Mc^j. \tag{34}$$

Nechť

$$B = \max\{|a_1|, |a_2|, |y_0|, |y_1|, |M|, |c|\}.$$

Nyní pomocí matematické indukce dokážeme, že pro $j = 1, 2, 3, \dots$ platí

$$| y_j |\leq 3^{j-1}B^j. \tag{35}$$

Je zřejmé, že nerovnice (35) je splněna pro $j = 1$. Dále předpokládejme, že $j_0 \geq 1$ a nerovnice (35) je pravdivá pro $1 \leq j \leq j_0$. Nechť $j = j_0 - 1$, pak z (34) obdržíme

$$| y_{j_0+1} |\leq| a_1 || y_{j_0} | + | a_2 || y_{j_0-1} | +Mc^{j_0-1}.$$

Použitím hypotézy matematické indukce a definice B dostaneme z předchozí nerovnice relaci

$$| y_{j_0+1} |\leq B3^{j_0-1}B^{j_0} + B3^{j_0-2}B^{j_0-1} + BB^{j_0-1}.$$

Z toho plyne

$$| y_{j_0+1} |\leq 3^{j_0-1}B^{j_0+1} + 3^{j_0-1}B^{j_0+1} + 3^{j_0-1}B^{j_0+1} = 3^{j_0}B^{j_0+1},$$

což uzavírá indukci. Z nerovnosti (35) je pro $j = 1, 2, 3, \dots$

$$| y_j |\leq (3B)^j,$$

takže řešení y_j je exponenciálního řádu. Z Věty 2.1 následně plyne, že existuje $\mathcal{Z}$-transformace řešení y_j diferenční rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty, což jsme měli dokázat. ■