

Z-TRANSFORMACE

Příklady k procvičení

Obsah

1	<i>Z-transformace</i>	3
1.1	<u>Příklad</u>	3
1.2	<u>Příklad</u>	3
1.3	<u>Příklad</u>	3
2	Vlastnosti Z-transformace	4
2.1	Linearita	4
2.1.1	<u>Příklad</u>	4
2.2	Podobnost obrazu	4
3	Konvoluce předmětů	4
3.1	<u>Příklad</u>	4
4	Posloupnost $\{f_n\}_0^\infty$ posunutá o k vpravo	5
4.1	<u>Příklad</u>	5
5	Posloupnost $\{f_n\}_0^\infty$ posunutá o k vlevo	5
5.1	<u>Příklad</u>	5
6	Dopředné a zpětné difference	6
6.1	<u>Příklad</u>	6
6.2	<u>Příklad</u>	6

1 \mathcal{Z} -transformace

\mathcal{Z} -transformace zobrazuje posloupnost komplexních čísel $\{f_n\}$ na komplexní funkci komplexní proměnné $F(z)$.

Definice: Máme posloupnost komplexních čísel $\{f_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. *Dvoustrannou \mathcal{Z} -transformací* posloupnosti $\{f_n\}$ nazýváme komplexní funkci komplexní proměnné $F(z)$ definovanou Laurentovou řadou:

$$F(z) \stackrel{\text{ozn}}{=} \mathcal{Z}(\{f_n\}_{n=-\infty}^{\infty}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^{-n}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} z^n$$

Definice: Máme posloupnost komplexních čísel $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$. *Jednostrannou \mathcal{Z} -transformací* posloupnosti $\{f_n\}$ nazýváme komplexní funkci komplexní proměnné $F(z)$ definovanou:

$$F(z) \stackrel{\text{ozn}}{=} \mathcal{Z}(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{z^n}$$

1.1 Příklad

Určete \mathcal{Z} -transformaci posloupnosti $\{f_n\}_0^{\infty} = (a, 0, 0, \dots)$, tj. $f_0 = a$; $f_n = 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Řešení $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{z^n} = \frac{f_0}{z^0} + \frac{f_1}{z} + \frac{f_2}{z^2} + \dots = \frac{a}{1} + \frac{0}{z} + \frac{0}{z^2} + \dots = a.$

1.2 Příklad

Určete \mathcal{Z} -transformaci posloupnosti $\{f_n\}_0^{\infty} = (a, a, a, \dots)$, tj. $f_n = a$ pro $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Řešení $F(z) = \frac{a}{z^0} + \frac{a}{z^1} + \frac{a}{z^2} + \dots = \left[\begin{array}{l} \text{geometrická řada} \\ \text{s kvocientem } q = \frac{1}{z} \end{array} \right] = \frac{a}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{az}{z - 1} \text{ pro } |z| > 1.$

1.3 Příklad

Určete \mathcal{Z} -transformaci posloupnosti $\{f_n\}_0^{\infty}$; $f_n = e^{\sigma n}$; $n \in \mathbb{N}_0$; $\sigma \in \mathbb{C}$.

Řešení $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\sigma n}}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{\sigma}}{z}\right)^n = \left[\begin{array}{l} \text{geometrická řada} \\ \text{s kvocientem } q = \frac{e^{\sigma}}{z} \end{array} \right] = \frac{1}{1 - \frac{e^{\sigma}}{z}} = \frac{z}{z - e^{\sigma}};$

kde $\left| \frac{e^{\sigma}}{z} \right| < 1 \Rightarrow |z| > |e^{\sigma}|.$

2 Vlastnosti \mathcal{Z} -transformace

2.1 Linearita

Nechť $\mathcal{Z}(\{f_n\}_0^\infty) = F(z)$; $\mathcal{Z}(\{g_n\}_0^\infty) = G(z)$.

Potom $\mathcal{Z}(\{\alpha f_n + \beta g_n\}_0^\infty) = \alpha \mathcal{Z}(\{f_n\}_0^\infty) + \beta \mathcal{Z}(\{g_n\}_0^\infty) = \alpha F(z) + \beta G(z)$.

2.1.1 Příklad

Určete \mathcal{Z} -transformaci posloupnosti $\{f_n\}_0^\infty$; $f_n = \cos cn$, $c \in \mathbb{C}$.

Řešení Platí $\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x \Rightarrow \cos cn = \frac{e^{icn} + e^{-icn}}{2}$

$$\mathcal{Z}(\{e^{icn}\}_0^\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{icn}}{z^n} = \left[\begin{array}{l} \text{geometrická řada} \\ \text{s kvocientem } q = \frac{e^{ic}}{z} \end{array} \right] = \frac{1}{1 - \frac{e^{ic}}{z}} = \frac{z}{z - e^{ic}}, \quad |z| > |e^{ic}|,$$

$$\mathcal{Z}(\{e^{-icn}\}_0^\infty) = \frac{z}{z - e^{-ic}}, \quad |z| > |e^{-ic}|,$$

$$\mathcal{Z}(\{\cos cn\}_0^\infty) = \frac{\frac{z}{z - e^{ic}} + \frac{z}{z - e^{-ic}}}{2} = \frac{z(z - e^{-ic} + z - e^{ic})}{2(z - e^{ic}) \cdot (z - e^{-ic})} = \frac{z(z - \cos c)}{z^2 - 2z \cos c + 1},$$

$$|z| > \max\{|e^{ic}|, |e^{-ic}|\}.$$

2.2 Podobnost obrazu

Nechť $\mathcal{Z}(\{f_n\}_{n=0}^\infty) = F(z)$. Pak $\mathcal{Z}(\{a^n f_n\}_{n=0}^\infty) = F\left(\frac{z}{a}\right)$, $a \in \mathbb{C}$; $a \neq 0$.

Tlumení: $a = e^\alpha$

$$\mathcal{Z}(\{e^{\alpha n} f_n\}_{n=0}^\infty) = F(ze^{-\alpha}).$$

3 Konvoluce předmětů

$$\mathcal{Z}(\{(f * g)_n\}_{n=0}^\infty) = \mathcal{Z}\left(\left\{\sum_{i=0}^n f_i g_{n-i}\right\}_{n=0}^\infty\right) = \mathcal{Z}\left(\left\{\sum_{i=0}^n f_{n-i} g_i\right\}_{n=0}^\infty\right) = F(z) \cdot G(z),$$

kde $F(z)$ a $G(z)$ jsou obrazy posloupností $\{f_n\}_{n=0}^\infty$, $\{g_n\}_{n=0}^\infty$.

3.1 Příklad

Určete \mathcal{Z} -transformaci $\{f_n\}_{n=0}^\infty$; $f_n = 1 + e^c + \dots + e^{nc}$, $n \in \mathbb{N}_0$; $c \in \mathbb{C}$.

Řešení Zvolíme $\{a_n\}_{n=0}^\infty = \{e^{nc}\}_{n=0}^\infty$; $\{b_n\}_{n=0}^\infty = 1$.

$$\{(a * b)_n\}_{n=0}^\infty = \{f_n\}_{n=0}^\infty$$

$$\mathcal{Z}(\{f_n\}_{n=0}^\infty) = \mathcal{Z}(\{a_n\}) \cdot \mathcal{Z}(\{b_n\}) = \frac{1}{1 - \frac{e^c}{z}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z^2}{(z - e^c)(z - 1)}$$

$$|z| > \max\{|e^c|, 1\}.$$

4 Posloupnost $\{f_n\}_0^\infty$ posunutá o k vpravo

Je-li posloupnost:

$$\begin{aligned} \{f_{n-k}\}_{n=0}^\infty &= \{0, 0, \dots, 0, f_0, f_1, \dots\} \\ n &= \{0, 1, \dots, k-1, k, k+1, \dots\} \end{aligned}$$

(tj. prvních k členů posloupnosti je nulových)

Platí: $\mathcal{Z}(\{f_{n-k}\}_{n=0}^\infty) = z^{-k}F(z)$, kde $F(z)$ je obraz $\{f_n\}_{n=0}^\infty$.

4.1 Příklad

Nalezněte \mathcal{Z} -transformaci posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^\infty$, kde $f_n = 0$ pro $n = 0, 1, \dots, k-1$; $f_n = e^{c(n-k)}$ pro $n \geq k$, $n \in N$.

Řešení Posloupnost $\{f_n\}$ dostaneme posunutím posloupnosti $\{g_n\}$, $g_n = e^{cn}$; $n \in N$ o k vpravo.

$$\mathcal{Z}(\{g_n\}_{n=0}^\infty) = \frac{z}{z - e^c} = G(z); |z| > e^c \Rightarrow \mathcal{Z}(\{f_n\}_{n=0}^\infty) = \mathcal{Z}(\{g_{n-k}\}_{n=0}^\infty) = \frac{1}{z^k} \cdot \frac{z}{z - e^c}; |z| > e^c.$$

Nebo přímým výpočtem:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\{f_n\}_{n=0}^\infty) &= \sum_{n=0}^\infty \frac{f_n}{z^n} = \left[\begin{array}{l} \text{prvních } k \text{ členů} \\ \text{je rovno nule} \end{array} \right] = \sum_{n=k}^\infty \frac{e^{c(n-k)}}{z^n} = \left[\begin{array}{l} l = n - k \\ n = l + k \end{array} \right] = \sum_{l=0}^\infty \frac{e^{cl}}{z^{l+k}} = \\ \frac{1}{z^k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{e^c}{z}} &= \frac{z}{z^k(z - e^c)}; |z| > e^c. \end{aligned}$$

5 Posloupnost $\{f_n\}_0^\infty$ posunutá o k vlevo

Je posloupnost $\{f_{n+k}\}_{n=0}^\infty = \{f_k, f_{k+1}, f_{k+2}, \dots\}$

$$\text{Platí: } \mathcal{Z}(\{f_{n+k}\}_{n=0}^\infty) = z^k \left[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f_n}{z^n} \right]$$

5.1 Příklad

Nalezněte obraz $\{f_n\}_{n=0}^\infty$; $f_n = e^{c(n+k)}$, $n \in N_0$

Řešení Posloupnost $\{f_n\}_0^\infty$ dostaneme posunutím posloupnosti $\{g_n\}_0^\infty$; $g_n = e^{cn}$; o k vlevo.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\{f_n\}_{n=0}^\infty) &= \mathcal{Z}(\{g_{n+k}\}_{n=0}^\infty) = z^k \left[G(z) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{e^{cn}}{z^n} \right] = z^k \left[\frac{z}{z - e^c} - \frac{1 - \left(\frac{e^c}{z}\right)^k}{1 - \frac{e^c}{z}} \right] = \\ \frac{z^{k+1}}{z - e^c} - \frac{z^k - e^{kc}}{z - e^c} \cdot z &= \frac{ze^{kc}}{z - e^c} \end{aligned}$$

Nebo přímý výpočet:

$$\mathcal{Z}(\{f_n\}_{n=0}^\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{c(n+k)}}{z^n} = e^{ck} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{cn}}{z^n} = e^{ck} \cdot \frac{z}{z - e^c}; \quad |z| > |e^c|.$$

6 Dopředné a zpětné difference

1. Dopřednou diferencí posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ je posloupnost $\{\Delta f_n\}_{n=0}^\infty = \{f_{n+1} - f_n\}_{n=0}^\infty$.
2. Dopředná difference k -tého řádu je posloupnost $\{\Delta^k f_n\}_{n=0}^\infty = \{\Delta(\Delta^{k-1} f_n)\}_{n=0}^\infty$.

6.1 Příklad

Určete dopřednou diferencí I. a III. řádu pro posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^\infty = \{0, 1, 1, -1, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots\}$.

Řešení

$$\begin{aligned} \{\Delta f_n\}_{n=0}^\infty &= \{1, 0, -2, 2, -1, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots\} \\ \{\Delta^2 f_n\}_{n=0}^\infty &= \{-1, -2, 4, -3, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots\} \\ \{\Delta^3 f_n\}_{n=0}^\infty &= \{-1, 6, -7, 4, -1, 0, 0, \dots, 0, \dots\} \end{aligned}$$

3. Zpětná difference posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ je posloupnost $\{\nabla f_n\}_{n=0}^\infty = \{f_n - f_{n+1}\}_{n=0}^\infty$.
4. Zpětná difference k -tého řádu je posloupnost $\{\nabla^k f_n\}_{n=0}^\infty = \{\nabla(\nabla^{k-1} f_n)\}_{n=0}^\infty$.

6.2 Příklad

Určete zpětnou diferencí I. a III. řádu pro posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^\infty = \{0, 1, 1, -1, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots\}$.

Řešení

$$\begin{aligned} \{\nabla f_n\}_{n=0}^\infty &= \{0, 1, 0, -2, 2, -1, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots\} \\ \{\nabla^2 f_n\}_{n=0}^\infty &= \{0, 1, -1, -2, 4, -3, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots\} \\ \{\nabla^3 f_n\}_{n=0}^\infty &= \{0, 1, -2, -1, 6, -7, 4, -1, 0, 0, \dots, 0, \dots\} \end{aligned}$$