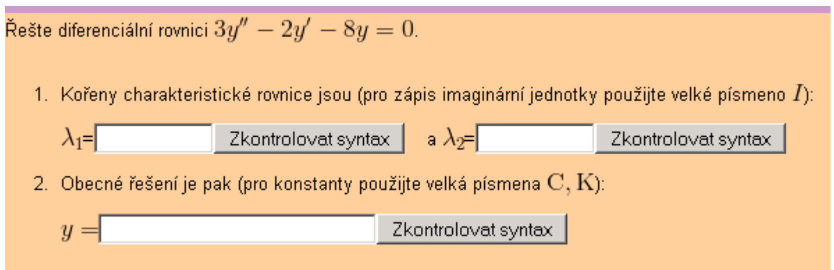
1 Homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

Příklad 1.

Řešte rovnici
$$3y'' - 2y' - 8y = 0.$$



Řešte diferenciální rovnici $3y'' - 2y' - 8y = 0$.

1. Kořeny charakteristické rovnice jsou (pro zápis imaginární jednotky použijte velké písmeno I):

λ_1= Zkontrolovat syntax a λ_2= Zkontrolovat syntax

2. Obecné řešení je pak (pro konstanty použijte velká písmena C, K):

$y =$ Zkontrolovat syntax

Obrázek 1: Zadání příkladu v elektronickém odpovědníku IS MU.

Řešení:

1. Charakteristická rovnice pro danou rovnici je
$$3\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0.$$
Její kořeny jsou
$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+96}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{6} \quad \Longrightarrow \lambda_1 = -\frac{4}{3}, \lambda_2 = 2.$$
Charakteristická rovnice má tedy dva reálné různé kořeny, v testu IS MU zapíšeme do odpovědních políček λ_1 = `-4/3`, λ_2 = `2`.

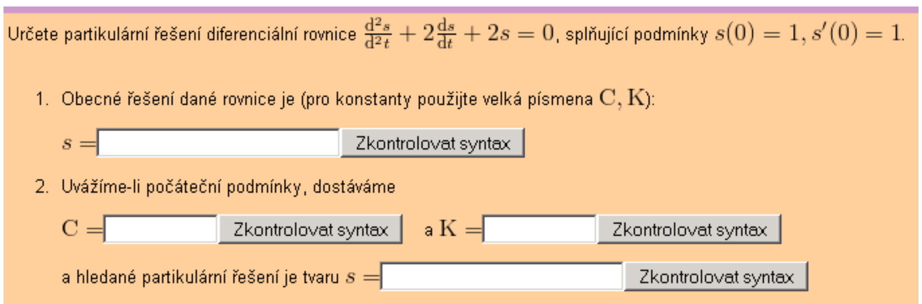
2. Ke každému kořenu charakteristické rovnice přísluší jedno řešení:
$$y_1(x) = e^{-\frac{4}{3}x} \quad \text{a} \quad y_2(x) = e^{2x}.$$
Obecné řešení zadané rovnice je tedy
$$y = \mathrm{C}_1 \mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x} + \mathrm{C}_2 \mathrm{e}^{2x}.$$
Výsledek v testu IS MU zapíšeme jako y = `C*exp(-4/3*x)+K*exp(2*x)`.

Příklad 2.

Určete partikulární řešení diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}^2 t} + 2\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + 2s = 0,$$

splňující podmínky $s(0) = 1, s'(0) = 1$.



Určete partikulární řešení diferenciální rovnice $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}^2 t} + 2\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + 2s = 0$, splňující podmínky $s(0) = 1, s'(0) = 1$.

1. Obecné řešení dané rovnice je (pro konstanty použijte velká písmena C, K):

   $s =$ Zkontrolovat syntax

2. Uvážíme-li počáteční podmínky, dostáváme

   $\mathrm{C} =$ Zkontrolovat syntax a $\mathrm{K} =$ Zkontrolovat syntax

   a hledané partikulární řešení je tvaru $s =$ Zkontrolovat syntax

Obrázek 2: Zadání příkladu v elektronickém odpovědníku IS MU.

Řešení:

1. Charakteristická rovnice

   $$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

   má dva komplexně sdružené kořeny

   $$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} \quad \Longrightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm i.$$

   Obecné řešení zadané rovnice je pak

   $$y = e^{-t}(\mathrm{C}_1 \cos(t) + \mathrm{C}_2 \sin(t))$$

   a v testu IS MU je zapíšeme jako $s =$ `exp(-t)*(C*cos(t)+K*sin(t))`.

2. Uvážíme-li počáteční podmínky, s přihlédnutím k

   $$s' = e^{-t}(-\mathrm{C}_1 \cos(t) - \mathrm{C}_2 \sin(t) - \mathrm{C}_1 \sin t + \mathrm{C}_2 \cos t),$$

   pak pro konstanty $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ dostáváme rovnice

   $$\begin{aligned} 1 &= e^0(\mathrm{C}_1 \cos 0 + \mathrm{C}_2 \sin 0) \\ 1 &= e^0(-\mathrm{C}_1 \cos 0 - \mathrm{C}_2 \sin 0 - \mathrm{C}_1 \sin 0 + \mathrm{C}_2 \cos 0) \end{aligned}$$

upravíme

$$
\begin{aligned}
1 &= \mathrm{C}_1 \\
1 &= -\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = 2
\end{aligned}
$$

a dostáváme hledané partikulární řešení

$$s = \mathrm{e}^{-t}(\cos t + 2\sin t).$$

Výsledek v testu IS MU zapíšeme jako $s =$ `exp(-t)*(cos(t)+2*sin(t))`.