ÚVOD DO FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY

Jiří Bouchala

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Jiří Bouchala
Úvod do funkcionální analýzy

ISBN

Předmluva

Tyto stránky jsou (pořád ještě) pracovní verzí vznikajícího učebního textu. Budu čtenářům vděčný za shovívavost a sdělení všech připomínek.[1]

Výslednou podobu těchto skript ovlivnili mnozí z mých učitelů, kolegů i studentů. Všem jsem jim upřímně vděčný. Speciálně chci poděkovat svému synovi Ondřejovi, který mi pomohl s přepsáním rukopisu, a svému příteli Mgr. Petrovi Vodstrčilovi, Ph.D., který celý text pečlivě přečetl a svými připomínkami ho pomohl vylepšit.

Další v rámci projektu *Matematika pro inženýry 21. století* připravované výukové materiály lze najít na stránkách http://mi21.vsb.cz/. Podívejte se na ně!

V Orlové, 2011 Jiří Bouchala

[1]Všechny připomínky (výhrady, komentáře, doporučení, výhružky a dary) zasílejte (prosím) na moji e-mailovou adresu: jiri.bouchala@vsb.cz

Obsah

PROSTORY (nad $\mathbb{R}$)

Kapitola 1

Vektorový (lineární) prostor

1.1 Definice. Vektorovým prostorem nazýváme každou `neprázdnou` množinu X, na níž jsou definovány operace

$$+: \ X \times X \to X,$$

$$\cdot: \ \mathbb{R} \times X \to X$$

splňující následující podmínky:

(1) $\forall x, y \in X: \ x + y = y + x$ (komutativita),

(2) $\forall x, y, z \in X: \ (x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativita vzhledem k „+“),

(3) $(\exists 0 \in X)\,(\forall x \in X): \ x + 0 = x$ (0 ... nulový prvek),

(4) $(\forall x \in X)\,(\exists (-x) \in X): \ x + (-x) = 0$ ($(-x)$ ... prvek opačný k x),

(5) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})\,(\forall x \in X): \ \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (asociativita vzhledem k „·“),

(6) $\forall x \in X: \ 1 \cdot x = x$,

(7) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})\,(\forall x, y \in X): \ \begin{array}{l} \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \\ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \end{array}$ (distributivita).

1.2 Cvičení. Dokažte, že v každém vektorovém prostoru X platí:[1]

i) $(\exists! 0 \in X)\,(\forall x \in X): \ x + 0 = x$,

ii) $(\forall x \in X)\,(\exists! (-x) \in X): \ x + (-x) = 0$,

iii) $\forall x \in X: \ 0 \cdot x = 0$,

$\forall \alpha \in \mathbb{R}: \ \alpha \cdot 0 = 0$,

iv) $\forall x \in X: \ (-1) \cdot x = (-x)$,

[1] Píšeme nepříliš přesně *vektorový prostor* X místo přesnějšího *vektorový prostor* $(X, +, \cdot)$.

v) $\forall x, y, z \in X: \ [x + y = x + z \Rightarrow y = z]$,

vi) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\forall x, y \in X): \ \big[(\alpha x = \alpha y \ \wedge \ \alpha \neq 0) \ \Rightarrow \ x = y\big]$,

vii) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})\,(\forall x \in X): \ \big[(\alpha x = \beta x \ \wedge \ x \neq 0) \ \Rightarrow \ \alpha = \beta\big]$.

Označení: $(-x) =: -x; \quad x + (-y) =: x - y$.

1.3 Příklady.

1) $X = \{1\}$,

$$1 + 1 := 1, \ \alpha \cdot 1 := 1 \ (\alpha \in \mathbb{R})$$

(X … tzv. triviální vektorový prostor – obsahuje jediný (nulový) prvek).

2) $X = \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$,

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \ \alpha x := (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

pro $x = (x_1, \ldots, x_n), \ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n; \ \alpha \in \mathbb{R}$.

3) $X = C(\langle 0, 1\rangle) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad f \text{ je spojitá na } Df = \langle 0, 1\rangle\}$,

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \ (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

pro $f, g \in C(\langle 0, 1\rangle); \ \alpha \in \mathbb{R}$.

4) $X = l^p$ $(p \geqq 1)$ … množina všech reálných posloupností (x_n) takových, že $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$,[1]

$$x + y := (x_n + y_n), \ \alpha x := (\alpha x_n)$$

pro $x = (x_n), \ y = (y_n) \in l^p; \ \alpha \in \mathbb{R}$.

Poznámka a hezké cvičení: rozmyslete si, že platí

$$(\forall a, b \in \mathbb{R})\,(\forall p > 0): \ |a + b|^p \leqq 2^p\,(|a|^p + |b|^p),$$

a proto

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \leqq 2^p\,\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\Big) < \infty.$$

[1] Definujeme $0^p := 0$.

5) $X = l^\infty \dots$ množina všech reálných posloupností (x_n) takových, že $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty$,

$$x + y := (x_n + y_n),\ \alpha x := (\alpha x_n)$$

pro $x = (x_n),\ y = (y_n) \in l^\infty;\ \alpha \in \mathbb{R}$.

1.4 Cvičení. Najděte vektorový prostor o 2, 3 a 4 prvcích.

1.5 Definice. Buď X vektorový prostor a buď $Y \subset X$. Pokud je Y vzhledem k operacím „+“ a „·“ definovaným na X vektorovým prostorem, nazýváme Y vektorovým podprostorem X.

1.6 Cvičení. Dokažte, že v každém vektorovém prostoru X platí:

$\emptyset \neq Y \subset X$ je vektorovým podprostorem X právě tehdy, platí-li

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\forall x, y \in Y):\ x + y \in Y,\ \alpha x \in Y.$$

1.7 Příklady.

1) $Y_1 := \{f \in C(\langle 0, 1\rangle):\ f(0) = 0\}$ `je` vektorovým podprostorem $C(\langle 0, 1\rangle)$,

2) $Y_2 := \{f \in C(\langle 0, 1\rangle): f(0) = 1\}$ `není` vektorovým podprostorem $C(\langle 0, 1\rangle)$.

1.8 Definice. Buď X vektorový prostor.

- Řekneme, že prvky (vektory) $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ jsou lineárně nezávislé, jestliže

  $$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}:\ \left[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0\ \Rightarrow\ \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0\right].$$ [a]

  (V opačném případě nazýváme prvky $x_1, x_2, \dots, x_n$ lineárně závislé.)

- Řekneme, že množina $M \subset X$ je lineárně nezávislá, jestliže každá její konečná podmnožina je tvořena lineárně nezávislými prvky.

[a] Tzn. jestliže z rovnosti

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

(kde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$) plyne, že

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

1.9 Definice. Dimenzí vektorového prostoru X rozumíme číslo

$$\dim X := \begin{cases} 0, \text{ je-li } X \text{ triviální vektorový prostor,} \\ n \in \mathbb{N}, \text{ je-li } n \text{ maximální počet lineárně nezávislých prvků v } X, \\ \infty, \text{ existuje-li pro každé } m \in \mathbb{N}\ m \text{ lineárně nezávislých prvků v } X. \end{cases}$$

1.10 Cvičení. Určete dimenzi těchto vektorových prostorů:

1) $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$,
2) $C(\langle 0, 1\rangle)$,
3) l^p $(p \geqq 1)$,
4) $Y_1 := \{f \in C(\langle 0, 1\rangle) :\ f(0) = 0\}$,
5) $Y := \{f \in C(\langle 0, 1\rangle) :\ f'' \in C(\langle 0, 1\rangle)\ \wedge\ f'' + f = 0\}$,
6) $Y_1 \cap Y$,
7) $\{f \in Y :\ f(0) = f(1) = 0\}$.

1.11 Definice. Buď X vektorový prostor a $\emptyset \neq M \subset X$.
Množinu

$$\operatorname{Lin} M := \{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n :\ n \in \mathbb{N};\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R};\ x_1, \ldots, x_n \in M\}$$

nazýváme lineárním obalem množiny M. Navíc definujeme

$$\operatorname{Lin} \emptyset := \{0\} \subset X.$$

1.12 Cvičení. Dokažte (za situace z předchozí definice), že

i) *Lin M je vektorovým podprostorem X,*
ii) *Lin M je průnikem všech vektorových podprostorů X obsahujících M (tj. Lin M je nejmenším vektorovým podprostorem X obsahujícím M).*

1.13 Definice. Buď X vektorový prostor. Řekneme, že `(konečná!)` množina

$$M = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$$

je bází vektorového prostoru X, platí-li současně:

(1) množina M je lineárně nezávislá,
(2) $\operatorname{Lin} M = X$.

1.14 Cvičení. Buď X vektorový prostor a $n \in \mathbb{N}$.
Dokažte, že platí:

$$\boxed{X \textit{ má bázi o } n \textit{ prvcích} \ \Leftrightarrow\ \dim X = n.}$$

Kapitola 2

Metrický prostor

2.1 Definice. Metrickým prostorem nazýváme každou `neprázdnou` množinu X, na níž je definováno zobrazení (tzv. metrika)

$$\varrho : \ X \times X \to \mathbb{R}$$

splňující podmínky:

(1) $\forall x, y \in X : \ \varrho(x,y) \geqq 0, \ \varrho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (... nezápornost);

(2) $\forall x, y \in X : \ \varrho(x,y) = \varrho(y,x)$ (... symetrie);

(3) $\forall x, y, z \in X : \ \varrho(x,y) + \varrho(y,z) \geqq \varrho(x,z)$ (... trojúhelníková nerovnost).

2.2 Příklady.

1) $X = \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$,

$$\varrho(x,y) := \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2} \text{ (... eukleidovská metrika)}$$

pro $x = (x_1, \ldots, x_n), \ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

2) $X = \mathbb{R}^n$,

$$\varrho(x,y) := \max\{|y_1 - x_1|, \ldots, |y_n - x_n|\} \text{ (... maximová metrika).}$$

3) $X = \mathbb{R}^n$,

$$\varrho(x,y) := |y_1 - x_1| + \ldots + |y_n - x_n| \text{ (... součtová metrika).}$$

4) $X = \mathbb{R}^n$,

$$\varrho(x,y) := \begin{cases} \sqrt{(y_1-x_1)^2+\ldots+(y_n-x_n)^2}, & \text{existuje-li } \lambda \in \mathbb{R} \text{ takové, že} \\ & x = \lambda y := (\lambda y_1, ..., \lambda y_n) \\ & \text{nebo } y = \lambda x := (\lambda x_1, ..., \lambda x_n), \\ \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2} + \sqrt{y_1^2+\ldots+y_n^2} & \text{v ostatních případech} \end{cases}$$

(... „pampelišková“ metrika).

5) $\emptyset \neq X$ ... libovolná množina,

$$\varrho(x,y) := \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y \end{cases}$$

(... diskrétní metrika).

6) $X = C(\langle 0,1 \rangle)$,

$$\varrho(x,y) := \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} |x(t)-y(t)| = \max_{t\in\langle 0,1\rangle} |x(t)-y(t)| \quad (\text{... supremová metrika})$$

pro $x, y \in C(\langle 0,1 \rangle)$.

7) $X = C(\langle 0,1 \rangle)$,

$$\varrho(x,y) := \sqrt{\int_0^1 (x(t)-y(t))^2 \, \mathrm{d}t} \quad (\text{... } L^2 \text{ metrika}).$$

2.3 Definice. Buď (x_n) posloupnost v metrickém prostoru X a buď $x \in X$. Řekneme, že posloupnost (x_n) má limitu x a píšeme $x_n \to x$, platí-li

$$\varrho(x_n, x) \to 0.$$

2.4 Věta (nutná podmínka konvergence).
Nechť (x_n) je konvergentní posloupnost v metrickém prostoru X (tzn. že existuje $x \in X$, pro které $x_n \to x$). Potom platí tzv. Bolzanova – Cauchyho podmínka:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n, m \in \mathbb{N};\ n, m \geqq n_0) :\ \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Důkaz je vhodným cvičením.

2.5 Definice. Posloupnost (x_n) (v metrickém prostoru X), pro niž platí Bolzanova – Cauchyho podmínka, se nazývá cauchyovská.

2.6 Definice. Metrický prostor X se nazývá úplný, je-li v něm každá cauchyovská posloupnost konvergentní.

2.7 Cvičení. Pokuste se dokázat následující tvrzení.

1) $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) s eukleidovskou metrikou je úplný metrický prostor.

2) Prostor $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ s metrikou $\varrho(x, y) := |x - y|$ není úplný.
(Posloupnost $\left(\frac{1}{n}\right)$ je cauchyovská, ale nemá v $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ limitu.)

3) $C(\langle 0, 1\rangle)$ se supremovou metrikou je úplný metrický prostor.

4) $C(\langle 0, 1\rangle)$ s L^2 metrikou není úplný.
(Posloupnost (f_n), kde

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 \text{ pro } x \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle, \\ 1 + n - 2nx \ \text{ pro } x \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}), \\ 0 \text{ pro } x \in \langle \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, 1\rangle, \end{cases}$$

je cauchyovská, ale nemá v $C(\langle 0, 1\rangle)$ limitu.[1])

2.8 Cvičení. Definujme pro každé $n \in \mathbb{N}$ funkce f_n a g_n na $\langle 0, 1\rangle$ předpisy:

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - 2nx, \ x \in \langle 0, \frac{1}{2n}\rangle, \\ 0, \ x \in (\frac{1}{2n}, 1\rangle, \end{cases} \qquad g_n(x) := \frac{x(x - 2n)}{1 - 2n}.$$

Zjistěte, zda je posloupnost (f_n), resp. (g_n), cauchyovská a zda má limitu v prostoru

1) $C(\langle 0, 1\rangle)$ se supremovou metrikou,
2) $C(\langle 0, 1\rangle)$ s L^2 metrikou.

[1] Nakreslete si obrázek s grafy funkcí $f_1,\ f_2,\ \dots$.

2.9 Definice. Buď X metrický prostor s metrikou ϱ, $x \in X$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Množinu

$$U(x, \varepsilon) := \{y \in X : \ \varrho(x, y) < \varepsilon\}$$

nazýváme ε-okolím bodu x.
(Nezáleží-li nám na „poloměru“ ε, píšeme krátce $U(x)$ a mluvíme o okolí bodu x.)

2.10 Definice. Buď X metrický prostor a $M \subset X$. Bod $x \in X$ nazveme

- vnitřním bodem M, existuje-li okolí $U(x)$ takové, že $U(x) \subset M$;
- vnějším bodem M, existuje-li okolí $U(x)$ takové, že $U(x) \cap M = \emptyset$;
- hraničním bodem M, není-li ani vnitřním ani vnějším bodem M;
- izolovaným bodem M, existuje-li okolí $U(x)$ takové, že $U(x) \cap M = \{x\}$;
- hromadným bodem M, jestliže v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho bodů množiny M.

Navíc značme:

- $\operatorname{int} M$ ... množinu všech vnitřních bodů M (tzv. vnitřek M);
- $\operatorname{ext} M$ ... množinu všech vnějších bodů M (tzv. vnějšek M);
- ∂M ... množinu všech hraničních bodů M (tzv. hranice M);
- $\overline{M} := M \cup \partial M$ ... tzv. uzávěr M.

2.11 Definice. Množinu $M \subset X$, kde X je metrický prostor, nazveme

- otevřenou (v X), jestliže $M = \operatorname{int} M$;
- uzavřenou (v X), je-li její doplněk, tj. množina $X \setminus M$, otevřená množina.

2.12 Cvičení. Buď $M \subset X$. Dokažte následující tvrzení:

i)

$$M \text{ je otevřená množina} \ \Leftrightarrow \ \Big[(\forall x \in M)\,(\exists U(x)) : \ U(x) \subset M\Big] \ \Leftrightarrow \ M \cap \partial M = \emptyset;$$

ii)

$$M \text{ je uzavřená množina} \ \Leftrightarrow \ M = \overline{M} \ \Leftrightarrow \ \partial M \subset M \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \Big[\Big((\forall n \in \mathbb{N} : \ x_n \in M) \ \wedge \ (x_n \to x \in X)\Big) \ \Rightarrow \ x \in M\Big];$$

iii)

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{M \subset K \subset X \\ K \text{ je uzavřená}}} K = \{x \in X : \text{ exist. posl. } (x_n) \text{ v } M \text{ taková, že } x_n \to x\};$$

iv)

$$x \in X \text{ je hromadným bodem } M \Leftrightarrow \text{ exist. posl. } (x_n) \text{ v } M \setminus \{x\} \text{ taková, že } x_n \to x.$$

2.13 Cvičení. Dokažte, že v každém metrickém prostoru X platí následující tvrzení týkající se otevřených množin:

- $\emptyset$ a X jsou otevřené množiny,
- (`libovolné`) sjednocení otevřených množin je otevřená množina,
- průnik `konečně mnoha` otevřených množin je otevřená množina;

i „symetrická“ tvrzení týkající se množin uzavřených:

- $\emptyset$ a X jsou uzavřené množiny,
- (`libovolný`) průnik uzavřených množin je uzavřená množina,
- sjednocení `konečně mnoha` uzavřených množin je uzavřená množina.

2.14 Definice. Buď X metrický prostor s metrikou ϱ. Řekneme, že operátor (zobrazení)

$$T : X \to X$$

je kontraktivní na X, existuje-li $q \in \langle 0, 1)$ takové, že

$$\forall x, y \in X : \ \varrho\big(T(x), T(y)\big) \leqq q\varrho(x, y).$$

2.15 Věta (Banachova o pevném bodě).
Buď

- X ***úplný*** *metrický prostor,*
- $T \colon X \to X$ ***kontraktivní.***

Potom

$$\exists!\ x \in X : \ T(x) = x.$$

(Prvek $x \in X$, pro který platí $T(x) = x$, nazýváme pevným bodem zobrazení T.)

Důkaz.

1) Existence. Nejdříve zvolme (a to libovolně) $x_0 \in X$ a definujme rekurentně posloupnost (x_n) v X:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ x_n := T(x_{n-1}) \overset{\text{ozn.}}{=} Tx_{n-1}.$$

Protože T je `kontraktivní`, platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, že

$$\varrho(x_n, x_{n-1}) = \varrho(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) \leqq q\varrho(x_{n-1}, x_{n-2}) = q\varrho(Tx_{n-2}, Tx_{n-3}) \leqq$$
$$\leqq q^2\varrho(x_{n-2}, x_{n-3}) \leqq \ldots \leqq q^{n-1}\varrho(x_1, x_0).$$

Pomocí těchto odhadů (a trojúhelníkové nerovnosti) snadno ověříme, že pro každé $n, m \in \mathbb{N},\ n > m$, je

$$\varrho(x_n, x_m) \leqq \varrho(x_n, x_{n-1}) + \varrho(x_{n-1}, x_{n-2}) + \ldots + \varrho(x_{m+1}, x_m) \leqq$$
$$\leqq (q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^m)\, \varrho(x_1, x_0) \leqq$$
$$\leqq (q^m + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1} + \ldots)\, \varrho(x_1, x_0) = \frac{q^m}{1-q}\, \varrho(x_1, x_0).$$

Odtud, protože

$$\frac{q^m}{1-q}\, \varrho(x_1, x_0) \to 0 \text{ pro } m \to \infty,$$

vyplývá, že posloupnost (x_n) je cauchyovská. Existuje proto (X je `úplný` metrický prostor) $x \in X$ takové, že $x_n \to x$. Skutečnost, že x je hledaným pevným bodem T, tj. že $Tx = x$, je přímým důsledkem pozorování:

- $0 \leqq \varrho(Tx_n, Tx) \leqq q\,\underbrace{\varrho(x_n, x)}_{\to 0} \to 0 \ \Rightarrow\ \underline{Tx_n \to Tx}$;
- $x_n \to x \ \Rightarrow\ x_{n+1} = \underline{Tx_n \to x}$.

2) Jednoznačnost. Předpokládejme, že pro $x, y \in X$ je

$$x = Tx,\ y = Ty.$$

Pak, protože T je kontraktivní, platí

$$\varrho(x, y) = \varrho(Tx, Ty) \leqq q\varrho(x, y),$$

kde $q \in \langle 0, 1)$, a proto $\varrho(x, y) = 0$, neboli

$$x = y.$$

$\square$

2.16 Pozorování. Všimněme si, že uvedený důkaz obsahuje návod (mluvíme někdy o metodě prosté iterace), jak pevný bod najít, a udává i chybu, jíž se při jeho aproximaci dopouštíme:

- zvolíme libovolně bod $x_0 \in X$ (tzv. nultou aproximaci),
- sestrojíme posloupnost (x_n):

$$x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_1,\ x_3 = Tx_2, \dots, x_n = Tx_{n-1},\ \dots\ .$$

Pak (x_n) konverguje k hledanému pevnému bodu x a platí:[1]

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ \varrho(x_n, x) \leqq \frac{q^n}{1-q}\,\varrho(x_1, x_0).$$

2.17 Příklad. Uvažujme okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -u''(x) + g\big(u(x)\big) = f(x) \text{ pro } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

kde $f \in C(\langle 0,1\rangle)$ a funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je lipschitzovsky spojitá na $\mathbb{R}$, tzn. že

$$(\exists q \geqq 0)\,(\forall t, s \in \mathbb{R}) :\ |g(t) - g(s)| \leqq q|t - s|.$$

Buď nyní $v \in C(\langle 0,1\rangle)$ libovolná (pevně zvolená) funkce a hledejme funkci $u \in C^2(\langle 0,1\rangle)$, která řeší lineární okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) - g\big(v(x)\big) \text{ pro } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Snadno(?) se lze přesvědčit,[2] že jediným řešením je funkce

$$u(x) := \int_0^1 K(x,t)\Big(f(t) - g\big(v(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t, \tag{2.3}$$

kde

$$K(x,t) := \begin{cases} (1-x)t \text{ pro } 0 \leqq t \leqq x \leqq 1, \\ x(1-t) \text{ pro } 0 \leqq x < t \leqq 1. \end{cases}$$

Definujeme nyní operátor

$$T : C(\langle 0,1\rangle) \to C(\langle 0,1\rangle)$$

[1] Rozmyslete si podrobně proč!
[2] Udělejte to!

předpisem

$$(Tv)(x) := \int_0^1 K(x,t)\Big(f(t) - g\big(v(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t, \tag{2.4}$$

tzn. (viz (2.2), (2.3) a (2.4)) že

$$\begin{cases} -(Tv)''(x) = f(x) - g\big(v(x)\big) \text{ pro } x \in (0,1), \\ (Tv)(0) = (Tv)(1) = 0. \end{cases}$$

Najít řešení naší úlohy (2.1) tedy znamená najít pevný bod operátoru T, tj. funkci $u \in C(\langle 0,1\rangle)$ takovou, že $Tu = u$.

Už víme, že $C(\langle 0,1\rangle)$ se supremovou metrikou je **úplný** metrický prostor. Najdeme-li podmínky, za nichž je operátor T **kontraktivní**, najdeme podmínky zaručující existenci právě jednoho řešení úlohy (2.1) (viz Banachovu větu o pevném bodě 2.15).

Potřebujeme odhadnout

$$\varrho(Tu,Tv) = \sup_{x\in\langle 0,1\rangle} |(Tu)(x) - (Tv)(x)|.$$

Protože pro každé $x \in \langle 0,1\rangle$ platí

$$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| = \left|\int_0^1 K(x,t)\Big(g\big(v(t)\big) - g\big(u(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t\right| \leqq$$

$$\leqq \int_0^1 \underbrace{|K(x,t)|}_{\leqq 1} \cdot \underbrace{\big|g\big(v(t)\big) - g\big(u(t)\big)\big|}_{\leqq q\,|v(t)-u(t)|}\,\mathrm{d}t \leqq q\int_0^1 |v(t) - u(t)|\,\mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq q\int_0^1 \sup_{x\in\langle 0,1\rangle} |v(x) - u(x)|\,\mathrm{d}t = q\,\varrho(v,u),$$

je

$$\varrho(Tu,Tv) \leqq q\varrho(u,v).$$

Zjistili jsme: je-li konstanta q charakterizující lipchitzovskou spojitost funkce g menší než 1, je T **kontraktivní** operátor, a proto existuje právě jedno řešení okrajové úlohy (2.1).

Závěr – podařilo se nám dokázat následující tvrzení:

Je-li

- *g lipschitzovsky spojitá na $\mathbb{R}$ s konstantou $q \in \langle 0,1)$,*
- *$f \in C(\langle 0,1\rangle)$,*

existuje v $C(\langle 0,1\rangle)$ *právě jedno řešení úlohy*

$$\begin{cases} -u''(x) + g\big(u(x)\big) = f(x) \ \textit{pro}\ x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Ukažme si konstrukci posloupnosti postupných aproximací (viz metodu prosté iterace 2.16):

- $u_0 \in C(\langle 0,1\rangle)$ ... libovolná funkce,
- $u_1 = Tu_0$ ... řešení `lineární` úlohy

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) - g\big(u_0(x)\big) \ \text{v}\ (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

- $u_2 = Tu_1$ ... řešení `lineární` úlohy

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) - g\big(u_1(x)\big) \ \text{v}\ (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

$$\vdots$$

- $u_{n+1} = Tu_n$ ... řešení `lineární` úlohy

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) - g\big(u_n(x)\big) \ \text{v}\ (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

$$\vdots$$

Vlastně místo řešení `nelineární` okrajové úlohy (2.1) hledáme posloupnost řešení `lineárních` okrajových úloh typu

$$\begin{cases} -u''(x) = F(x) \ \text{v}\ (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

2.18 Příklad. Dokažme pomocí Banachovy věty o pevném bodě
Picardovu – Lindelöfovu větu:

Buď

- $f,\ \frac{\partial f}{\partial y} :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *spojité na množině*

  $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x - x_0| \leqq a\ \wedge\ |y - y_0| \leqq b\},$$

  kde $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$*;* $a, b \in \mathbb{R}^+$*;*

- $M = \max\limits_{(x,y)\in D} |f(x, y)|,\ L = \max\limits_{(x,y)\in D} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right|$*;*

- $h \in \mathbb{R}^+$ *takové, že* $h \leqq a,\ hM \leqq b,\ hL < 1$*.*

Pak existuje právě jedno řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

na intervalu $(x_0 - h,\ x_0 + h)$*.*

Důkaz. Předně si uvědomme, že daná Cauchyova úloha je ekvivalentní s integrální rovnicí

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t.$$

Nyní uvažujme metrický prostor $C\big(\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle\big)$ se supremovou metrikou

$$\varrho(y_1, y_2) := \sup_{x\in\langle x_0-h,\ x_0+h\rangle} |y_1(x) - y_2(x)|$$

a definujme

$$X = \big\{y \in C\big(\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle\big) :\ |y(x) - y_0| \leqq b \text{ pro každé } x \in \langle x_0 - h, x_0 + h\rangle\big\}.$$

Prostor X s indukovanou metrikou

$$\varrho = \varrho_{|X}$$

je zřejmě `úplný metrický prostor` $\big($$X$ je uzavřenou podmnožinou úplného metrického prostoru $C\big(\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle\big)\big)$.

Teď definujme operátor

$$T : X \to C\big(\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle\big)$$

předpisem

$$(Ty)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t.$$

Zbývá dokázat (viz Banachovu větu o pevném bodě 2.15), že

(i) $\forall y \in X: \; Ty \in X$ (tj. $\underline{T : X \to X}$),

(ii) $T : X \to X$ je kontraktivní.

Ad (i). Buď $y \in X$. Pak pro každé $x \in \langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$ platí

$$|(Ty)(x) - y_0| \leqq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))| \, \mathrm{d}t \right| \leqq M|x - x_0| \leqq Mh \leqq b,$$

a proto $Ty \in X$.

Ad (ii). $(\forall y_1, y_2 \in X)\, (\forall x \in \langle x_0 - h, x_0 + h\rangle) :$

$$|(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) \, \mathrm{d}t \right| \leqq$$
$$\leqq \left| \int_{x_0}^{x} L\, |y_1(t) - y_2(t)| \, \mathrm{d}t \right| \leqq L\, h\, \varrho(y_1, y_2),$$

a proto
$$\varrho(Ty_1, Ty_2) \leqq q\, \varrho(y_1, y_2),$$
kde $q := h\, L < 1$. □

2.19 Varovné příklady. Uvažujme $\mathbb{R}$ s eukleidovskou metrikou $\varrho(x, y) := |x - y|$ a rozmysleme si podrobně následující tvrzení.

1) Pro funkci $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem
$$T(x) := x + 1$$
platí
$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \; \varrho(Tx, Ty) = |x - y| = 1 \cdot \varrho(x, y),$$
ale T `nemá pevný bod` (tj. neexistuje $x \in \mathbb{R}$ takové, aby $T(x) = x$).

2) Pro funkci $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem
$$T(x) := \begin{cases} 1, \; x \leqq 0, \\ x + \mathrm{e}^{-x}, \; x > 0, \end{cases}$$
platí
$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \; \varrho(Tx, Ty) = |Tx - Ty| < |x - y| = \varrho(x, y),$$
a přesto `neexistuje pevný bod` funkce T.

2.20 Cvičení. Ukažte, že z Banachovy věty 2.15 o pevném bodě plyne tvrzení:

$$\left.\begin{array}{c} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \\ (\exists q<1)\,(\forall x\in\mathbb{R}):\ |f'(x)|\leqq q \end{array}\right\}\Rightarrow \exists! x\in\mathbb{R}:\ f(x)=x.$$

(Dokažte tvrzení i přímo – bez Banachovy věty.)

2.21 Cvičení. Dokažte tuto speciální verzi Brouwerovy věty o pevném bodě:

$$\left.\begin{array}{c} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \textit{ je spojitá na intervalu } \langle a,b\rangle, \\ \forall x\in\langle a,b\rangle:\ f(x)\in\langle a,b\rangle, \\ (a,b\in\mathbb{R},\ a<b) \end{array}\right\}\Rightarrow \exists x\in\langle a,b\rangle:\ f(x)=x$$

a všimněte si, že důsledkem je tvrzení:

$$\left.\begin{array}{c} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \\ \forall x\in\langle a,b\rangle:\ f(x)\in\langle a,b\rangle, \\ \forall x,y\in\langle a,b\rangle:\ |f(x)-f(y)|\leqq|x-y|, \\ (a,b\in\mathbb{R},\ a<b) \end{array}\right\}\Rightarrow \exists x\in\langle a,b\rangle:\ f(x)=x,$$

a porovnejte ho s příkladem 2.19.

2.22 Věta (Cantorova).
Nechť

- *X je **úplný** metrický prostor,*
- *(M_n) je nerostoucí posloupnost neprázdných uzavřených množin v X, tzn.*

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \emptyset\neq M_{n+1}\subset M_n=\overline{M_n}\subset X,$$

- $\operatorname{diam} M_n := \sup\limits_{x,y\in M_n} \varrho(x,y)\to 0.$

Potom $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ *je jednobodový, tzn.*

$$\exists x\in X:\ \{x\}=\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Důkaz Cantorovy věty ponechme jako užitečné cvičení čtenářům.
(Nápověda: *zvolte pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *libovolně* $x_n \in M_n$ *a ukažte, že posloupnost* (x_n) *je cauchyovská (a proto konvergentní) v* X *a že její limita* $x \in X$ *je právě oním hledaným jediným prvkem průniku* $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$*.*)

2.23 Definice. Buď X metrický prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je

- řídká, je-li $\operatorname{int} \overline{M} = \emptyset$;
- 1. kategorie, je-li sjednocením spočetně mnoha řídkých množin, tzn.

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\,, \text{ kde pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ je } \operatorname{int} \overline{M_n} = \emptyset;$$

- 2. kategorie, jestliže není 1. kategorie.

2.24 Příklady. Uvažujme metrický prostor $\mathbb{R}$ s metrikou

$$\varrho(x,y) := |x-y|.$$

Pak

1) každá konečná podmnožina $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ je řídká,
2) množina $\mathbb{N}$ je řídká,
3) množina $\mathbb{Q}$ není řídká,
4) každá (nejvýše) spočetná podmnožina $\mathbb{R}$ je 1. kategorie (speciálně $\mathbb{Q}$ je 1. kategorie).

2.25 Věta (Baireova). *Nechť* X *je* ***úplný*** *metrický prostor. Pak každá neprázdná otevřená podmnožina* X *je 2. kategorie. Speciálně:* X *je 2. kategorie.*

Důkaz. Předpokládejme sporem, že

$$\emptyset \neq U \subset X \text{ je otevřená množina} \tag{2.5}$$

a že

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\,, \text{ kde pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ je } \operatorname{int} \overline{M_n} = \emptyset. \tag{2.6}$$

Díky (2.5) existuje $a \in U$ a číslo $r > 0$ takové, že

$$U(a,r) := \{x \in X : \ \varrho(x,a) < r\} \subset \overline{U(a,r)} \subset \{x \in X : \ \varrho(x,a) \leqq r\} \subset U.$$

Z předpokladu $\operatorname{int} \overline{M_1} = \emptyset$ plyne, že existuje bod $a_1 \in U(a,r)$ takový, že

$$\operatorname{dist}(a_1, \overline{M_1}) := \inf_{x \in \overline{M_1}} \varrho(a_1, x) > 0$$

(to si rozmyslete podrobně!), a proto i kladné číslo r_1 takové, že

$$\overline{U(a_1,r_1)} \cap \overline{M_1} = \emptyset, \ \overline{U(a_1,r_1)} \subset U(a,r), \ 0 < r_1 < \frac{r}{2}\,.$$

A dál postupujme analogicky: z předpokladu $\operatorname{int} \overline{M_2} = \emptyset$ vyplývá, že existuje bod $a_2 \in U(a_1,r_1)$ a číslo r_2 tak, že

$$\overline{U(a_2,r_2)} \cap \overline{M_2} = \emptyset, \ \overline{U(a_2,r_2)} \subset U(a_1,r_1), \ 0 < r_2 < \frac{r_1}{2}\,.$$

$$\ldots$$

Tímto způsobem lze sestrojit posloupnost neprázdných uzavřených množin $\left(\overline{U(a_n,r_n)}\right)$, pro které platí:

$$\begin{gathered} U \supset \overline{U(a,r)} \supset \overline{U(a_1,r_1)} \supset \overline{U(a_2,r_2)} \supset \ldots\,, \\ \forall n \in \mathbb{N} : \ \overline{U(a_n,r_n)} \cap \overline{M_n} = \emptyset, \\ r_n = \operatorname{diam} \overline{U(a_n,r_n)} \to 0. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Z Cantorovy věty 2.22 vyplývá

$$\exists x \in X : \ \{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U(a_n,r_n)} \subset U.$$

Jenže: pro toto x má současně platit

$$x \in U = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \ (\text{viz } (2.6)),$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ x \notin \overline{M_n} \ (\text{viz } (2.7)).$$

A to je spor.

$\square$

Kapitola 3

Normovaný lineární prostor

3.1 Definice. Normovaným lineárním prostorem nazýváme každý vektorový prostor $X = (X, +, \cdot)$, na němž je definováno zobrazení (tzv. norma)

$$\|\cdot\| : \; X \to \mathbb{R}$$

splňující podmínky:

(1) $\forall x \in X : \; \|x\| \geqq 0, \; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

(2) $(\forall x \in X)\, (\forall \alpha \in \mathbb{R}) : \; \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|;$

(3) $\forall x, y \in X : \; \|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|.$

Je snadné nahlédnout: je-li X NLP,[1] je zobrazení $\varrho : \; X \times X \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$\varrho(x, y) := \|x - y\|$$

metrikou na X. Máme tedy definovanou (tzv. silnou) konvergenci:

$$\boxed{\begin{gathered}(x_n) \; \ldots \; \text{posloupnost v NLP } X, \; x \in X \\ x_n \to x \Leftrightarrow \varrho(x_n, x) = \|x_n - x\| \to 0.\end{gathered}}$$

3.2 Definice. Normovaný lineární prostor X se nazývá Banachův, jestliže je úplný (vzhledem k indukované metrice $\varrho(x, y) := \|x - y\|$).

3.3 Příklady. Uvažujme vektorové prostory definované v příkladech 1.3 a opatřeme je normou.

[1] Tuto zkratku asi nemusíme vysvětlovat.

1) $X = \{1\}$, $\|1\| := 0$ je Banachův prostor.

2) $X = \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ s eukleidovskou normou

$$\|x\| = \|(x_1, \ldots, x_n)\| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

je Banachův prostor.

3) $X = \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ s maximovou normou

$$\|x\| = \|(x_1, \ldots, x_n)\| := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

je Banachův prostor.

4) $X = \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ se součtovou normou

$$\|x\| = \|(x_1, \ldots, x_n)\| := |x_1| + \ldots + |x_n|$$

je Banachův prostor.

5) $X = C(\langle 0, 1\rangle)$ se supremovou normou

$$\|f\| := \sup_{x \in \langle 0,1\rangle} |f(x)| = \max_{x \in \langle 0,1\rangle} |f(x)|$$

pro $f \in C(\langle 0, 1\rangle)$ `je` Banachův prostor.

6) $X = C(\langle 0, 1\rangle)$ s L^p normou $(1 \leqq p < \infty)$

$$\|f\| := \left(\int_0^1 |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

`není` Banachův prostor (ale je to NLP).

7) $X = l^p$ $(1 \leqq p < \infty)$ s normou

$$\|x\| = \|(x_n)\| := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

je Banachův prostor.

8) $X = l^\infty$ s normou

$$\|x\| = \|(x_n)\| := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

je Banachův prostor.

3.4 Věta. *Buď (x_n) posloupnost v Banachově prostoru X. Pak platí implikace*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \quad \Rightarrow \quad \textit{existuje} \lim_{n\to\infty} (x_1 + \ldots + x_n) \overset{\textit{ozn.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X.$$

Důkaz. Definujme tzv. posloupnost částečných součtů (s_n) předpisem

$$s_n := x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Pak pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ takové, že $m > n$, platí

$$\|s_m - s_n\| = \|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_m\| \leqq \|x_{n+1}\| + \ldots + \|x_m\| \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\|.$$

Odtud, protože z předpokladu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$ plyne $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\| \to 0$ pro $n \to \infty$, snadno odvodíme, že posloupnost (s_n) je cauchyovská (v `úplném` prostoru X), a tudíž konvergentní.

□

3.5 Cvičení. Dokažte, že v každém NLP X je norma spojitým funkcionálem, tzn. že platí implikace

$$x_n \to x \ \Rightarrow \ \|x_n\| \to \|x\|.$$

3.6 Definice. Dva normované lineární prostory X a Y se nazývají izomorfními, existuje-li zobrazení (tzv. izomorfismus)

$$L : X \to Y$$

takové, že

(1) L je lineární

$\big($tzn. $(\forall x, y \in X)\,(\forall \alpha \in \mathbb{R}) : \ L(x+y) = Lx + Ly, \ L(\alpha x) = \alpha Lx\big)$,

(2) L je vzájemně jednoznačné (tzn. prosté a na);

(3) $(\exists k, K \in \mathbb{R}^+)\,(\forall x \in X) : \ k\,\|x\|_X \leqq \|Lx\|_Y \leqq K\,\|x\|_X$.

Platí-li navíc, že $k = K = 1$, nazýváme prostory X a Y izometricky izomorfními a zobrazení L izometrickým izomorfismem X na Y.

3.7 Definice. Dvě normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ na vektorovém prostoru X se nazývají <u>ekvivalentními</u>, existují-li konstanty $k, K \in \mathbb{R}^+$ takové, že

$$\forall x \in X: \ k\|x\|_1 \leqq \|x\|_2 \leqq K\|x\|_1.$$

3.8 Pozorování. Jsou-li normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ ekvivalentní na X, platí ekvivalence

$$\boxed{\|x_n - x\|_1 \to 0 \ \Leftrightarrow \ \|x_n - x\|_2 \to 0,}$$

tzn.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} x_n \to x & \Leftrightarrow & x_n \to x. \\ (\text{vzhledem k } \|\cdot\|_1) & & (\text{vzhledem k } \|\cdot\|_2) \end{array}}$$

3.9 Věta. *Nechť*

- *X je NLP,*
- $\dim X = n \in \mathbb{N}$.

Pak X je izomorfní s $\mathbb{R}^n$ (s eukleidovskou normou).

Důkaz. Buď $\{x_1, \ldots, x_n\}$ nějaká báze X (viz 1.14).
Definujeme zobrazení $L: \ \mathbb{R}^n \to X$ předpisem

$$L\alpha = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

Ukážeme, že L je izomorfismus.

- L je zřejmě <u>lineární</u>.
- L je <u>prosté</u> a <u>na</u> (to plyne – a rozmyslete si podrobně jak – z definice báze 1.13).
- $\forall \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\|L\alpha\| = \|\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\| \leqq \sum_{i=1}^n \|\alpha_i x_i\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \cdot \|x_i\| \leqq \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|\} \cdot \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leqq$$
$$\leqq \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|\} \cdot \sum_{i=1}^n \|\alpha\| = \underbrace{\max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|\} \cdot n}_{=:K} \cdot \|\alpha\| = K\|\alpha\|.$$

Dokázali jsme, že

$$\left(\exists K \in \mathbb{R}^+\right) \left(\forall \alpha \in \mathbb{R}^n\right) : \ \|L\alpha\| \leqq K\|\alpha\|. \tag{3.1}$$

Zbývá nám dokázat:

$$\left(\exists k \in \mathbb{R}^+\right)(\forall \alpha \in \mathbb{R}^n):\ k\|\alpha\| \leqq \|L\alpha\|.$$

Uvažujme nyní funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(\alpha) := \|L\alpha\|.$$

Funkce f je zřejmě spojitá:[1]

$$\begin{aligned} \underline{\alpha_m \to \alpha} \ &\Rightarrow\ \|\alpha_m - \alpha\| \to 0 \ \Rightarrow \\ \Rightarrow\ \|L\alpha_m - L\alpha\| &= \|L(\alpha_m - \alpha)\| \leqq K\|\alpha_m - \alpha\| \to 0 \ \Rightarrow \\ \Rightarrow\ L\alpha_m \to L\alpha \ &\Rightarrow\ \|L\alpha_m\| \to \|L\alpha\| \ \Rightarrow\ \underline{f(\alpha_m) \to f(\alpha)}, \end{aligned}$$

a proto existuje (viz Weierstrassovu větu)[2]

$$\min\left\{f(\xi):\ \|\xi\| = 1\right\}.$$

Protože L je prosté a $L(0) = 0$, je $f > 0$ na množině $\left\{\xi \in \mathbb{R}^n:\ \|\xi\| = 1\right\}$, a tudíž

$$k := \min\left\{f(\xi):\ \|\xi\| = 1\right\} > 0.$$

Odtud již snadno plyne

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}:\ \|L\alpha\| = \|\alpha\| \cdot \left\|L\left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|}\right)\right\| = \|\alpha\| \cdot f\left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|}\right) \geqq k\|\alpha\|,$$

a proto taky

$$\left(\exists k \in \mathbb{R}^+\right)(\forall \alpha \in \mathbb{R}^n):\ k\|\alpha\| \leqq \|L\alpha\|.$$

Dokázali jsme, že L je izomorfismus $\mathbb{R}^n$ na X.

□

3.10 Cvičení. Pokuste se dokázat následující tvrzení.

1) Každý normovaný lineární prostor `konečné dimenze` je Banachův.

2) Každé dvě normy v prostoru `konečné dimenze` jsou ekvivalentní.

3) Každý podprostor `konečné dimenze` NLP X je uzavřený v X.

[1] Rozmyslete si – s pomocí (3.1) a 3.5 – každou z následujících implikací!
[2] Ta mimochodem plyne z úplnosti $\mathbb{R}$.

3.11 Příklad. Uvažujme na vektorovém prostoru $X = C(\langle 0,1\rangle)$ dvě normy:

$$\|f\|_1 := \sup_{x\in\langle 0,1\rangle} |f(x)|; \ \|f\|_2 := \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Už víme, že X s normou $\|\cdot\|_1$ `je` Banachův prostor a že X s normou $\|\cdot\|_2$ `není` Banachův prostor. Odtud již snadno plyne (rozmyslete si podrobně!), že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ nejsou na X ekvivalentní, a proto X nemá konečnou dimenzi.

3.12 Definice. Buď Y NLP a buď $M \subset Y$. Řekneme, že M je <u>hustou podmnožinou</u> Y, platí-li

$$Y = \overline{M} := \{y \in Y : \text{ existuje posloupnost } (x_n) \text{ v } M \text{ taková, že } x_n \to y \text{ (v } Y)\}.$$

3.13 Příklad. Uvažujme NLP $\mathbb{R}$. Pak $\mathbb{Q}$ je hustou podmnožinou $\mathbb{R}$.

3.14 Věta (Cantorova o zúplnění). *Nechť X je NLP. Pak existuje* ***Banachův*** *prostor Y a zobrazení*

$$L : X \to Y$$

takové, že platí

1) *L je lineární,*

2) *L je prosté,*

3) $\overline{L(X)} = Y$,

4) $\forall x \in X : \ \|Lx\|_Y = \|x\|_X$

$\Big($ *tzn. že L je izometrický izomorfismus X na hustou podmnožinu Y*$\Big)$.

3.15 Poznámka. Výše uvedený Banachův prostor Y – tzv. <u>zúplnění</u> X – je určen až na izometrický izomorfismus jednoznačně.

Kapitola 4

Prostor se skalárním součinem

4.1 Definice. Prostorem se skalárním součinem nazýváme každý vektorový prostor $X = (X, +, \cdot)$, na němž je definováno zobrazení (tzv. skalární součin)

$$(\cdot, \cdot) : \ X \times X \to \mathbb{R}$$

splňující podmínky:

(1) $\forall y \in X : \ x \mapsto (x, y)$ je lineární zobrazení na X,

(2) $\forall x, y \in X : \ (x, y) = (y, x)$,

(3) $\forall x \in X : \ (x, x) \geqq 0, \ (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Dá se snadno dokázat: je-li X prostor se skalárním součinem, je zobrazení $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)}$$

normou na X.[1] Můžeme proto prostory se skalárním součinem vnímat jako speciální případy NLP.

4.2 Definice. Prostor X se skalárním součinem se nazývá Hilbertův prostor, jestliže je **úplný** v indukované metrice

$$\varrho(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}.$$

4.3 Příklady. Podíváte-li se na normované lineární prostory uvedené v 3.3, nebudete následujícími příklady vůbec překvapeni.

[1] Mluvíme o normě indukované skalárním součinem.

1) $X = \mathbb{R}^n$ se skalárním součinem

$$(x, y) := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$
$$\bigl(x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n\bigr)$$

je Hilbertův prostor.

2) $X = l^2$ se skalárním součinem

$$(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$
$$\bigl(x = (x_n), y = (y_n) \in l^2\bigr)$$

je Hilbertův prostor.

3) $X = C(\langle 0, 1\rangle)$ se skalárním součinem

$$(f, g) := \int_0^1 f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$
$$\bigl(f, g \in C(\langle 0, 1\rangle)\bigr)$$

není Hilbertův prostor.

4.4 Věta (o Cauchyho – Schwartzově – Buňakovského nerovnosti). *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro každé $x, y \in X$ platí*

$$|(x, y)| \leqq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)} = \|x\| \cdot \|y\|.$$

Důkaz. Buď $x, y \in X$ dáno.

1) Je-li $y = 0$, plyne přímo z vlastností skalárního součinu, že

$$(x, y) = (x, 0) = (0, x) = 0,$$
$$(y, y) = (0, 0) = 0,$$

a není proto co dokazovat.

2) Je-li $y \neq 0$, platí pro každé $t \in \mathbb{R}$:

$$0 \leqq (x + ty, x + ty) = (x, x) + 2t(x, y) + t^2 \underbrace{(y, y)}_{>0},$$

a proto příslušný diskriminant musí být nekladný, tj.

$$\big(2(x,y)\big)^2 - 4(y,y)(x,x) \leqq 0.$$

Odtud již snadno vyplývá dokazovaná nerovnost.

□

Ukázali jsme si, že skalárním součinem je vždy indukovaná norma. Není však pravda, že každá norma je indukovaná nějakým skalárním součinem.

4.5 Věta (rovnoběžníkové pravidlo).

i) *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro indukovanou normu*

$$\|\cdot\| := \sqrt{(\cdot,\cdot)}$$

platí tzv. rovnoběžníkové pravidlo:

$$\forall x, y \in X: \ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{4.1}$$

ii) *Nechť X je normovaný lineární prostor, v němž platí rovnoběžníkové pravidlo (4.1). Pak zobrazení definované na $X \times X$ předpisem*

$$(x,y) := \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$$

je skalárním součinem na X, který indukuje danou normu.

Důkaz ponechme jako dobrovolné cvičení.

4.6 Příklad. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{R}^2$ s maximovou normou

$$\|x\| = \|(x_1, x_2)\| := \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

a zvolme

$$x = (1,0), \ y = (1,1).$$

Pak

$$x + y = (2,1), \ x - y = (0,-1),$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4 + 1 = 5,$$

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2(1+1) = 4,$$

a proto maximová norma $\|\cdot\|$ `není` indukovaná žádným skalárním součinem (viz větu 4.5).

4.7 Úmluva. Až do konce kapitoly budeme symbolem „H“ rozumět Hilbertův prostor se skalárním součinem $(\cdot,\cdot)$ a indukovanou normou $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$.

4.8 Definice. Prvky $x, y \in H$ se nazývají <u>ortogonální</u>, je-li

$$(x, y) = 0.$$

<u>Systém</u> $\{x_\gamma :\ \gamma \in \Gamma\} \subset H$ se nazývá <u>ortogonální</u>, platí-li

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma :\ \big[\gamma_1 \neq \gamma_2 \ \Rightarrow\ (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}) = 0\big].$$

<u>Systém</u> $\{x_\gamma :\ \gamma \in \Gamma\} \subset H$ se nazývá <u>ortonormální</u>, platí-li

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma :\ (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}) = \begin{cases} 0, \ \text{je-li } \gamma_1 \neq \gamma_2 \\ \quad (\text{tzn. } \{x_\gamma :\ \gamma \in \Gamma\} \text{ je ortogonální systém}), \\ 1, \ \text{je-li } \gamma_1 = \gamma_2 \\ \quad (\text{tzn. } \forall \gamma \in \Gamma :\ \|x_\gamma\| = 1). \end{cases}$$

4.9 Pozorování.

i) *Ortogonální systém* $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subset H$ ***nenulových*** *prvků je lineárně nezávislý.*

Důkaz. Buď $x_1, \ldots, x_n$ libovolné navzájem různé prvky z $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ a buď $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Pak

$$\underline{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \Big[\forall i \in \{1, \ldots, n\} :\ (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n, x_i) = (0, x_i) = 0\Big] \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big[\forall i \in \{1, \ldots, n\} :\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underbrace{(x_k, x_i)}_{\substack{=0,\\ \text{je-li } k \neq i}} = \alpha_i \underbrace{(x_i, x_i)}_{\neq 0} = 0\Big] \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \underline{\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0}.$$

$\square$

ii) *Nechť* $\{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n\} \subset H$ *je* <u>*ortonormální báze*</u> *podprostoru* $Y \subset H$[1] *a nechť* $y \in Y$. *Pak*

$$y = \sum_{k=1}^{n} (y, \mathrm{e}_k)\mathrm{e}_k, \;\; \|y\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(y, \mathrm{e}_k)|^2.$$

Důkaz. Je-li $y \in Y$, existují čísla $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{R}$ taková, že

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{e}_k,$$

a proto pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ platí

$$(y, \mathrm{e}_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{e}_k, \mathrm{e}_j \right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\mathrm{e}_k, \mathrm{e}_j) = \alpha_j,$$

neboli

$$y = \sum_{k=1}^{n} (y, \mathrm{e}_k)\mathrm{e}_k.$$

Podobně snadné je dokázat tvrzení týkající se normy y:

$$\|y\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{e}_k, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathrm{e}_j \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_k \alpha_j (\mathrm{e}_k, \mathrm{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^{n} |(y, \mathrm{e}_k)|^2.$$

□

Zobecněním tohoto pozorování je následující věta.

[1] Tzn. že $\{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n\}$ je ortonormální systém a současně $Y = \mathrm{Lin}\,\{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n\}$, neboli

$$(\forall y \in Y)\,(\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}): \; y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{e}_k.$$

4.10 Věta (o aproximaci). *Nechť* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *je ortonormální bází podprostoru* $Y \subset H$. *Pak pro každé* $x \in H$ *existuje* ***jediné*** $y \in Y$ *takové, že*

$$\|x - y\| = \inf_{z \in Y} \|x - z\|.$$

Pro toto y *navíc platí:*

i) $y = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k$,

ii) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2$, [a]

iii) $\forall z \in Y : \ (x - y, z) = 0.$

[a] Je šikovné si uvědomit, že první z rovností říkáme v rovině Pythagorova věta. Je to jasné? Pokud ne, nakreslete si obrázek.

Důkaz. Buď $x \in H$ dáno.

Nejdříve si uvědomme, že

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \right) =$$

$$= \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x, e_k) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \pm \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left|(x, e_k) - \alpha_k\right|^2,$$

kde $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, bude nejmenší, bude-li

$$\sum_{k=1}^{n} \left|(x, e_k) - \alpha_k\right|^2 = 0,$$

to znamená, bude-li

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} : \ \alpha_k = (x, e_k).$$

Zvolíme-li proto

$$y = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k \in Y,$$

platí pro každé $z \in Y \setminus \{y\}$, že

$$\|x - z\| > \|x - y\|.$$

Navíc platí (viz předchozí pozorování 4.9) i tvrzení ii).

Zbývá dokázat tvrzení iii). Buď

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathrm{e}_j \in Y,$$

kde $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$, zvoleno libovolně. Pak

$$(x - y, z) = \Big(x - \sum_{k=1}^{n} (x, \mathrm{e}_k)\mathrm{e}_k, \sum_{j=1}^{n} c_j \mathrm{e}_j \Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j \Big[(x, \mathrm{e}_j) - \sum_{k=1}^{n} (x, \mathrm{e}_k)(\mathrm{e}_k, \mathrm{e}_j) \Big] = \sum_{j=1}^{n} c_j \big[(x, \mathrm{e}_j) - (x, \mathrm{e}_j) \big] = 0.$$

□

4.11 Věta (o Fourierových řadách). *Nechť*

$$\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_n, \ldots\}$$

je ortonormální systém v Hilbertově prostoru H.
Pak platí

i) $\forall x \in H: \sum\limits_{n=1}^{\infty} |(x, \mathrm{e}_n)|^2 \leqq \|x\|^2$ … *tzv. Besselova nerovnost,*

ii) $\forall x \in H:$ *existuje* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (x, \mathrm{e}_k)\mathrm{e}_k \overset{ozn.}{=} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x, \mathrm{e}_k)\mathrm{e}_k$ … *tzv. Fourierova řada x,*

iii) $\forall x \in H: \Big[x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x, \mathrm{e}_n)\mathrm{e}_n \;\Leftrightarrow\; \|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |(x, \mathrm{e}_n)|^2 \Big]$

… *tzv. Parsevalova rovnost.*

Důkaz.

Ad i). Z věty o aproximaci 4.10 vyplývá, že

$$(\forall x \in H)\,(\forall n \in \mathbb{N}): \; 0 \leqq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, \mathrm{e}_k)|^2,$$

a proto

$$\forall x \in H: \; \sum_{k=1}^{\infty} |(x, \mathrm{e}_k)|^2 \leqq \|x\|^2.$$

Ad ii). Definujme posloupnost (s_n) v H předpisem

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} (x, \mathrm{e}_k)\mathrm{e}_k .$$

Pak pro $m > n$ platí

$$\|s_m - s_n\|^2 = \Big(\sum_{k=n+1}^{m} (x, \mathrm{e}_k)\mathrm{e}_k , \sum_{k=n+1}^{m} (x, \mathrm{e}_k)\mathrm{e}_k \Big) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{m} |(x, \mathrm{e}_k)|^2 \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} |(x, \mathrm{e}_k)|^2$$

a navíc (viz – již dokázanou – Besselovu nerovnost)

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |(x, \mathrm{e}_k)|^2 \to 0 \text{ pro } n \to \infty .$$

Odtud plyne, že posloupnost (s_n) je **cauchyovská**, a proto konvergentní v **úplném** prostoru H.

Ad iii). Stačí si uvědomit, že z věty o aproximaci 4.10 vyplývá

$$\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, \mathrm{e}_k)|^2 ,$$

a proto

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, \mathrm{e}_n)\mathrm{e}_n \;\Leftrightarrow\; \|x - s_n\|^2 \to 0 \;\Leftrightarrow\; \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, \mathrm{e}_k)|^2 .$$

□

4.12 Definice. Ortonormální systém $\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_n, \ldots\} \subset H$ se nazývá ortonormální bází prostoru H, platí-li

$$\forall x \in H : \; x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, \mathrm{e}_n)\mathrm{e}_n .$$

4.13 Cvičení. Definujme pro každé $n \in \mathbb{N}$ posloupnost

$$\mathrm{e}_n := 0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots$$

(n-tým členem posloupnosti e_n je číslo 1, ostatní členy jsou nulové).

Dokažte, že $\{\mathrm{e}_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální bází Hilbertova prostoru l^2.

Následujícímu příkladu plně porozumíte, až se seznámíte s Lebesgueovým integrálem a Lebesgueovými prostory $L^2(\Omega)$. [1]

4.14 Příklad. Dá se ukázat, že systém funkcí

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

je ortonormální bází Hilbertova prostoru

$$L^2(0, 2\pi) = \overline{C(\langle 0, 2\pi \rangle)}^{\|\cdot\|_{L^2(0,2\pi)}}.$$

Platí proto pro každou funkci $f \in L^2(0, 2\pi)$ (a tedy i pro každou funkci f spojitou na $\langle 0, 2\pi \rangle$), že

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \big),$$

kde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \,\mathrm{d}x, \ \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \,\mathrm{d}x, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Pozor! Konvergencí řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ldots$ zde rozumíme konvergenci v normě prostoru $L^2(0, 2\pi)$, tzn.

$$\Big\| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \big) \right) \Big\|_{L^2(0,2\pi)} \to 0 \text{ pro } n \to \infty.$$

[1] V tuto chvíli pouze prozraďme, že prostor $L^2(0, 2\pi)$ je zúplněním prostoru $C(\langle 0, 2\pi \rangle)$ uvažovaného s normou indukovanou skalárním součinem

$$(f, g) := \int_0^{2\pi} f(x) g(x) \,\mathrm{d}x.$$

Poznámka. Podobně se dá ukázat, že každý ze systémů

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(nx) :\ n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx) :\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

je ortonormální bází Hilbertova prostoru $L^2(0,\pi)$.

4.15 Věta (Schmidtův ortonormalizační proces). *Nechť*

$$\{x_n :\ n \in \mathbb{N}\} \subset H$$

je taková množina, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou prvky $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ***lineárně nezávislé****. Pak existuje* ***ortonormální systém*** $\{\mathrm{e}_n :\ n \in \mathbb{N}\} \subset H$ *takový, že*

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ \operatorname{Lin}\{x_1, \ldots, x_n\} = \operatorname{Lin}\{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n\}.$$

Důkaz. Ověřte, že stačí položit (viz větu 4.10):

$$\mathrm{e}_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|},\ \mathrm{e}_{n+1} := \frac{x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}(x_{n+1}, \mathrm{e}_k)\,\mathrm{e}_k}{\|x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}(x_{n+1}, \mathrm{e}_k)\,\mathrm{e}_k\|} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

□

4.16 Věta. *Nechť Hilbertův prostor H je separabilní (tzn. že existuje jeho hustá spočetná podmnožina). Pak existuje jeho –* ***nejvýše spočetná*** *– ortonormální báze.*

Důkaz. Je-li dimenze prostoru H konečná, je tvrzení triviální. Předpokládejme proto navíc, že $\dim H = \infty$. Buď M hustou spočetnou podmnožinou H, tzn.

$$M = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \subset H,\ \overline{M} = H.$$

Zřejmě platí:

$$\overline{\{x_1, , \ldots, x_n, \ldots\}} = \overline{\operatorname{Lin}\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}} = H.$$

Budeme-li z posloupnosti (x_n) postupně vynechávat ty prvky, které jsou lineární kombinací prvků předcházejících, získáme posloupnost vybranou z posloupnosti (x_n)

(značme ji stejně) takovou, že $\overline{\operatorname{Lin}\{x_1, \dots, x_n, \dots\}} = H$ a že množina $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ je lineárně nezávislá.

Sestrojme nyní pomocí Schmidtova ortonormalizačního procesu ortonormální systém $\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \dots, \mathrm{e}_n, \dots\} \subset H$ takový, že

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ \operatorname{Lin}\{x_1, \dots, x_n\} = \operatorname{Lin}\{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n\},$$

a proto

$$\overline{\operatorname{Lin}\{x_1, \dots, x_n, \dots\}} = \overline{\operatorname{Lin}\{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n, \dots\}} = H. \tag{4.2}$$

Ukažme, že $\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \dots, \mathrm{e}_n, \dots\}$ je ortonormální bází H, tzn. že pro každé $x \in H$ je $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x, \mathrm{e}_n)\, \mathrm{e}_n$. Buď $x \in H$ dáno.

Pak existuje (viz (4.2)) posloupnost (y_n) v H taková, že

$$\lim y_n = x,$$

$$(\forall n \in \mathbb{N})\, (\exists m_n \in \mathbb{N},\ m_n \geqq n): \ y_n \in \operatorname{Lin}\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \dots, \mathrm{e}_{m_n}\}.$$

Odtud a z věty o aproximaci 4.10 plyne

$$0 \leqq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m_n} |(x, \mathrm{e}_k)|^2 \leqq \|x - y_n\|^2 \to 0 \text{ pro } n \to \infty,$$

a tedy i Parselvalova rovnost

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, \mathrm{e}_k)|^2,$$

a proto (viz větu 4.11)

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, \mathrm{e}_n)\, \mathrm{e}_n.$$

□

4.17 Poznámka. Pojem ortonormální báze lze zobecnit i pro nespočetné ortonormální systémy – užitím tzv. <u>zobecněných řad</u>. Pomocí Zornova lemmatu [1] se pak dá dokázat, že `každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.`

4.18 Příklad. Je známo, že množina všech polynomů je hustá v $C(\langle -1, 1\rangle)$, a proto i v $L^2(-1,1)$. Tzn.

$$\overline{\operatorname{Lin}\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}}^{\|\cdot\|_{L^2(-1,1)}} = L^2(-1,1).$$

[1] Zornovo lemma je jedno z tvrzení ekvivalentních s tzv. axiomem výběru.

Odtud – protože množina polynomů

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\} \tag{4.3}$$

je lineárně nezávislá[1] – plyne, že Schmidtovým ortonormalizačním procesem získáme z (4.3) `ortonormální bázi` $L^2(-1,1)$ tvořenou (tzv. Legendreovými) polynomy:

$$\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \frac{\sqrt{6}}{2}x, \ \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-1), \ \frac{\sqrt{14}}{4}(5x^3-3x), \ \ldots\right\}.$$

4.19 Cvičení. Dokažte, že ortonormální systém $\{\mathrm{e}_n : \ n \in \mathbb{N}\} \subset H$ je bází H právě tehdy, je-li úplný, tj. platí-li implikace

$$\big[x \in H \ \wedge \ (x, \mathrm{e}_n) = 0 \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}\big] \ \Rightarrow \ x = 0.$$

4.20 Věta (Rieszova – Fischerova). *Každý* ***separabilní*** *Hilbertův prostor* ***nekonečné dimenze*** *je izometricky izomorfní s* l^2.

4.21 Důsledek. Libovolné dva separabilní Hilbertovy prostory nekonečné dimenze jsou izometricky izomorfní.

Důkaz. Buď H separabilní Hilbertův prostor takový, že $\dim H = \infty$, a buď $\{\mathrm{e}_n : n \in \mathbb{N}\}$ ortonormální báze H (ta, jak už víme, existuje!).

Pak

$$\forall x \in H: \ x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, \mathrm{e}_n)\, \mathrm{e}_n, \ \ \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, \mathrm{e}_n)|^2.$$

Definujeme zobrazení $L : H \to l^2$ předpisem

$$Lx := \big((x, \mathrm{e}_n)\big).$$

Pak platí

- L je `lineární`, protože pro každé $x, y \in H$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\underline{L(x+y)} = \big((x+y, \mathrm{e}_n)\big) = \big((x, \mathrm{e}_n) + (y, \mathrm{e}_n)\big) = \big((x, \mathrm{e}_n)\big) + \big((y, \mathrm{e}_n)\big) = \underline{Lx + Ly},$$

$$\underline{L(\alpha x)} = \big((\alpha x, \mathrm{e}_n)\big) = \big(\alpha(x, \mathrm{e}_n)\big) = \alpha\big((x, \mathrm{e}_n)\big) = \underline{\alpha L x};$$

[1] A rozmyslete si proč!

- L je `prosté`, protože pro každé $x, y \in H$ platí

$$\underline{Lx = Ly} \Rightarrow \big((x, \mathrm{e}_n)\big) = \big((y, \mathrm{e}_n)\big) \Rightarrow \big[\forall n \in \mathbb{N}:\ (x, \mathrm{e}_n) = (y, \mathrm{e}_n)\big] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \big[\forall n \in \mathbb{N}:\ (x - y, \mathrm{e}_n) = 0\big] \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow \underline{x = y};$$

- L je `na`, protože pro každé $(x_n) \in l^2$ existuje $y \in H:\ Ly = (x_n)$

$\Big($Buď $\underline{(x_n) \in l^2}$ dáno. Definujme posloupnost (y_n) v H předpisem

$$y_n := \sum_{k=1}^{n} x_k \mathrm{e}_k.$$

Pak pro každé $n, m \in \mathbb{N},\ n > m$, je

$$\|y_n - y_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \mathrm{e}_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} x_k^2 \leqq \sum_{k=m+1}^{\infty} x_k^2,$$

a navíc

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} x_k^2 \to 0 \text{ pro } m \to \infty,$$

a tedy (y_n) je `cauchyovská` v H. Z úplnosti H pak vyplývá, že <u>existuje $y \in H$</u> takové, že $y_n \to y$. Snadno lze nahlédnout, že pro toto y pak platí

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mathrm{e}_n = \sum_{n=1}^{\infty} (y, \mathrm{e}_n) \mathrm{e}_n,$$

a proto[1]

$$\underline{Ly = (x_n)}\Big);$$

- L je `izometrie`, protože pro každé $x \in H$ zřejmě platí

$$\|x\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, \mathrm{e}_n)|^2 = \|Lx\|_{l^2}^2.$$

Dokázali jsme, že L je izometrický izomorfismus H na l^2.

$\square$

[1] Opět dobrý důvod k zamyšlení.

OPERÁTORY V NLP

Kapitola 5

Spojitá lineární zobrazení

5.1 Definice. Buď X `netriviální` NLP a Y NLP. Řekneme, že `zobrazení` (`operátor`) $f : X \to Y$ má v bodě $x_0 \in X$ limitu $a \in Y$ (a píšeme $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$), platí-li pro každou posloupnost (x_n) v $X \setminus \{x_0\}$ implikace

$$\boxed{x_0 \neq x_n \to x_0 \;\Rightarrow\; f(x_n) \to a.}$$

5.2 Definice. Buď X, Y NLP. Řekneme, že `zobrazení` $f : X \to Y$ je spojité v bodě $x_0 \in X$, platí-li pro každou posloupnost (x_n) v X implikace

$$\boxed{x_n \to x_0 \;\Rightarrow\; f(x_n) \to f(x_0).}$$ [a]

Řekneme, že f je spojité na X, je-li spojité v každém bodě $x \in X$.

[a] Nepřehlédněme: je-li navíc prostor X `netriviální`, je

$$f \text{ spojité v bodě } x_0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

5.3 Definice. Buď X a Y normované lineární prostory. `Lineární zobrazení` $A : X \to Y$ se nazývá omezené, existuje-li nezáporné číslo $k \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\boxed{\forall x \in X : \; \|A(x)\|_Y \leqq k \, \|x\|_X.}$$

5.4 Věta. *Buď X, Y NLP. Nechť $A : X \to Y$ je **lineární** zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

i) *A je spojité v každém bodě $x \in X$,*

ii) *A je spojité v 0,*

iii) *A je omezené.*

Důkaz.

i) $\Rightarrow$ (ii) ... zřejmé.

ii) $\Rightarrow$ iii). Nejdříve si rozmysleme, že

$$A \text{ je spojité v } 0 \;\Leftrightarrow\; \Big[(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in X) : \; \|x-0\| < \delta \Rightarrow \|A(x)-A(0)\| < \varepsilon\Big], \tag{5.1}$$

a potom volme $\varepsilon = 1$ a dosaďme do (5.1) (A je **lineární**) $A(0) = 0$. Dostaneme tak tvrzení

$$(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in X) : \; \|x\| < \delta \Rightarrow \|A(x)\| < 1.$$

Nyní položme

$$k := \frac{2}{\delta}.$$

Pak pro každé $x \in X$ platí:

- $x = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\|A(x)\|} = \|A(0)\| = \|0\| = 0 = k\,\|0\| = \underline{k\,\|x\|}$,
- $x \neq 0 \;\Rightarrow\; \left\|\frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|}\right\| = \frac{\delta}{2} < \delta \Rightarrow \left\|A\big(\frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|}\big)\right\| = \frac{\delta}{2}\frac{1}{\|x\|}\,\|A(x)\| < 1,$

  a proto $\underline{\|A(x)\|} \leqq \frac{2}{\delta}\|x\| = \underline{k\,\|x\|}$.

iii) $\Rightarrow$ i). Stačí si uvědomit, že

$$0 \leqq \|A(x_n) - A(x)\| = \|A(x_n - x)\| \leqq k\,\|x_n - x\| \to 0, \text{ pokud } x_n \to x.$$

$\square$

5.5 Poznámka. Takže jsme vlastně dokázali, že

$$\boxed{\text{spojitý lineární operátor } \equiv \text{ omezený lineární operátor.}}$$

5.6 Příklad. Uvažujme prostor $X = C(\langle 0, 1\rangle)$ s normou

$$\|x\| := \sup_{t \in \langle 0,1\rangle} |x(t)|$$

a spojitou funkci

$$K:\ \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}.$$

Pak zobrazení $A:\ X \to X$ definované na X předpisem

$$(Ax)(t) := \int_0^1 K(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s$$

je spojité na X.

Důkaz. Protože A je zřejmě `lineární`, stačí dokázat, že A je `omezené`. To je ale velmi snadné, protože pro každé $x \in X$ platí

$$\underline{\|Ax\|} = \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} \left| \int_0^1 K(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s \right| \leqq \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} \int_0^1 |K(t,s)|\cdot|x(s)|\,\mathrm{d}s \leqq$$

$$\leqq \sup_{(t,s)\in\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle} |K(t,s)|\cdot\|x\| = \underline{k\,\|x\|},$$

kde nezáporná reálná konstanta

$$k := \sup_{(t,s)\in\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle} |K(t,s)| = \max_{(t,s)\in\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle} |K(t,s)|$$

nezávisí na volbě $x \in X$. □

5.7 Označení a definice. Buď X a Y normované lineární prostory. Symbolem $\mathcal{L}(X,Y)$ značme množinu všech lineárních zobrazení X do Y spojitých na X.

Definujme pro každé $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ zobrazení $A+B$, $\alpha A \in \mathcal{L}(X,Y)$ předpisy

$$(A+B)(x) := A(x) + B(x),$$

$$(\alpha A)(x) := \alpha A(x).$$

Dá se ukázat, že spolu s těmito operacemi je $\mathcal{L}(X,Y)$ `vektorovým prostorem`.

Navíc, zobrazení $\|\cdot\|:\ \mathcal{L}(X,Y) \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$\|A\| := \sup_{\substack{x\,\in\,X \\ \|x\|_X\,\leqq\,1}} \|A(x)\|_Y$$

je `normou` na $\mathcal{L}(X,Y)$.

Shrnutí:

$$\boxed{\mathcal{L}(X,Y) \text{ je normovaný lineární prostor.}}$$

5.8 Definice. Buď X NLP. Prostor všech spojitých lineárních funkcionálů na X, tzn. normovaný lineární prostor

$$X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$$

s normou

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leqq 1}} |A(x)|,$$

nazýváme duálním prostorem k X.

5.9 Poznámky a tvrzení.

i) $\boxed{A \in \mathcal{L}(X,Y),\ B \in \mathcal{L}(Y,Z) \ \Rightarrow\ B \circ A \in \mathcal{L}(X,Z)}$

$\big($a navíc $\|B \circ A\|_{\mathcal{L}(X,Z)} \leqq \|B\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \cdot \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\big)$.

ii) $$\boxed{\left.\begin{array}{l} A:\ X \to Y,\ \text{kde } X \text{ a } Y \text{ jsou NLP,} \\ A \ \text{ je } \texttt{lineární} \text{ na } X, \\ \dim X < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ je spojité na } X.}$$

`Pozor!` Tvrzení neplatí bez předpokladu $\dim X < \infty$, tj. je-li $\dim X = \infty$. Jako protipříklad lze volit:

$$X = C^1(\langle 0,1 \rangle), Y = C(\langle 0,1 \rangle)$$

(oba prostory se supremovou normou $\|x\| := \sup_{t \in \langle 0,1 \rangle} |x(t)|$),

$$A:\ X \to Y,\ A(x) := x'.$$

Pak A je zřejmě `lineární zobrazení` na X. Nyní uvažujme posloupnost (x_n) v X, jejímiž členy jsou funkce definované předpisy

$$x_n(t) := t^n.$$

Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\|x_n\| = 1,\ \|Ax_n\| = \sup_{t \in \langle 0,1 \rangle} |(Ax_n)(t)| = \sup_{t \in \langle 0,1 \rangle} |n\, t^{n-1}| = n,$$

a proto A `není omezené` na kouli

$$\{x \in X :\ \|x\| \leqq 1\},$$

což znamená, že A `není spojité` na X.

iii) $\boxed{\left.\begin{array}{l} X \ldots \text{ NLP}, \\ Y \ldots \texttt{ Banachův } \text{prostor} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}(X,Y) \text{ je } \texttt{Banachův prostor}.}$

`Speciálně`:

$$\boxed{X^* \text{ je Banachův prostor.}}$$

Důkaz uvedených tvrzení ponechme jako výzvu a velmi vhodné cvičení čtenářům.

5.10 Věta. *Nechť X je NLP a nechť $f : X \to \mathbb{R}$ je* ***lineární zobrazení*** *na X.*[a] *Pak f je spojité na X právě tehdy, je-li*

$$Ker\ f := \{x \in X :\ f(x) = 0\}$$

(tzv. jádro zobrazení f) uzavřeným vektorovým podprostorem X.

[a] Někdy mluvíme o lineární formě na X.

Důkaz. Nejdříve si všimněme, že platí implikace

$$\underline{x, y \in \text{Ker } f} \ \Rightarrow\ 0 = f(x) + f(y) = f(x+y) \ \Rightarrow\ \underline{x + y \in \text{Ker } f},$$

$$\underline{\alpha \in \mathbb{R}, x \in \text{Ker } f} \ \Rightarrow\ 0 = \alpha f(x) = f(\alpha x) \ \Rightarrow\ \underline{\alpha x \in \text{Ker } f},$$

a proto (viz cvičení 1.6)

$$\text{Ker } f \text{ je } \texttt{vektorovým podprostorem } X.$$

Zbývá nám dokázat ekvivalenci

$$\boxed{f \text{ je spojité na } X \quad \Leftrightarrow \text{ Ker } f \text{ je uzavřená podmnožina } X, \quad \text{tzn. } \overline{\text{Ker } f} = \text{Ker } f.}$$

Důkaz „⇒“ plyne přímo ze spojitosti f, protože

$$\underline{\text{Ker } f \ni x_n \to x \in X} \ \Rightarrow\ 0 = f(x_n) \to f(x) \ \Rightarrow\ f(x) = 0 \ \Rightarrow\ \underline{x \in \text{ Ker } f}.$$

Důkaz „⇐“. Je-li $f \equiv 0$, je tvrzení zřejmé. Není-li $f \equiv 0$, existuje $v \in X$ takové, že $f(v) \neq 0$, a můžeme vzít

$$u := \frac{1}{f(v)} v \in X.$$

Pak

$$f(u) = 1 \tag{5.2}$$

a navíc
$$d := \inf_{y \in \operatorname{Ker} f} \|u - y\| > 0.$$
$\big($Nerovnost $d > 0$ můžeme ověřit – díky předpokladu, že jádro $\operatorname{Ker} f$ je uzavřené – sporem:
$$d = 0 \;\Rightarrow\; \big[\text{existuje posloupnost } (y_n) \text{ v } \operatorname{Ker} f \text{ taková, že } \|u - y_n\| \to 0\big] \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; y_n \to u \;\Rightarrow\; u \in \operatorname{Ker} f,$$
a to je spor s (5.2).$\big)$

Není těžké zkontrolovat, že pro každé $x \in X$, pro něž $f(x) \neq 0$, platí
$$\|x\| = \|f(x)u + x - f(x)u\| = |f(x)| \cdot \|u - \underbrace{\frac{f(x)u - x}{f(x)}}_{\in \operatorname{Ker} f}\| \geqq |f(x)| \cdot d,$$
a proto
$$\forall x \in X: \; |f(x)| \leqq \frac{1}{d}\|x\|.$$

Zjistili jsme, že f je omezené, a tudíž **spojité** na X.

$\square$

5.11 Věta (o ortogonální projekci v H-prostoru).

Nechť M je ***uzavřený*** *vektorový* ***podprostor Hilbertova*** *prostoru H.*[a] *Pak*
$$(\forall x \in H)\,(\exists! Px \in M): \; \|x - Px\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$
Navíc, pro (tímto způsobem definované) zobrazení
$$P: \; H \to M$$
platí:

i) $(\forall x \in H)\,(\forall y \in M): \; (x - Px, y) = 0,$

ii) $P \in \mathcal{L}(H, M),$

iii) $\forall x \in H: \; \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 = \|x\|^2.$

$\big($*Zobrazení P se nazývá* *ortogonální projekce* *na M.*$\big)$

[a] To znamená:
$$\emptyset \neq M = \overline{M} \subset H,$$
$$(\forall x, y \in M)\,(\forall \alpha \in \mathbb{R}): \; \big[x + y \in M \;\wedge\; \alpha x \in M\big].$$

(Porovnejte větu o ortogonální projekci s větou o aproximaci 4.10.)

Důkaz.

- Existence Px.
  Buď $x \in H$ dáno. Uvažujme posloupnost (y_n) v M takovou, že
  $$d := \inf_{y \in M} \|x - y\| \leqq \|x - y_n\| < d + \frac{1}{n} \tag{5.3}$$
  (taková existuje!). Pak pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ díky rovnoběžníkovému pravidlu 4.5 platí:
  $$\|y_n - y_m\|^2 = \|y_n - x - (y_m - x)\|^2 =$$
  $$= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|y_n - x + y_m - x\|^2 =$$
  $$= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\Big\|\underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{\in M} - x\Big\|^2 \leqq$$
  $$\leqq 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 - 4d^2 = \frac{4d}{n} + \frac{4d}{m} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}.$$
  Odtud již snadno plyne, že posloupnost (y_n) je cauchyovská v **úplném** prostoru H, a proto
  $$\exists Px \in H : \; y_n \to Px.$$
  Zbývá nám ukázat, že bod Px má požadované kvality.
  Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $y_n \in M$ a M je **uzavřená** množina, je $\underline{Px \in M}$.
  Navíc, z konvergence $y_n \to Px$, spojitosti normy (viz 3.5) a nerovností (5.3) plyne
  $$x - y_n \to x - Px \;\Rightarrow\; \underbrace{\|x - y_n\|}_{\to d} \to \|x - Px\| \;\Rightarrow\; \underline{\|x - Px\| = d}.$$

- Jednoznačnost Px.
  Buď
  $$\|x - P_1x\| = \|x - P_2x\| = d,$$
  kde $P_1x, P_2x \in M$. Potom (podobně jako před chvílí):
  $$\|P_1x - P_2x\|^2 = \|P_1x - x + x - P_2x\|^2 =$$
  $$= 2\|P_1x - x\|^2 + 2\|x - P_2x\|^2 - \|P_1x - x - x + P_2x\|^2 =$$
  $$= 2d^2 + 2d^2 - 4\Big\|\underbrace{\frac{P_1x + P_2x}{2}}_{\in M} - x\Big\|^2 \leqq 4d^2 - 4d^2 = 0,$$
  a proto $\underline{P_1x = P_2x}$.

- Vlastnost i).
  Buď $x \in H$ a $y \in M$ dáno. Pak pro funkci
  $$\varphi(t) := \|x - (Px - ty)\|^2 : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
  platí, že
  $$\min_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t) = \varphi(0).$$
  Odtud plyne: existuje-li $\varphi'(0)$, je $\varphi'(0) = 0$.
  Snadno zkontrolujeme, že pro každé $t \in \mathbb{R}$ je
  $$\varphi(t) = (x - Px + ty, x - Px + ty) = \|x - Px\|^2 + 2t(x - Px, y) + t^2 \|y\|^2,$$
  a proto
  $$\varphi'(0) = 2\,\underline{(x - Px, y) = 0}.$$

- Vlastnost ii).
  Nejdříve dokažme, že $\underline{P \text{ je lineární}}$:

  $\underline{\forall x, y \in H}$:
  $$\Big\| \underbrace{P(x+y) - (Px + Py)}_{\overset{\text{ozn.}}{=} z \in M} \Big\|^2 = \big(P(x+y) - (x+y) + (x+y) - (Px+Py), z\big) =$$
  $$= -\underbrace{\big(x + y - P(x+y), z\big)}_{=0} + \underbrace{(x - Px, z)}_{=0} + \underbrace{(y - Py, z)}_{=0} = 0,$$
  a proto
  $$\underline{P(x+y) = Px + Py};$$

  $\underline{(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\forall x \in H)}$:
  $$\Big\| \underbrace{P(\alpha x) - \alpha Px}_{\overset{\text{ozn.}}{=} z \in M} \Big\|^2 = \big(P(\alpha x) - \alpha x + \alpha x - \alpha Px, z\big) =$$
  $$= -\underbrace{\big(\alpha x - P(\alpha x), z\big)}_{=0} + \underbrace{\alpha(x - Px, z)}_{=0} = 0,$$
  a proto
  $$\underline{P(\alpha x) = \alpha Px}.$$

  Zbývá dokázat, že $\underline{P \text{ je spojité}}$, tzn. omezené:

$$\underline{\forall x \in H}: \ \|Px\|^2 = (Px - x + x, Px) = -\underbrace{(x - Px, \underbrace{Px}_{\in M})}_{=0} + (x, Px) \leqq \|x\| \cdot \|Px\|,$$

a proto $\underline{\|Px\| \leqq \|x\|}$.

- Vlastnost iii).

  $\underline{\forall x \in H}$:

$$\underline{\|Px\|^2 + \|x - Px\|^2} = (Px, Px) + (x - Px, x - Px) = (Px, Px) + (x - Px, x) =$$

$$= (Px, Px) + (x, x) + (-x, Px) = -(\underbrace{x - Px, Px}_{=0}) + (x, x) = \underline{\|x\|^2}.$$

□

5.12 Pozorování. Buď H Hilbertův prostor a buď $y \in H$ libovolný bod. Pak zobrazení $A : H \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$Ax := (x, y)$$

je `lineární` a `omezené` ($\|Ax\| = |Ax| = |(x, y)| \leqq \|x\| \cdot \|y\|$).
Je proto

$$A \in H^*.$$

Navíc platí

$$\|A\|_{H^*} = \|y\|_H .$$

Důkaz rovnosti norem rozdělme na dvě části:

- je-li $\underline{y = 0}$, je

$$\underline{\|A\|} = \sup_{\|x\| \leqq 1} |A(x)| = \sup_{\|x\| \leqq 1} |(x, 0)| = \underline{0 = \|y\|};$$

- je-li $\underline{y \neq 0}$, je

$$\left.\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x\| \leqq 1} |(x, y)| \leqq \sup_{\|x\| \leqq 1} \big(\|x\| \cdot \|y\|\big) \leqq \|y\|, \\ \|A\| &\geqq \Big|A\Big(\frac{y}{\|y\|}\Big)\Big| = \Big|\Big(\frac{y}{\|y\|}, y\Big)\Big| = \frac{1}{\|y\|} \cdot \|y\|^2 = \|y\| \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ \underline{\|A\| = \|y\|}.$$

□

Je tedy – ve zřejmém smyslu –

$$H \subset H^*.$$

Následující věta ukazuje, že tuto inklusi lze i obrátit.

5.13 Věta (Rieszova o reprezentaci).
Nechť H je Hilbertův prostor a nechť $f \in H^*$. Pak

$$(\exists!\, u \in H)\,(\forall x \in H): \ f(x) = (x, u).$$

Navíc platí:

$$\|f\|_{H^*} := \sup_{\|x\|_H \leqq 1} |f(x)| = \|u\|_H\,.$$

Důkaz.

- Existence u.
  Je-li $f \equiv 0$, stačí volit $u = 0$.
  Předpokládejme proto navíc, že pro nějaké $\tilde{v} \in H$ je $f(\tilde{v}) \neq 0$, a položme

$$v := \frac{1}{f(\tilde{v})}\,\tilde{v}.$$

  Pak $f(v) = 1$. Jak už víme (viz větu 5.10), $\operatorname{Ker} f := \{x \in H : \ f(x) = 0\}$ je uzavřeným podprostorem H, a proto existuje (viz větu 5.11) `ortogonální projekce`

$$P: \ H \to \operatorname{Ker} f.$$

  Nyní volme

$$\tilde{u} := v - Pv.$$

  Pak pro každé $x \in H$ platí

$$x = f(x)\tilde{u} + \underbrace{x - f(x)\tilde{u}}_{\in \operatorname{Ker} f},$$

  a proto taky (viz vlastnost i) ortogonální projekce z věty 5.11)

$$\underline{(x, \tilde{u})} = f(x)(\tilde{u}, \tilde{u}) + \big(x - f(x)\tilde{u}, \tilde{u}\big) = f(x)(\tilde{u}, \tilde{u}) + \underbrace{\big(v - Pv, x - f(x)\tilde{u}\big)}_{=0} = \underline{f(x)\,\|\tilde{u}\|^2}.$$

  Odtud přímo plyne, že stačí volit

$$u := \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|^2}\,.$$

- Jednoznačnost.
  Nechť $u_1, u_2 \in H$ jsou takové prvky, že
  $$\forall x \in H: \; f(x) = (x, u_1) = (x, u_2).$$
  Odtud plyne, že
  $$\forall x \in H: \; (x, u_1 - u_2) = 0,$$
  a proto (volíme $x = u_1 - u_2$)
  $$(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = \|u_1 - u_2\|^2 = 0$$
  neboli $\underline{u_1 = u_2}$.

- Rovnost norem plyne přímo z pozorování 5.12 uvedeného před větou.

□

Takže jsme ukázali možnost ztotožnění
$$H = H^*.$$

5.14 Poznámka a definice. Buď X normovaný lineární prostor. Definujme
$$X^{**} := (X^*)^*.$$
Dá se ukázat, že zobrazení (tzv. kanonické vnoření)
$$S: \; X \to X^{**}$$
definované předpisem
$$(Sx)(f) := f(x)$$
je `izometrickým izomorfismem` X na $S(X) \subset X^{**}$. Protože izometricky izomorfní prostory lze ztotožnit, je (po zmíněném ztotožnění)
$$X \subset X^{**}.$$

NLP X se nazývá reflexivní, je-li $S(X) = X^{**}$.

5.15 Příklady.

1) Protože pro Hilbertův prostor H platí $H^* = H$, je

$$H^{**} = (H^*)^* = H^* = H.$$

Tedy: `každý Hilbertův prostor je reflexivní.`[1]

2) Prostory l^p, kde $1 < p < \infty$, `jsou reflexivní`.

3) Prostory l^1 a l^∞ `nejsou reflexivní`.

4) Prostor $C(\langle 0, 1\rangle)$ se supremovou normou `není reflexivní`.

5.16 Tvrzení.

i) Každý reflexivní prostor je Banachův.

ii) Je-li prostor X reflexivní, je i každý jeho `uzavřený` vektorový podprostor reflexivní.

iii) Je-li prostor X reflexivní, je i X^* reflexivní.

5.17 Věta (Hahnova – Banachova).
Nechť M je `vektorovým podprostorem` *(ne nutně uzavřeným) NLP X a nechť $f_M \in M^*$. Pak existuje $f \in X^*$ takové, že*

- $\forall x \in M : \; f(x) = f_M(x)$,
- $\|f\|_{X^*} = \|f_M\|_{M^*}$.

5.18 Důsledek. Nechť X je NLP a nechť $u \in X \setminus \{0\}$. Pak existuje $f \in X^*$ takové, že

- $f(u) = \|u\|_X$,
- $\|f\|_{X^*} = 1$.

[1] Rozmyslete si s pomocí Rieszovy věty, že uvedené ztotožnění $H = H^{**}$ je realizováno právě pomocí kanonického vnoření.

Důkaz Hahnovy–Banachovy věty je nekonstruktivní a opírá se o Zornovo lemma. Ukažme si proto pouze, jak z této věty vyplývá uvedený důsledek.

Uvažujme vektorový podprostor

$$M = \{\lambda u : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

a zobrazení $f_M : \ M \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$f_M(\lambda u) := \lambda \|u\|.$$

Pak f_M je zřejmě `lineární`:

$$\underline{f_M(\lambda_1 u + \lambda_2 u)} = f_M\big((\lambda_1 + \lambda_2)u\big) = (\lambda_1 + \lambda_2)\|u\| =$$

$$= \lambda_1\|u\| + \lambda_2\|u\| = \underline{f_M(\lambda_1 u) + f_M(\lambda_2 u)},$$

$$\underline{f_M(\alpha\,\lambda u)} = \alpha\lambda\|u\| = \underline{\alpha\, f_M(\lambda u)},$$

a protože pro každé $x = \lambda u \in M$ `navíc` platí:

$$|f_M(x)| = |f_M(\lambda u)| = \big|\lambda\|u\|\big| = |\lambda| \cdot \|u\| = \|\lambda u\| = \|x\|,$$

je

$$f_M \in M^* \ \wedge \ \|f_M\|_{M^*} = 1.$$

Existence $f \in X^*$ daných vlastností teď plyne přímo z Hahnovy-Banachovy věty.

□

5.19 Pozorování. Z důsledku Hahnovy-Banachovy věty 5.18 vyplývá, že v každém `netriviálním` NLP X existuje `netriviální` spojitá lineární forma.

Dokonce platí, že prostor X^* je tak „bohatý“, že stačí k „rozlišení bodů“. Řekněme to přesněji.

Buď X NLP. Pak platí $$(\forall x, y \in X,\ x \neq y)\,(\exists f \in X^*) :\ f(x) \neq f(y).$$

Důkaz. Volme $u := x - y \in X \setminus \{0\}$. Pak existuje $f \in X^*$ takové, že $f(u) = \|u\|$, a proto

$$\underline{f(x) - f(y)} = f(x - y) = f(u) = \|u\| = \underline{\|x - y\| \neq 0}.$$

□

Toto pozorování lze ještě zobecnit.

5.20 Věta. *Nechť M je* **`vektorovým podprostorem`** *(ne nutně uzavřeným) NLP X a nechť $x \in X$ je takové, že*

$$d := \inf_{y \in M} \|x - y\| > 0.$$

Pak existuje $f \in X^*$ takové, že

- $f(x) = 1$,
- $\forall y \in M: \; f(y) = 0$,
- $\|f\| = \frac{1}{d}$.

Důkaz. Uvažujme vektorový podprostor

$$N = \{y + \lambda x : \; y \in M, \; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$\big($že N je skutečně vektorovým podprostorem plyne z 1.6 a z rovností:
$(y_1 + \lambda_1 x) + (y_2 + \lambda_2 x) = \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\in M} + \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)}_{\in \mathbb{R}} x, \;\; \alpha(y + \lambda x) = \underbrace{(\alpha y)}_{\in M} + \underbrace{(\alpha\lambda)}_{\in \mathbb{R}} x\big)$

a zobrazení $f_N : N \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$f_N(y + \lambda x) := \lambda.$$

Nejdříve ověřme, že f_N je **`lineární`**:

$$\underline{f_N\big((y_1 + \lambda_1 x) + (y_2 + \lambda_2 x)\big)} = f_N\big((y_1 + y_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)x\big) =$$

$$= \lambda_1 + \lambda_2 = \underline{f_N(y_1 + \lambda_1 x) + f_N(y_2 + \lambda_2 x)},$$

$$\underline{f_N\big(\alpha(y + \lambda x)\big)} = f_N\big((\alpha y) + (\alpha\lambda)x\big) = \alpha\lambda = \underline{\alpha f(y + \lambda x)}.$$

Nyní ukážeme, že f_N je **`omezené`**. Vlastně dokážeme:

$$\forall z \in N : \; |f_N(z)| \leqq \frac{1}{d}\|z\|.$$

Buď $z = y + \lambda x \in N$ dáno.

Je-li $\lambda \neq 0$, je

$$\|z\| = |\lambda| \cdot \Big\|\frac{y}{\lambda} + x\Big\| = |\lambda| \cdot \Big\|x - \underbrace{(-\frac{y}{\lambda})}_{\in M}\Big\| \geqq |\lambda|\, d,$$

a proto

$$|f_N(z)| = |\lambda| \leqq \frac{1}{d}\,\|z\|.$$

Je-li $\lambda = 0$, je

$$|f_N(z)| = 0 \leqq \frac{1}{d}\,\|z\|.$$

Zjistili jsme, že

$$f_N \in N^* \ \wedge\ \|f_N\| \leqq \frac{1}{d}.$$

Ukažme, že platí dokonce

$$\|f_N\| = \frac{1}{d}.$$

Buď (y_n) posloupnost v M taková, že

$$\|x - y_n\| \to d.$$

Pak

$$1 = f_N(x - y_n) \leqq \|f_N\| \cdot \|x - y_n\| \to \|f_N\| \cdot d,$$

a proto

$$\|f_N\| \geqq \frac{1}{d}.$$

K dokončení důkazu stačí aplikovat Hahnovu–Banachovu větu 5.17. □

5.21 Poznámka. Připomeňme si, že v NLP X jsme definovali konvergenci posloupnosti bodů následujícím způsobem:

$$\boxed{x_n \to x \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \|x_n - x\| \to 0.}$$

S tímto typem (tzv. <u>silné</u>) konvergence v aplikacích obvykle nevystačíme. Zavedení duálního prostoru X^* nám umožňuje zavést další typ (tzv. <u>slabé</u>) konvergence.

5.22 Definice. Buď (x_n) posloupnost v NLP X a buď $x \in X$. Řekneme, že <u>posloupnost</u> (x_n) <u>konverguje slabě k bodu</u> x a píšeme $x_n \rightharpoonup x$, platí-li

$$\forall f \in X^* : \ f(x_n) \to f(x).$$

5.23 Věta (o slabé konvergenci). *Buď X NLP. Pak v X platí:*

i) *každá posloupnost má nejvýš jednu slabou limitu,*

ii) $x_n \to x \;\Rightarrow\; x_n \rightharpoonup x$,

iii) $x_n \rightharpoonup x \;\Rightarrow\; (\exists k \in \mathbb{R}^+)\,(\forall n \in \mathbb{N}) : \;\|x_n\| \leqq k$

(tzn. (x_n) je omezená posloupnost),

iv) $x_n \rightharpoonup x \;\Rightarrow\; \|x\| \leqq \liminf \|x_n\|$.[a]

[a]Srovnejte toto tvrzení s již známým tvrzením: $x_n \to x \;\Rightarrow\; \|x\| = \lim \|x_n\|$.

Důkaz.

Ad i). Toto tvrzení dokažme sporem. Předpokládejme, že

$$x_n \rightharpoonup x,\; x_n \rightharpoonup y,\; x \neq y,$$

a vezměme $f \in X^*$ takové, že $f(x) \neq f(y)$ (existence takového f je zaručena – viz 5.19). Pak platí

$$\underline{f(x_n) \to f(x)},\; \underline{f(x_n) \to f(y)},\; \underline{f(x) \neq f(y)}.$$

A to je spor, protože posloupnost reálných čísel $\big(f(x_n)\big)$ nemůže mít dvě různé limity.

Ad ii). Předpokládejme, že $x_n \to x$, a buď $f \in X^*$ dáno. Pak přímo ze spojitosti f plyne

$$f(x_n) \to f(x).$$

Ad iii). Důkaz tvrzení, že každá slabě konvergentní posloupnost je omezená, je komplikovanější. Je založen na principu stejnoměrné omezenosti a ukážeme si ho později – viz stranu 60.

Ad iv). Je-li $\underline{x = 0}$, je tvrzení zřejmé. Je-li $\underline{x \neq 0}$, existuje $f \in X^*$ takové, že $\|f\| = 1$ a že $f(x) = \|x\|$ (viz 5.18). Z předpokladu $x_n \rightharpoonup x$ pak plyne:

$$\|x\| = f(x) = \lim f(x_n) = \liminf f(x_n) \leqq \liminf \big[\underbrace{\|f\|}_{=1} \cdot \|x_n\|\big] = \liminf \|x_n\|.$$

$\square$

5.24 Cvičení. Dokažte, že v každém normovaném lineárním prostoru X `konečné dimenze` platí:

$$x_n \to x \;\Leftrightarrow\; x_n \rightharpoonup x.$$

5.25 Příklady.

1) Buď $\{\mathrm{e}_n : \; n \in \mathbb{N}\}$ ortonormální systém v Hilbertově prostoru H.[1]
Pak
$$\forall u \in H : \; (\mathrm{e}_n, u) \to 0 = (0, u)$$
(viz Besselovu nerovnost ve větě 4.11), a proto (viz Rieszovu větu o reprezentaci 5.13)
$$\mathrm{e}_n \rightharpoonup 0.$$

Nyní ukažme sporem, že posloupnost (e_n) `není` v H `silně konvergentní`.
Nechť $\mathrm{e}_n \to x$. Pak $x = 0$ (viz tvrzení i) a ii) předcházející věty 5.23), a proto
$$1 = \|\mathrm{e}_n\| \to \|0\| = 0.$$
A to je spor. [2]

2) Uvažujme reálné posloupnosti
$$\mathrm{e}_n := 0, 0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n\text{-tý člen}}, 0, \; \ldots \; .$$
Dá se ukázat, že v každém z prostorů l^p, kde $1 < p < \infty$, platí
$$\mathrm{e}_n \rightharpoonup 0,$$
zatímco v prostoru l^1 posloupnost (e_n) vůbec slabě nekonverguje. (Dá se dokonce ukázat, že v prostoru l^1 platí: $x_n \to x \;\Leftrightarrow\; x_n \rightharpoonup x$.)

5.26 Věta. *Buď X normovaný lineární prostor. Pak*
$$\dim X < \infty \;\Leftrightarrow\; \text{z každé omezené posloupnosti lze vybrat}$$
$$\textbf{silně} \text{ konvergentní podposloupnost.}$$

[1] Například:
$$H = l^2, \; \mathrm{e}_n := 0, 0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n\text{-tý člen}}, 0, \ldots \; ,$$
nebo
$$H = L^2(0, \pi), \; \mathrm{e}_n(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx).$$

[2] Mohli jsme postupovat i jinak: protože
$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \; n \neq m : \; \|\mathrm{e}_n - \mathrm{e}_m\|^2 = (\mathrm{e}_n - \mathrm{e}_m, \mathrm{e}_n - \mathrm{e}_m) = \|\mathrm{e}_n\|^2 + \|\mathrm{e}_m\|^2 = 2,$$
není posloupnost (e_n) cauchyovská, a proto ani konvergentní (viz větu 2.4).

5.27 Věta (Eberleinova – Šmuljanova). *Buď X* `Banachův prostor`*. Pak*

$$X \text{ je reflexivní } \Leftrightarrow \text{ z každé omezené posloupnosti lze vybrat } \texttt{slabě} \text{ konvergentní podposloupnost.}$$

5.28 Cvičení. Uvažujme Banachův prostor $C(\langle 0,1\rangle)$ s normou $\|x\| := \sup\limits_{t\in\langle 0,1\rangle} |x(t)|$ a v něm posloupnost (f_n) definovanou předpisy

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx, & x \in \langle 0, \frac{1}{n}\rangle, \\ 0, & x \in (\frac{1}{n}, 1\rangle. \end{cases}$$

Dokažte, že (přestože posloupnost (f_n) `je v` $C(\langle 0,1\rangle)$ `omezená`) z posloupnosti (f_n) `nelze vybrat slabě konvergentní` podposloupnost. (Odtud a z věty 5.27 již plyne, že $C(\langle 0,1\rangle)$ `není reflexivní prostor`.)

5.29 Věta. *V libovolném Hilbertově prostoru platí:*

$$\left[x_n \rightharpoonup x \ \wedge \ \|x_n\| \to \|x\|\right] \ \Rightarrow \ x_n \to x.$$

Důkaz. Stačí si rozmyslet, že z předpokladů a z Rieszovy věty 5.13 plyne:

$$\|x_n - x\|^2 = (x_n - x, x_n - x) = \underbrace{\|x_n\|^2}_{\to\|x\|^2} + \|x\|^2 - 2 \underbrace{(x_n, x)}_{\to(x,x)=\|x\|^2} \to 0.$$

□

5.30 Věta (princip stejnoměrné omezenosti). *Nechť X je* `Banachův prostor`*, nechť Y je NLP a nechť $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

i) $\sup\{\|L\| : \ L \in \mathcal{G}\} < \infty$,

ii) $\forall x \in X : \ \sup\{\|Lx\| : \ L \in \mathcal{G}\} < \infty$.

Důkaz. Implikace i) ⇒ ii) je přímým důsledkem již známého tvrzení

$$\forall x \in X : \ \|Lx\| \leqq \|L\| \cdot \|x\|.$$

Důkaz tvrzení ii)⇒ i) je komplikovanější, opírá se o Baireovu větu 2.25.

Definujme pro každé $n \in \mathbb{N}$ množinu

$$M_n := \bigcap_{L \in \mathcal{G}} \{x \in X : \ \|Lx\| \leqq n\}.$$

Díky spojitosti normy i zobrazení L je každá z množin $\{x \in X : \ \|Lx\| \leqq n\}$ uzavřená. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je uzavřená i množina M_n (viz cvičení 2.13). Navíc: předpoklad ii) nám umožňuje tvrdit, že

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n,$$

a proto (viz Baireovu větu 2.25)

$$\exists m \in \mathbb{N} : \ \operatorname{int} \overline{M_m} = \operatorname{int} M_m \neq \emptyset.$$

To znamená, že existují $\delta > 0$ a $y \in M_m$, pro něž

$$U(y, 2\delta) := \{x \in X : \ \|x - y\| < 2\delta\} \subset M_m.$$

Buď nyní $L \in \mathcal{G}$ a $x \in X$, $\|x\| \leqq 1$, zvoleny libovolně. Pak

$$z := y + \delta x \in U(y, 2\delta) \subset M_m,$$

a proto (viz definici množiny M_m a skutečnost, že $z, y \in M_m$):

$$\|Lx\| = \Big\|L\Big(\frac{z-y}{\delta}\Big)\Big\| \leqq \frac{1}{\delta}\big(\|Lz\| + \|Ly\|\big) \leqq \frac{1}{\delta}(m+m) = \frac{2m}{\delta}.$$

Odtud a z definice normy v $\mathcal{L}(X, Y)$ již snadno plyne

$$\sup\{\|L\| : \ L \in \mathcal{G}\} \leqq \frac{2m}{\delta} \in \mathbb{R}.$$

$\square$

5.31 Věta (Banachova – Steinhausova). *Nechť X je* ***Banachův prostor****, nechť Y je NLP a nechť (L_n) je taková posloupnost v $\mathcal{L}(X, Y)$, že pro* ***každé*** *$x \in X$* ***existuje***

$$\lim L_n x =: Lx.$$

Pak

$$L \in \mathcal{L}(X, Y).$$

Důkaz. Linearita zobrazení L je zřejmá, protože pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ je

$$\underline{L(x+y)} = \lim L_n(x+y) = \lim(L_n x + L_n y) = \lim L_n x + \lim L_n y = \underline{Lx + Ly},$$

$$\underline{L(\alpha x)} = \lim L_n(\alpha x) = \lim(\alpha L_n x) = \alpha \lim L_n x = \underline{\alpha L x}.$$

Navíc: předpokládáme, že pro každé $x \in X$ existuje $\lim L_n x$, a proto

$$\forall x \in X : \ \sup\{\|L_n x\| : \ n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Odtud a z principu stejnoměrné omezenosti 5.30 plyne

$$\left(\exists k \in \mathbb{R}^+\right) (\forall n \in \mathbb{N}) : \ \|L_n\| \leqq k,$$

z čehož – díky spojitosti normy – snadno odvodíme

$$\left(\exists k \in \mathbb{R}^+\right) (\forall x \in X) : \ \underline{\|Lx\|} = \|\lim L_n x\| = \lim \|L_n x\| \leqq \underline{k\,\|x\|}.$$

Dokázali jsme, že lineární zobrazení L je omezené, a tudíž $\underline{L \in \mathcal{L}(X,Y)}$.

□

Na závěr této kapitoly splníme dříve uvedený slib a dokážeme tvrzení iii) věty 5.23, tj. implikaci:

$$\boxed{x_n \rightharpoonup x \ \Rightarrow \ \textit{posloupnost } (x_n) \textit{ je omezená.}}$$

Důkaz. Uvažujme kanonické vnoření $S : \ X \to X^{**}$ (viz 5.14). Pak

$$\forall f \in X^* : \ (Sx_n)(f) = f(x_n) \to f(x) = (Sx)(f),$$

a proto

$$\forall f \in X^* : \ \sup\left\{|(Sx_n)(f)| : n \in \mathbb{N}\right\} < \infty.$$

Odtud, z principu stejnoměrné omezenosti 5.30[1] a skutečnosti, že kanonické vnoření S je `izometrickým` izomorfismem X na $S(X)$, plyne

$$\left(\exists k \in \mathbb{R}^+\right) (\forall n \in \mathbb{N}) : \ \|Sx_n\| = \|x_n\| \leqq k.$$

□

[1] Připomeňme si, že X^* je úplný!

Kapitola 6

Diferenciální počet v NLP

6.1 Definice. Budiž

- X a Y normované lineární prostory,
- $f: X \to Y$,
- $x \in X$ vnitřní bod Df,
- $h \in X$.

Existuje-li limita

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda} =: D_h f(x),$$

nazýváme ji derivací f v bodě x ve směru h.

Existuje-li $D_h f(x)$ pro každé $h \in X$, nazýváme zobrazení

$$h \mapsto D_h f(x)$$

Gâteauxovým diferenciálem f v bodě x.

6.2 Poznámka. Existují zobrazení, jejichž Gâteauxův diferenciál v daném bodě

- `neexistuje`,
- existuje, ale `není lineárním` zobrazením,
- existuje a `je lineárním`, ale `ne spojitým` zobrazením.

6.3 Definice. Je-li zobrazení

$$h \mapsto D_h f(x)$$

spojitým lineárním zobrazením X do Y (tj. patří-li do $\mathcal{L}(X,Y)$), nazýváme toto zobrazení <u>Gâteauxovou</u> (<u>slabou</u>) <u>derivací</u> f v bodě x a značíme $Df(x)$.[a]

[a] Pro Gâteauxovu derivaci (existuje-li) tedy platí:

$$Df(x) \in \mathcal{L}(X,Y),$$

$$\forall h \in X : \ \big(Df(x)\big)(h) = D_h f(x) \in Y.$$

6.4 Příklady.

1) Buďte X a Y NLP a $f : X \to Y$ <u>lineární</u> na X.
Pak

$$\forall x, h \in X : \ D_h f(x) = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \frac{f(x) + \lambda f(h) - f(x)}{\lambda} = f(h),$$

a proto

- `není-li` f `spojité` na X, `neexistuje Gâteauxova derivace` f v `žádném` bodě $x \in X$ (viz příklad ii) na straně 44),
- je-li $f \in \mathcal{L}(X,Y)$, je $Df(x) = f$ pro `každé` $x \in X$.

2) Uvažujme Banachův prostor $X = C(\langle 0,1\rangle)$, $\|x\| := \sup\limits_{t \in \langle 0,1\rangle} |x(t)|$, a funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$ definovaný předpisem

$$f(x) := \int_0^1 x^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pak pro každé $x, h \in X$ platí

$$D_h f(x) = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \frac{\int_0^1 \big(x(t) + \lambda h(t)\big)^2 \,\mathrm{d}t - \int_0^1 x^2(t)\,\mathrm{d}t}{\lambda} =$$

$$= \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \int_0^1 2x(t)h(t)\,\mathrm{d}t + \underbrace{\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \int_0^1 \lambda h^2(t)\mathrm{d}t}_{=0,\ \text{protože}\ |\int_0^1 \lambda h^2(t)\,\mathrm{d}t| \leqq |\lambda|\cdot\|h\|^2} = \int_0^1 2x(t)h(t)\,\mathrm{d}t,$$

a protože zobrazení

$$h \mapsto D_h f(x) = \int_0^1 2x(t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

je zřejmě `lineární` a `omezené` $\left(\left|\int_0^1 2x(t)h(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqq 2\cdot\|x\|\cdot\|h\|\right)$, existuje pro každé $x\in X$ Gâteauxova derivace $Df(x)$ a platí

$$\forall h\in X:\ \big(Df(x)\big)(h) = \int_0^1 2x(t)h(t)\,\mathrm{d}t.$$

3) Buď $X = C(\langle 0,1\rangle)$ s normou $\|x\| := \sup\limits_{t\in\langle 0,1\rangle} |x(t)|$ a buď funkcionál $f : X\to\mathbb{R}$ definován předpisem

$$f(x) := \int_0^1 \sin(x(t))\,\mathrm{d}t.$$

Pak pro každé $x,h\in X$ a $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ platí[1]

$$\frac{f(x+\lambda h)-f(x)}{\lambda} = \int_0^1 \frac{\sin\big(x(t)+\lambda h(t)\big)-\sin x(t)}{\lambda}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 \cos\big(\xi_\lambda(t)\big)h(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 \cos\big(x(t)\big)h(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pro } \lambda\to 0.$$

Protože navíc zobrazení

$$h\mapsto \int_0^1 \cos\big(x(t)\big)h(t)\,\mathrm{d}t$$

je `lineární` a `omezené` $\left(\left|\int_0^1 \cos\big(x(t)\big)h(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqq \|h\|\right)$, je

$$\forall x,h\in X:\ \big(Df(x)\big)(h) = \int_0^1 \cos\big(x(t)\big)h(t)\,\mathrm{d}t.$$

[1]Stačí dvakrát aplikovat Lagrangeovu větu o střední hodnotě:

- $(\forall t\in\langle 0,1\rangle)\,(\exists \xi_\lambda(t)$ ležící mezi $x(t)$ a $x(t)+\lambda h(t))$:

$$\sin\big(x(t)+\lambda h(t)\big)-\sin\big(x(t)\big) = \sin'\big(\xi_\lambda(t)\big)\,\lambda\,h(t) = \cos\big(\xi_\lambda(t)\big)\,\lambda\,h(t);$$

-

$$\left|\int_0^1 \Big(\cos\big(\xi_\lambda(t)\big)-\cos\big(x(t)\big)\Big)h(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqq \int_0^1 \Big|\cos\big(\xi_\lambda(t)\big)-\cos\big(x(t)\big)\Big|\cdot|h(t)|\,\mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq \|h\|\int_0^1 \big|\xi_\lambda(t)-x(t)\big|\,\mathrm{d}t \leqq \|h\|\cdot|\lambda|\cdot\|h\| \to 0 \text{ pro } \lambda\to 0.$$

6.5 Definice. Budiž

- X a Y NLP,
- $f: X \to Y$,
- $x \in X$ vnitřní bod Df.

Řekneme, že f má v bodě x Fréchetův (totální) diferenciál, jestliže existuje `spojité lineární` zobrazení prostoru X do prostoru Y – budeme jej značit $f'(x)$ – takové, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \big(f'(x)\big)(h)}{\|h\|} = 0.$$

Zobrazení $f'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ se též nazývá Fréchetova (silná) derivace f v bodě x.

6.6 Pozorování.

i) *Z existence Fréchetovy derivace f v bodě x již vyplývá jednoznačnost zobrazení $f'(x)$ výše uvedených vlastností.*

Důkaz. Předpokládejme, že $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$ a že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L_1(h)}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L_2(h)}{\|h\|} = 0.$$

Potom taky

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x) - L_1(h)}{\|h\|} - \frac{f(x+h) - f(x) - L_2(h)}{\|h\|} \right] = \\ = \lim_{h \to 0} \frac{L_2(h) - L_1(h)}{\|h\|}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Buď nyní $h \in X$ libovolný bod.

- Je-li $h = 0$, je zřejmě $L_1(h) = L_2(h) = 0$ (L je lineární).
- Je-li $h \neq 0$, uvažujme posloupnost
$$h_n := \frac{1}{n} h.$$
Protože $0 \neq h_n \to 0$, plyne z (6.1), že
$$\frac{L_2(h_n) - L_1(h_n)}{\|h_n\|} = \frac{\frac{1}{n} L_2(h) - \frac{1}{n} L_1(h)}{\frac{1}{n}\|h\|} = \frac{L_2(h) - L_1(h)}{\|h\|} \to 0,$$
a proto $L_2(h) = L_1(h)$.

$\square$

ii) $f'(x)$ *existuje* $\Rightarrow$ *zobrazení* f *je spojité v bodě* x.

Důkaz.

$$\underline{x \neq x_n \to x} \;\Rightarrow\; 0 \neq x_n - x \to 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f\big(x + (x_n - x)\big) - f(x) - f'(x)(x_n - x)}{\|x_n - x\|} \to 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_n) - f(x) - \underbrace{f'(x)(x_n - x)}_{\to 0,\text{ protože } f'(x) \in \mathcal{L}(X,Y)} \to 0 \;\Rightarrow\; \underline{f(x_n) \to f(x)}.$$

□

iii) $f'(x)$ *existuje* $\Rightarrow Df(x)$ *existuje a platí* $Df(x) = f'(x)$.
(`Pozor!`, **`neplatí:`** $Df(x)$ existuje $\Rightarrow f'(x)$ existuje.[1])

Důkaz. Stačí si uvědomit, že pro každé $h \in X$, $h \neq 0$, je

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \left\| \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda} - f'(x)(h) \right\|_Y = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \left\| \frac{f(x + \lambda h) - f(x) - f'(x)(\lambda h)}{\lambda} \right\|_Y \cdot \frac{\|h\|_X}{\|h\|_X} =$$

$$= \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \frac{\|f(x + \lambda h) - f(x) - f'(x)(\lambda h)\|_Y}{\|\lambda h\|_X} \cdot \|h\|_X = 0,$$

a proto

$$\forall h \in X: \; \big(Df(x)\big)(h) = f'(x)(h).$$

□

6.7 Příklady.

1) Buď $\underline{f \in \mathcal{L}(X,Y)}$. Už víme (viz příklad 1) na straně 62 a předchozí pozorování): existuje-li pro nějaké $x \in X$ Fréchetova derivace $f'(x)$, je $f'(x) = f$. A protože pro každé $x \in X$ platí

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f(h)}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{\|h\|} = 0,$$

[1] Stačí volit:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\; f(x,y) := \begin{cases} 1, & y = x^2 \neq 0, \\ 0, & \text{jinde}. \end{cases}$$

Pak

- $Df(0) = 0$,
- $f'(0)$ neexistuje (funkce f není v 0 spojitá).

je

$$\forall x \in X:\ f'(x) = f.$$

2) Uvažujme

$$X = C(\langle 0,1\rangle),\ \|x\| := \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} |x(t)|,$$

$$f : X \to X,\ f(x)(t) := \sin\big(x(t)\big).$$

Pak pro každé $x \in X$ existuje $f'(x)$ a platí

$$(\forall x \in X)\,(\forall h \in X)\,(\forall t \in \langle 0,1\rangle):$$

$$f'(x) \in \mathcal{L}(X,X),$$
$$f'(x)(h) \in X,$$
$$\big(f'(x)(h)\big)(t) = \cos\big(x(t)\big)h(t).$$

Důkaz. Buď $x \in X$ libovolný bod. Definujme zobrazení $L:\ X \to X$ předpisem

$$(Lh)(t) = \cos\big(x(t)\big)h(t).$$

Máme dokázat, že $\underline{L = f'(x)}$.

Zobrazení L je zřejmě `lineární` a `omezené`:

$$\|Lh\| = \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} |(Lh)(t)| = \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} \big|\cos\big(x(t)\big)h(t)\big| \leqq \|h\|.$$

Navíc pro každé $h \in X$ platí (je třeba dvakrát použít šikovně Lagrangeovu větu o střední hodnotě):

$$\|f(x+h) - f(x) - Lh\| = \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} \big|\sin\big(x(t)+h(t)\big) - \sin\big(x(t)\big) - \cos\big(x(t)\big)h(t)\big| =$$

$$= \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} \big|\cos\big(\xi(t)\big)h(t) - \cos\big(x(t)\big)h(t)\big| \leqq \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} \big[|\xi(t) - x(t)|\cdot|h(t)|\big] \leqq$$

$$\leqq \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} \big[|h(t)|\cdot|h(t)|\big] = \|h\|^2,$$

a proto

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Lh\|}{\|h\|} = 0.$$

Dokázali jsme, že $\underline{f'(x) = L}$.

$\square$

3) Uvažujme nyní

$$X = L^2(0,1),\ \|x\| := \sqrt{\int_0^1 x^2(t)\,\mathrm{d}t},$$

$$f:\ X \to X,\ f(x)(t) := \sin\big(x(t)\big).$$

Pak `existuje` $Df(0)$ a platí

$$\underline{Df(0) = \mathrm{Id}},$$

tzn.

$$\forall h \in X:\ \big(Df(0)\big)(h) = D_h f(0) = h,$$

ale

$$\underline{\texttt{neexistuje}\ f'(0)}.$$

(Porovnejte s předchozím příkladem – máme zobrazení, pro něž `derivace závisí na volbě prostoru!`)

Náznak důkazu. Buďte $h \in X$ a $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zvoleny libovolně. Dá se ukázat, že

$$\left\|\frac{f(0+\lambda h) - f(0)}{\lambda} - h\right\| = \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{\sin\big(\lambda h(t)\big)}{\lambda} - h(t)\right)^2 \mathrm{d}t} \to 0 \text{ pro } \lambda \to 0,$$

tzn.

$$\forall h \in X:\ D_h f(0) = h,$$

a proto $\big($zobrazení $h \mapsto D_h f(0) = h$ patří do $\mathcal{L}(X,X)\big)$:

$$\underline{Df(0) = \mathrm{Id}}.$$

Zbývá nám dokázat, že $\underline{f'(0) \text{ neexistuje}}$.

Protože už víme, že $Df(0) = \mathrm{Id}$, stačí ukázat, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0) - h}{\|h\|} \text{ není rovna } 0.$$

Definujme nyní posloupnost (h_n) v prostoru X předpisem

$$h_n(t) := \begin{cases} 2\pi, & 0 \leqq t < \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \leqq t \leqq 1. \end{cases}$$

Pak

$$0 \neq \|h_n\| = \sqrt{\int_0^1 h_n^2(t)\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{n}} \to 0,$$

ale $\big($využitím faktu, že pro každé $t \in \langle 0,1\rangle$ je $\sin\big(h_n(t)\big) = 0\big)$

$$\frac{\|f(0+h_n) - f(0) - h_n\|}{\|h_n\|} = \frac{\sqrt{\int_0^1 \Big(\sin\big(h_n(t)\big) - h_n(t)\Big)^2 \,\mathrm{d}t}}{\|h_n\|} = \frac{\|h_n\|}{\|h_n\|} = 1 \not\to 0.$$

$\square$

6.8 Věta (o derivaci složeného zobrazení).
Nechť

- X, Y, Z *jsou NLP,*
- $f:\ X \to Y,\ g:\ Y \to Z,$
- $x \in X,\ h \in X,$
- *existují* $g'\big(f(x)\big)$ *a* $D_h f(x)$.

Potom existuje $D_h(g \circ f)(x)$ *a platí*

$$D_h(g \circ f)(x) = g'\big(f(x)\big)\big(D_h f(x)\big).$$

6.9 Důsledek. `Existuje-li` navíc $Df(x)$ resp. $f'(x)$, je

$$D(g \circ f)(x) = g'\big(f(x)\big) \circ Df(x)$$

resp.

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \circ f'(x).$$

6.10 Příklad. Uvažujme

$$X = C(\langle 0,1\rangle), \|x\| := \sup_{t \in \langle 0,1\rangle} |x(t)|,$$

$$F:\ X \to \mathbb{R},\ F(x) := \left(\int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t\right)^3.$$

Pak

$$F = g \circ f,$$

kde

$$f:\ X \to \mathbb{R},\ f(x) := \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(t) := t^3.$$

Protože

- $\forall x \in X: \ f'(x) = f$
  (f je zřejmě `lineární` a `spojité` – a viz příklad 1) na straně 65),
- $\forall x \in X: \ g'\big(f(x)\big) = 3\big(f(x)\big)^2$
  $\Big($tj. $(\forall x \in X)\,(\forall t \in \mathbb{R}): \ g'\big(f(x)\big)(t) = 3\big(f(x)\big)^2 t\Big)$,

je

$$\forall x \in X: \ F'(x) = (g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \circ f'(x) = 3\big(f(x)\big)^2 \circ f,$$

tzn.

$$(\forall x \in X)\,(\forall h \in X): \ \big(F'(x)\big)(h) = 3\left(\int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t.$$

6.11 Varovný příklad. Buď

$$f: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ f(x) := (x, x^2),$$

$$g: \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ g(x,y) := \begin{cases} x, \ y = x^2, \\ 0, \ y \neq x^2. \end{cases}$$

Pak (a to si rozmyslete podrobně!)

$$(g \circ f)'(0) = D(g \circ f)(0) = \mathrm{Id}, \ \text{tzn. } \forall h \in \mathbb{R}: \ \big(D(g \circ f)(0)\big)(h) = h,$$

$$Dg\big(f(0)\big) = Dg(0) = 0,$$

$$\forall h \in \mathbb{R}: \ \big(Df(0)\big)(h) = (h, 0),$$

tzn.

$$\texttt{neplatí} \ D(g \circ f)(0) = (Dg)\big(f(0)\big) \circ Df(0).$$

6.12 Věta.
Nechť

- *X a Y jsou NLP,*
- *$f: \ X \to Y$,*
- *$Df: \ X \to \mathcal{L}(X,Y)$ je* ***spojité zobrazení v bodě*** *$x \in X$*
  $\big($tzn. $x_n \to x \Rightarrow Df(x_n) \to Df(x)\big)$.

Pak ***existuje*** *$f'(x)$ (a platí $f'(x) = Df(x)$).*

6.13 Důsledek. Je-li navíc zobrazení Df `spojité na otevřené množině` $G \subset X$, existuje na G `Fréchetova derivace` f' a `je na` G `spojitá.`[1]

6.14 Definice. Buďte X NLP a $f: X \to \mathbb{R}$.
Řekneme, že f má v bodě $x \in X$ lokální minimum resp. ostré lokální minimum, existuje-li $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\forall y \in U(x, \varepsilon): \ f(x) \leqq f(y)$$

resp.

$$\forall y \in P(x, \varepsilon) := U(x, \varepsilon) \setminus \{x\}: \ f(x) < f(y).$$

6.15 Poznámka. Skoro každému je jasné, jak je definované lokální maximum resp. ostré lokální maximum.

6.16 Věta (Eulerova nutná podmínka existence lokálního extrému).
Nechť

- *X je NLP,*
- *$f: X \to \mathbb{R}$,*
- *f má v bodě $x \in X$* ***lokální extrém*** *(tzn. lokální minimum nebo lokální maximum),*
- *$h \in X$ je takové, že existuje $D_h f(x)$.*

Pak

$$D_h f(x) = 0.$$

Důkaz. Uvažujme funkci

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ g(\lambda) := f(x + \lambda h).$$

Pak

- g má lokální extrém v 0 (protože f má lokální extrém v x),
- existuje $g'(0)$ (protože existuje $D_h f(x)$).

[1] Píšeme $f \in C^1(G)$.

Odtud snadno plyne, že
$$0 = g'(0) = D_h f(x).$$

□

Všimněme si, že uvedená nutná podmínka je zobecněním známého tvrzení o lokálních extrémech funkcí z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$. Ukažme si i zobecnění tzv. postačující podmínky. K tomu ovšem potřebujeme i derivace vyšších řádů. Pro jednoduchost se omezíme pouze na Fréchetovy derivace.

6.17 Definice. Nechť

- X a Y jsou NLP,
- $f: X \to Y$,
- f' existuje na nějakém okolí bodu $x \in X$ $\big(f': X \to \mathcal{L}(X,Y)\big)$.

Existuje-li Fréchetova derivace zobrazení f' v bodě x, nazýváme ji druhou Fréchetovou derivací f v bodě x a značíme $f''(x)$.

(Podobně lze definovat Fréchetovy derivace vyšších řádů.)

6.18 Poznámka. Pro vyšší derivace se situace stává poněkud nepřehlednou, neboť

$$f: X \to Y;$$
$$f'(x) \in \mathcal{L}(X,Y),\ f': X \to \mathcal{L}(X,Y);$$
$$f''(x) \in \mathcal{L}\big(X, \mathcal{L}(X,Y)\big),\ f'': X \to \mathcal{L}\big(X, \mathcal{L}(X,Y)\big);$$
$$f'''(x) \in \mathcal{L}\Big(X, \mathcal{L}\big(X, \mathcal{L}(X,Y)\big)\Big),\ f''': X \to \mathcal{L}\Big(X, \mathcal{L}\big(X, \mathcal{L}(X,Y)\big)\Big);$$
$$\vdots$$

Dá se však ukázat, že výše uvedené prostory $\mathcal{L}\big(X, \mathcal{L}(X,Y)\big)$, $\mathcal{L}\Big(X, \mathcal{L}\big(X, \mathcal{L}(X,Y)\big)\Big)$, ... lze ztotožnit s prostory tzv. multilineárních zobrazení.

`Speciálně:`
$$f''(x) \in \mathcal{L}\big(X, \mathcal{L}(X,Y)\big) \cong \mathcal{L}(X \times X, Y).$$

6.19 Věta (Lagrangeova postačující podmínka existence lok. extrému). *Nechť*

- *X je NLP,*
- *$f:\ X \to \mathbb{R}$,*
- *$x \in X$ je kritickým bodem f (tzn. $f'(x) = 0$),*
- *f'' je* **spojitá na** *nějakém* **okolí** *bodu x.*

Pak platí:

i) *existuje-li $\alpha \in \mathbb{R}^+$ takové, že*

$$\forall h \in X:\ \big(f''(x)(h)\big)(h) \cong f''(x)(h,h) \geqq \alpha\|h\|^2,$$

má f v bodě x **ostré lokální minimum;**

ii) *existuje-li $\alpha \in \mathbb{R}^+$ takové, že*

$$\forall h \in X:\ \big(f''(x)(h)\big)(h) \cong f''(x)(h,h) \leqq -\alpha\|h\|^2,$$

má f v bodě x **ostré lokální maximum.**

Snad hezké a určitě užitečné příklady na závěr.

6.20 Příklad. Uvažujme okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ v } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Tato úloha může popisovat (např.) stacionární rozložení teploty v tenké tyči, na jejichž koncích udržujeme nulovou teplotu:

$$u = u(x) \ldots \texttt{ teplota v příčném řezu},$$

$$f = f(x) \ldots \text{souvisí s } \texttt{tepelnými zdroji uvnitř tyče}.$$

Uvažujeme-li – `fyzikálně rozumný` – případ, kdy rozložení zdrojů `není spojité` – např.

$$f(x) := \begin{cases} 1,\ x \in \langle 0, \frac{1}{2}), \\ -1,\ x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle, \end{cases}$$

`neexistuje klasické řešení` dané úlohy.

Je proto přirozené pojem řešení zobecnit.
Naznačme, jak lze postupovat:

Předpokládejme nejdříve, že u je klasickým řešením úlohy (6.2), tzn. že

$$u \in C^2(\langle 0,1\rangle),$$
$$\forall x \in \langle 0,1\rangle : \; -u''(x) = f(x),$$
$$u(0) = u(1) = 0.$$

Pak pro každou funkci $v \in C^1(\langle 0,1\rangle)$ takovou, že $v(0) = v(1) = 0$, platí

$$\int_0^1 -u''(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

(oba (Riemannovy) `integrály existují` – integrujeme spojité funkce).

Upravme integrál na levé straně pomocí „per partes“:

$$\int_0^1 -u''(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{[-u'(x)v(x)]_0^1}_{=0,\text{ protože } v(0)=v(1)=0} + \int_0^1 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy – řešení u musí pro každou výše popsanou funkci v splňovat rovnost

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6.3}$$

Tento vztah, ve kterém se již nevyskytuje u'', lze vzít za základ definice tzv. slabého řešení úlohy (6.2).

Mimochodem: velmi často je výsledkem fyzikálních úvah (pomocí nichž se snažíme sestavit model – rovnici popisující nějaký jev) právě analogická „integrální rovnice“. K diferenciální rovnici se dostáváme za `dodatečného` předpokladu hladkosti řešení (v našem případě: $u \in C^2(\langle 0,1\rangle)$). Definovat řešení daného problému pomocí té integrální rovnice je tak v jistém smyslu přirozenější a správnější.

Podstatnou je otázka, kde – tj. `v jakém prostoru` – máme řešení našeho problému hledat.

Nabízí se nám vektorový prostor

$$C_0^1(\langle 0,1\rangle) := \{u \in C^1(\langle 0,1\rangle) : \; u(0) = u(1) = 0\}.$$

Funkce z tohoto prostoru splňují okrajové podmínky a spojitost jejich derivací se nám „hodí“ pro existenci integrálů v příslušné integrální rovnici (6.3).

Jakou však máme na $C_0^1(\langle 0,1\rangle)$ zvolit normu? Zvolíme-li normu

$$\|x\| := \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} |x(t)| + \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} |x'(t)|,$$

získáme sice Banachův prostor, ale tato norma jistě neodpovídá „duchu“ dané integrální rovnice.

Ukazuje se užitečným definovat na $C_0^1(\langle 0,1\rangle)$ takovýto `skalární součin` (ten již `indukuje` „šikovnější“ `normu`):

$$(u,v) := \int_0^1 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6.4}$$

Přesvědčme se (přímo z definice 4.1), že vztah (6.4) skutečně definuje na $C_0^1(\langle 0,1\rangle)$ skalární součin:

- $\forall v \in C_0^1(\langle 0,1\rangle):\ \ u \mapsto \int_0^1 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ je lineární zobrazení,
- $\forall u,v \in C_0^1(\langle 0,1\rangle):\ \int_0^1 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 v'(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$,
- $\forall u \in C_0^1(\langle 0,1\rangle):\ \int_0^1 \big(u'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x \geqq 0$,

  $u \equiv 0 \ \Rightarrow\ \int_0^1 \big(u'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = 0$,

  $\int_0^1 \big(u'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow u' \equiv 0 \Rightarrow \big[u \text{ je konstantní} + \text{předp. } u(0)=0\big] \Rightarrow u \equiv 0.$

Dá se ukázat, že $C_0^1(\langle 0,1\rangle)$ s indukovanou normou

$$\|u\| := \sqrt{\int_0^1 \big(u'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x}$$

není úplný prostor.

Definujme <u>Sobolevův prostor</u> $W_0^{1,2}(0,1)$ jako zúplnění prostoru $C_0^1(\langle 0,1\rangle)$ vzhledem k výše uvedené normě.

Je tedy $W_0^{1,2}(0,1)$ `Hilbertovým` prostorem.

Navíc se dá ukázat, že

$$W_0^{1,2}(0,1) \subset C(\langle 0,1\rangle)$$

a že pro každé $f \in L^2(0,1)$ je zobrazení

$$F(v) := \int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

`spojitým lineárním funkcionálem na` $W_0^{1,2}(0,1)$.[1]

Nyní přistupme k definici slabého řešení.

[1]Integrály vystupující v definici funkcionálu $F \in \Big(W_0^{1,2}(0,1)\Big)^*$ a v dalším jsou ovšem integrály Lebesgueovy; plné pochopení tohoto a následujícího příkladu tak bude možné až později. Zvědaví čtenáři však mohou nahlédnout už teď do textu [1].

6.21 Definice. Buď $f \in L^2(0,1)$. Funkci $u \in W_0^{1,2}(0,1)$ nazýváme slabým řešením okrajové úlohy (6.2), platí-li

$$\forall v \in W_0^{1,2}(0,1): \int_0^1 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

6.22 Věta. *Ať $f \in L^2(0,1)$. Pak* **existuje právě jedno** *slabé řešení úlohy* (6.2).

Ukažme si dva různé důkazy této věty.

Důkaz 1. Už víme, že zobrazení $v \mapsto \int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ je prvkem $\left(W_0^{1,2}(0,1)\right)^*$. **Existuje** proto (viz Rieszovu větu o reprezentaci 5.13) **právě jedno** $u \in W_0^{1,2}(0,1)$ takové, že

$$\forall v \in W_0^{1,2}(0,1): \int_0^1 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = (u,v) = \int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Důkaz 2.

a) Existence slabého řešení.

Definujme funkcionál $J: W_0^{1,2}(0,1) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_0^1 \left(u'(x)\right)^2 \mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)u(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pak

$$\forall u, v \in W_0^{1,2}(0,1): J'(u)(v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x,$$

a proto

$$u \text{ je slabým řešením úlohy (6.2)} \iff J'(u) = 0. \tag{6.5}$$

Nyní si uvědomme, že **stačí**, dokážeme-li, že J **nabývá** na $W_0^{1,2}(0,1)$ **svého minima**, tzn.

$$\exists u \in W_0^{1,2}(0,1): J(u) = \inf_{v \in W_0^{1,2}(0,1)} J(v).$$

Potom totiž J má v bodě u i lokální minimum, a proto (viz Eulerovu nutnou podmínku 6.16) $J'(u) = 0$ (a viz (6.5)).

Všimněme si, že z omezenosti zobrazení $v \mapsto \int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ plyne

$$\left(\exists k \in \mathbb{R}^+\right)\left(\forall v \in W_0^{1,2}(0,1)\right): J(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \geqq \frac{1}{2}\|v\|^2 - k\cdot\|v\|,$$

a proto

- $\inf\limits_{v \in W_0^{1,2}(0,1)} J(v) := d \in \mathbb{R}$ ... funkcionál J je zdola omezený,
- $\lim\limits_{\|v\| \to \infty} J(v) = +\infty$ ... funkcionál J je slabě koercivní.

Nyní uvažujme posloupnost (u_n) na $W_0^{1,2}(0,1)$ takovou, že

$$J(u_n) \to d$$

(taková `existuje`!). Tato posloupnost je jistě omezená (J je slabě koercivní), a proto ($W_0^{1,2}(0,1)$ je `Hilbertův`, a tedy `reflexivní prostor` – viz stranu 52) existuje $u \in W_0^{1,2}(0,1)$ a posloupnost vybraná z posloupnosti (u_n) – značme ji stejně – taková, že

$$u_n \rightharpoonup u$$

(viz `Eberleinovu-Šmuljanovu větu` na straně 58).

A dál je to snadné: $u_n \rightharpoonup u$, a proto

$$\|u\| \leqq \liminf \|u_n\| \text{ (viz tvrzení iv) věty 5.23)},$$

$$\int_0^1 f(x) u_n(x) \, \mathrm{d}x \to \int_0^1 f(x) u(x) \, \mathrm{d}x.$$

Navíc předpokládáme, že

$$d = \lim J(u_n) = \liminf J(u_n) = \liminf \left[\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_0^1 f(x) u_n(x) \, \mathrm{d}x \right] =$$

$$= \liminf \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_0^1 f(x) u(x) \, \mathrm{d}x \geqq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_0^1 f(x) u(x) \, \mathrm{d}x = J(u),$$

a proto

$$J(u) = d = \inf_{v \in W_0^{1,2}(0,1)} J(v).$$

b) Jednoznačnost slabého řešení.

Buďte $u_1, u_2 \in W_0^{1,2}(0,1)$ slabá řešení (6.2). Pak

$$\|u_1 - u_2\|^2 = \int_0^1 (u_1 - u_2)'(u_1 - u_2)' \, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 u_1'(u_1 - u_2)' \, \mathrm{d}x - \int_0^1 u_2'(u_1 - u_2)' \, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 f(u_1 - u_2) \, \mathrm{d}x - \int_0^1 f(u_1 - u_2) \, \mathrm{d}x = 0,$$

a proto

$$u_1 = u_2.$$

□

6.23 Příklad. Uvažujme okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -u''(x) + u^3(x) = f(x), \ x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{6.6}$$

kde $f \in L^2(0,1)$.

Slabým řešením úlohy (6.6) nazýváme funkci $u \in W_0^{1,2}(0,1)$ takovou, že

$$\forall v \in W_0^{1,2}(0,1) : \int_0^1 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 u^3(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

6.24 Tvrzení. Existuje slabé řešení úlohy (6.6).

Důkaz jenom naznačíme.
Buď

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_0^1 \big(u'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_0^1 u^4(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)u(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\big(J : \ W_0^{1,2}(0,1) \to \mathbb{R}\big)\,.$$

Pak pro každé $u, v \in W_0^{1,2}(0,1)$ platí:

- $J'(u)(v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 u^3(x)v(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x$, a proto
$$u \text{ je slabým řešením (6.6)} \ \Leftrightarrow \ J'(u) = 0;$$
- $J(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 + \frac{1}{4}\int_0^1 v^4(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \geqq \frac{1}{2}\|v\|^2 - k\cdot\|v\|$, a proto
$$J \text{ je } \texttt{zdola omezený} \text{ a } \texttt{slabě koercivní}.$$

Navíc se dá dokázat, že J je slabě zdola polospojitý fukcionál, tzn.

$$u_n \rightharpoonup u \ \Rightarrow \ J(u) \leqq \liminf J(u_n).$$

A zbývající část důkazu je stejná jako v předchozím příkladu. Najdeme posloupnost (u_n) ve $W_0^{1,2}(0,1)$ takovou, že

$$J(u_n) \to \inf_{v \in W_0^{1,2}(0,1)} J(v) \in \mathbb{R}!$$

Tato posloupnost je nutně omezená (J je `slabě koercivní`), a proto z ní lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost[1] (viz Eberleinovu-Šmuljanovu větu). Získáme tak posloupnost (u_n) ve $W_0^{1,2}(0,1)$ a bod $u \in W_0^{1,2}(0,1)$ tak, že

[1] Opět ji značme stejně.

- $J(u_n) \to \inf\limits_{v \in W_0^{1,2}(0,1)} J(v) \in \mathbb{R}$,
- $u_n \rightharpoonup u$.

Odtud plyne (J je `slabě zdola polospojitý`), že

$$J(u) \leqq \liminf J(u_n) = \inf_{v \in W_0^{1,2}(0,1)} J(v),$$

$$J(u) = \inf_{v \in W_0^{1,2}(0,1)} J(v).$$

Funkcionál J má zřejmě v bodě u i lokální minimum, a protože existuje $J'(u)$, je $J'(u) = 0$ (viz Eulerovu nutnou podmínku 6.16).

$\square$

Literatura

[1] J. Bouchala: *Variační metody*, http://mi21.vsb.cz/, 2011.

[2] P. Drábek, A. Kufner: *Úvod do funkcionální analýzy*, skripta ZČU, Plzeň, 1993.

[3] P. Drábek, A. Kufner: *Funkcionální analýza*, skripta ZČU, Plzeň, 1994.

[4] P. Drábek, J. Milota: *Methods of Nonlinear Analysis (Applications to Differential Equations)*, Birkhäuser Verlag AG, Berlin, 2007.

[5] S. Fučík, A. Kufner: *Nelineární diferenciální rovnice*, SNTL, Praha, 1978.

[6] S. Fučík, J. Milota: *Matematická analýza II*, skripta UK, Praha, 1980.

[7] J. Lukeš: *Zápisky z funkcionální analýzy*, skripta UK, Karolinum, Praha, 1998.

[8] E. Zeidler: *Applied Functional Analysis (Applications to Mathematical Physics)*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[9] E. Zeidler: *Applied Functional Analysis (Main Principles and Their Applications)*, Springer-Verlag, New York, 1995.

Rejstřík