1. Grassmannovy variety

Grassmannova varieta $G(k,n)$ má velice bohatou strukturu. Začneme s tím, že ji popíšeme jako množinu, teprve poté ji nadefinujeme jako projektivní varietu. Jako množina je $G(k,n)$ množina všech k-rozměrných podprostorů ve vektorovém prostoru $\mathbb{K}^n$. Je-li $(v_1,\dots,v_k)$ lineárně nezávislá k-tice vektorů z $\mathbb{K}^n$, pak označme $[v_1,\dots,v_k]$ vektorový podprostor jimi generovaný. Máme tak zobrazení

$$(\mathbb{K}^n)^k \supseteq V(k,n) \xrightarrow{\gamma} G(k,n)$$

a $G(k,n)$ je jistý kvocient definičního oboru $V(k,n)$ (tj. množiny lineárně nezávislých k-tic vektorů). Není špatné si uvědomit, že se jedná o kvocient podle akce grupy $\mathrm{GL}(k)$ lineárních izomorfismů $\mathbb{K}^k$, která působí na k-ticích vektorů pomocí maticového násobení, tj. nahradí tuto k-tici jinou, složenou z odpovídajících lineárních kombinací,

$$(v_1,\dots,v_k)(a_{ij}) = (\sum v_i a_{i1},\dots,\sum v_i a_{ik}).$$

Našim cílem nyní bude $G(k,n)$ popsat jako podmnožinu nějakého projektivního prostoru. K tomu využijeme vnější mocninu $\Lambda^k\mathbb{K}^n$ vektorového prostoru $\mathbb{K}^n$. Platí totiž, že vnější součin $v_1\wedge\cdots\wedge v_k$ se při změně báze změní pouze vynásobením skalárem (konkrétně při změně o akci matice A se součin vynásobí $\det A$). Zobrazení

$$G(k,n) \longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^k\mathbb{K}^n), \quad [v_1,\dots,v_k] \longmapsto [v_1\wedge\cdots\wedge v_k]$$

je tedy dobře definované, nazývá se Plückerovo vložení. Ukážeme nyní, že je injektivní a jeho obrazem je projektivní varieta. K obojímu se budeme snažit z tenzoru $\omega = v_1\wedge\cdots\wedge v_k$ získat zpět podprostor $[v_1,\dots,v_k]$. Definujme zobrazení

$$\varphi_\omega : \mathbb{K}^n \longrightarrow \Lambda^{k+1}\mathbb{K}^n, \quad v \longmapsto \omega\wedge v.$$

Zřejmě platí

$$[v_1,\dots,v_k] = \ker\varphi_\omega,$$

neboť $v_1\wedge\cdots\wedge v_k\wedge v = 0$, právě když $v_1,\dots,v_k,v$ jsou lineárně závislé. Z tohoto ihned plyne injektivita Plückerova vložení. Popišme nyní jeho obraz pomocí polynomiálních rovnic. Hlavní ideou je, že jádro zobrazení φ_ω má vždy dimenzi nejvýše k. Platí totiž:

Lemma 1.1. *Jsou-li $u_1,\dots,u_r$ lineárně nezávislé, pak $u_1,\dots,u_r\in\ker\varphi_\omega$, právě když*

$$\omega = u_1\wedge\cdots\wedge u_r\wedge\omega'.$$

Důkaz. Doplňme $u_1,\dots,u_r$ do báze $\mathbb{K}^n$. Potom $u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_k}$ s $i_1<\cdots<i_k$ tvoří bázi $\Lambda^k\mathbb{K}^n$. Zapíšeme-li ω v této bázi, je podmínka $u_i\in\ker\varphi_\omega$, tj. $\omega\wedge u_i = 0$ ekvivalentní tomu, že všechny koeficienty u bázových prvků, ve kterých se nevyskytuje u_i, jsou nulové. Proto se ve všech členech musí vyskytovat všechna $u_1,\dots,u_r$ a ω má kýžený tvar. □

Vidíme tedy, že obrazem Plückerova vložení jsou právě ta $\omega\in\Lambda^k\mathbb{K}^n$, pro něž $\ker\varphi_\omega$ má dimenzi alespoň k (přitom větší dimenzi mít nemůže) nebo ekvivalentně φ_ω má hodnost nejvýše $n-k$. To lze říct také tak, že matice φ_ω má všechny minory řádu $n-k+1$ nulové. Protože jsou tyto minory polynomiální výrazy v souřadnicích projektivního prostoru $\mathbb{P}(\Lambda^k\mathbb{K}^n)$, je obrazem Plückerova vložení projektivní varieta. Odteď budeme vždy $G(k,n)$ uvažovat jako varietu v $\mathbb{P}(\Lambda^k\mathbb{K}^n)$.

V následujícím budeme potřebovat, že $G(k,n)$ je ireducibilní. To se jednoduše vidí pomocí zobrazení $\gamma : V(k,n)\to G(k,n)$ definovaného výše. Toto zobrazení je zřejmě regulární a surjektivní (stačilo by i dominantní). Protože je $(\mathbb{K}^n)^k$, a tedy i $V(k,n)$, ireducibilní, bude ireducibilní i obraz $G(k,n)$.

V následujícím se nám bude hodit, že zobrazení γ je otevřené. Základní příklad otevřeného zobrazení v topologii je projekce součinu $X \times Y \to X$ (v algebraické geometrii se toto musí dokázat znovu, protože součin má více otevřených množin). Jednoduchým zobecněním jsou pak tzv. bandly, které vypadají jako součin pouze lokálně. Naše zobrazení je bandl, jak za chvíli ukážeme.

Lemma 1.2. *Nechť X a Y jsou kvaziprojektivní variety. Pak je projekce $X \times Y \to X$ otevřená.*

Důkaz. Tvrzení stačí dokázat pro projektivní variety, protože zúžení otevřeného zobrazení na otevřené podmnožiny je otevřené. Nechť je $\pi : U \subseteq X \times Y$ bázová otevřená množina, tedy doplněk $U = (X \times Y) \smallsetminus V(g)$ nulové množiny nějakého polynomu $g = g(x,y)$. Potom $x \in X$ neleží v $\pi(U)$ právě když $g(x,-)$ je nulový na celém Y, tj. $g(x,-) \in I(Y)$. To je ale lineární podmínka na koeficienty $g(x,-) \in K[y_0,\dots,y_m]$, které závisí polynomiálně na $x_0,\dots,x_n$. $\square$

Uvažujme podmnožinu $\widehat{U} \subseteq V(k,n)$ danou k-ticemi $(v_1,\dots,v_k)$, jejichž projekce do $\mathbb{K}^k$ tvořeného prvními k souřadnicemi jsou lineárně nezávislé. Jejich vhodnou kombinací, tj. vynásobením vhodnou invertibilní maticí A, můžeme dosáhnout toho, že tyto projekce tvoří standardní bázi $\mathbb{K}^k$. To znamená

$$(v_1,\dots,v_k)A^{-1} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix} = (e_1 + w_1, \dots, e_k + w_k)$$

Potom $[v_1,\dots,v_k] = [e_1 + w_1,\dots,e_k + w_k]$ a navíc báze $(e_1 + w_1,\dots,e_k + w_k)$ uvedeného tvaru (projekce do $\mathbb{K}^k$ dávají kanonickou bázi) je jediná. To znamená, že zobrazení

$$(\mathbb{K}^{n-k})^k \longrightarrow G(k,n), \quad (w_1,\dots,w_k) \longmapsto [e_1 + w_1,\dots,e_k + w_k]$$

je regulární bijekce a není těžké napsat předpis pro jeho inverzi, která je regulární na jisté otevřené množině $U \subseteq G(k,n)$, konkrétně na obraze předchozího zobrazení. Vzhledem k tomu, jak jsme tento izomorfismus odvodili, je zřejmé, že $\gamma(\widehat{U}) = U$ a při uvedené identifikaci $U \cong (\mathbb{K}^{n-k})^k$ má zobrazení předpis

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \longmapsto BA^{-1}.$$

Ač to tak na první pohled možná nevypadá, jedná se o projekci. To je dáno tím, že $\widehat{U} \cong (\mathbb{K}^{n-k})^k \times \mathrm{GL}(k)$ pomocí

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \longmapsto (BA^{-1}, A).$$

Shrňme situaci následujícím diagramem

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^{(n-k)k} \times \mathrm{GL}(k) \arrow[d, "\mathrm{pr}"'] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \widehat{U} \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & V(k,n) \arrow[d, "\gamma"] \\
\mathbb{K}^{(n-k)k} \arrow[r, phantom, "\cong"] & U \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & G(k,n)
\end{tikzcd}$$

Konstrukci lze provést i s jinými složkami než právě s prvními k. Vzniklé množiny U pokrývají $G(k,n)$ a množiny $\widehat{U}$ pokrývají $V(k,n)$. Jelikož je každé zúžení $\widehat{U} \to U$ otevřené, jednoduše se ukáže, že i celé $\gamma : V(k,n) \to G(k,n)$ je otevřené.

Projektivní verze Grassmannovy variety je varieta k-rozměrných projektivních podprostorů, kterým budeme v dalším říkat k-roviny, v $\mathbb{P}^n$. To je ale to samé, co $(k+1)$-rozměrné vektorové prostory v $\mathbb{K}^{n+1}$, budeme tedy značit

$$\mathbb{G}(k,n) = G(k+1, n+1).$$

Nad $\mathbb{G}(k,n)$ krom $\mathbb{V}(k,n)$ existuje ještě celá řada dalších bandlů (přičemž všechny v jistém smyslu vzniknou z $\mathbb{V}(k,n)$ – jsou k němu tzv. asociované). My budeme potřebovat následující "tautologický bandl"

$$\Sigma = \{(\Lambda, x) \in \mathbb{G}(k,n) \times \mathbb{P}^n \mid x \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{G}(k,n) \times \mathbb{P}^n$$

Pomocí Σ definujme pro projektivní varietu $X \subseteq \mathbb{P}^n$ tzv. incidenční varietu $\mathcal{C}_k(X)$ jako

$$\mathcal{C}_k(X) = \{\Lambda \in \mathbb{G}(k,n) \mid X \cap \Lambda \neq \emptyset\} \subseteq \mathbb{G}(k,n).$$

Ukážeme nyní, že se skutečně jedná o variety. V případě Σ to plyne z následujícího

$$([\omega],[v]) \in \Sigma \Longleftrightarrow \omega \wedge v = 0.$$

Označíme-li projekce $\pi_1 : \Sigma \to \mathbb{G}(k,n)$ a $\pi_2 : \Sigma \to \mathbb{P}^n$, pak $\mathcal{C}_k(X) = \pi_1(\pi_2^{-1}(X))$ a jde tedy také o projektivní varietu. Poznamenejme, že $\Sigma \to \mathbb{G}(k,n)$ je opět bandl s fibrem $\mathbb{P}^k$.

Řekneme, že obecný bod x variety X má vlastnost P, jestliže množina bodů $x \in X$ majících tuto vlastnost je otevřená hustá (v případě ireducibilní X tedy otevřená neprázdná) nebo obecněji, pokud množina bodů $x \in X$ majících tuto vlastnost obsahuje nějakou otevřenou hustou podmnožinu.

Tvrzení 1.3. *Je-li $k \geq l$, tak obecná k-rovina obsahuje obecnou l-rovinu a obecná l-rovina je obsažena v obecné k-rovině.*

Důkaz. Nechť $U \subseteq \mathbb{G}(l,n)$ je otevřená neprázdná. Smysl prvního tvrzení je, že množina

$$V = \{\Lambda \in \mathbb{G}(k,n) \mid \exists \Gamma \in U : \Gamma \subseteq \Lambda\}$$

je otevřená neprázdná. Uvažujme následující zobrazení

$$\delta : \mathbb{K}^{(n+1)(k+1)} \longrightarrow \mathbb{G}(l,n)$$

posílající $(k+1)$-tici vektorů $(v_0, \ldots, v_k)$ na l-rovinu $[v_0, \ldots, v_l]$. Potom $V = \gamma(\delta^{-1}(U))$ a první tvrzení plyne z otevřenosti γ. Druhé tvrzení se ukáže podobně z otevřenosti δ (ta plyne z toho, že to je složení projekce a γ pro l-roviny). □

2. Dimenze

Definice 2.1. Řekneme, že projektivní varieta $X \subseteq \mathbb{P}^n$ má kodimenzi nejvýše k, jestliže každý k-rozměrný projektivní podprostor (zkráceně k-rovina) $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^n$ protíná X. Samozřejmě pak X má kodimenzi právě k, jestliže navíc existuje $(k-1)$-rovina disjunktní s X (tedy X nemá kodimenzi nejvýše $k+1$). Dimenzí variety X pak nazveme číslo $d = n - k$.

Zabývejme se nyní $(k-1)$-rovinami v případě, že X má kodimenzi k. Podle definice existuje nějaká, která je disjunktní s X. Ukážeme nyní, že ve skutečnosti obecná $(k-1)$-rovina bude s X disjunktní. Uvažujme tedy varietu incidence $\mathcal{C}_{k-1}(X)$. Ta je uzavřená a podle předchozího také vlastní, takže její komplement

$$\mathbb{G}(k-1,n) \smallsetminus \mathcal{C}_{k-1}(X),$$

skládající se právě z $(k-1)$-rovin disjunktních s X, tvoří otevřenou neprázdnou, a tedy hustou, podmnožinu.

Lemma 2.2. *Dimenze projektivní variety X je rovna maximu z dimenzí jejích ireducibilních komponent.*

Důkaz. Označme komponenty X_i. Jelikož je každá X_i obsažena v X, plyne přímo z definice, že $\dim X_i \leq \dim X$. Předpokládejme, že je tato nerovnost striktní pro všechna i. Potom obecná k-rovina je disjunktní s každou X_i a tedy i s X. To je spor s tím, že kodimenze X je k. □

Je-li Λ nyní k-rovina, obsahující nějakou “obecnou” $(k-1)$-rovinu, tedy takovou disjunktní s X. Potom $X \cap \Lambda$ musí být konečná, jelikož je disjunktní s projektivní nadrovinou a je tedy afinní. Ve skutečnosti opět platí, že množina všech k-rovin majících konečný průnik s X tvoří otevřenou neprázdnou podmnožinu. To je proto, že obecná $(k-1)$-rovina je disjunktní s X a tedy obecná k-rovina Λ obsahuje $(k-1)$-rovinu disjunktní s X. To ale znamená, že průnik $X \cap \Lambda \subseteq \Lambda$ musí být konečný, protože je disjunktní s nějakou nadplochou a je tedy afinní.

Ve skutečnosti platí, že počet průsečíků $X \cap \Lambda$ je pro obecnou k-rovinu maximální možný a roven stupni variety X.

Příklad 2.3. Ve dvou triviálních (extrémních) případech, lze zcela charakterizovat variety určité dimenze. Podle definice varieta $X \subseteq \mathbb{P}^n$ má dimenzi 0, tj. kodimenzi n, právě když každá n-rovina (ta existuje jediná a to $\mathbb{P}^n$) protne X, tedy X je neprázdná, a navíc existuje $(n-1)$-rovina, která je s X disjunktní. Potom je ale X afinní a tedy konečná.

Varieta $X \subseteq \mathbb{P}^n$ má dimenzi n, tj. kodimenzi 0, právě když každá 0-rovina, tj. bod, protíná X. To ale znamená, že $X = \mathbb{P}^n$.

V současné chvíli není vůbec jasné, zda dimenze závisí pouze na varietě, nebo i na jejím vložení do $\mathbb{P}^n$. K tomu, abychom tuto nezávislost ukázali, bude potřeba dimenzi popsat jiným, invariantním způsobem. Nechť P je libovolný bod $(k-1)$-roviny $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^n$ disjunktní s X. Uvažujme projekci z bodu P. To je regulární zobrazení

$$\pi : \mathbb{P}^n \smallsetminus \{P\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$

dané volbou nadroviny $\Gamma \subseteq \mathbb{P}^n$. Obraz $\pi(Q)$ je potom jediný průsečík přímky $\overline{PQ}$ s $\Gamma \cong \mathbb{P}^{n-1}$. Ve vhodných souřadnicích, ve kterých $P = (0 : \cdots : 0 : 1)$ a $\Gamma = \mathbb{P}^{n-1}$ má π předpis

$$\pi(x_0 : \cdots : x_n) = (x_0 : \cdots : x_{n-1}).$$

Ukážeme nyní, že obraz $\pi(X)$ má stejnou dimenzi jako X. Zároveň porovnáme další invariant, stupeň transcendence $\operatorname{tr}\deg \mathbb{K}(X)$ tělesa $\mathbb{K}(X)$ racionálních funkcí na X. Jedná se o maximální počet prvků $\mathbb{K}(X)$ algebraicky nezávislých nad $\mathbb{K}$. Jsou-li tyto prvky $a_1, \ldots, a_s$, je $\mathbb{K}(a_1, \ldots, a_s)$ izomorfní podílovému tělesu okruhu polynomů v s proměnných. Každý prvek $\mathbb{K}(X)$ je algebraický nad $\mathbb{K}(a_1, \ldots, a_s)$. Jelikož je $\mathbb{K}(X)$ konečně generované, je už rozšíření $\mathbb{K}(X) : \mathbb{K}(a_1, \ldots, a_s)$ konečné. Platí, že libovolný maximální systém algebraicky nezávislých prvků má stejný počet.

Tvrzení 2.4. *Platí* $\dim \pi(X) = \dim X$ *a* $\operatorname{tr}\deg \mathbb{K}(\pi(X)) = \operatorname{tr}\deg \mathbb{K}(X)$.

Důkaz. Prvně si uvědomme, že pro první rovnost chceme dokázat $\operatorname{codim} \pi(X) = \operatorname{codim} X - 1$. Nechť tedy $\Delta \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ je libovolná $(k-1)$-rovina. Potom $\pi^{-1}\Delta \cup \{P\}$ je k-rovina a proto protíná X. To ale znamená, že Δ protíná $\pi(X)$. Zároveň $\pi(\Lambda)$ je $(k-2)$-rovina disjunktní s $\pi(X)$, protože Λ je disjuktní s X.

Pro výpočet stupňů transcendence připomeňme, že $\mathbb{K}(X)$ je generované $x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0$, kde předpokládáme, že x_0 není nulové na X, tj. $x_0 \notin I(X)$. Zobrazení $X \to \pi(X)$ je dominantní, lze tedy chápat $\mathbb{K}(X)$ jako rozšíření $\mathbb{K}(\pi(X))$. Jako takové je generované jediným prvkem x_n/x_0. Uvážme libovolný homogenní polynom $f \in I(X)$ stupně d, který je nulový na X, ale nikoliv na $P = (0 : \cdots : 0 : 1)$. To znamená, že jeho koeficient u x_n^d je nenulový a fakt, že $f/x_0^d = 0$ v $\mathbb{K}(X)$ vyjadřuje přesně, že prvek x_n/x_0 je algebraický nad $\mathbb{K}(\pi(X))$. Je tedy rozšíření $\mathbb{K}(X) : \mathbb{K}(\pi(X))$ konečné a proto se stupně transcendence rovnají. □

Důsledek 2.5. *Platí* $\dim X = \operatorname{tr\,deg} \mathbb{K}(X)$.

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí vzhledem ke $k = \operatorname{codim} X$. Pro $k = 0$ máme $X = \mathbb{P}^n$ a

$$\operatorname{tr\,deg} \mathbb{K}(X) = \operatorname{tr\,deg} \mathbb{K}(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0) = n = \dim X.$$

Je-li X vlastní podvarieta, zvolíme projekci π jako výše a dostáváme

$$\dim X = \dim \pi(X) = \operatorname{tr\,deg} \mathbb{K}(\pi(X)) = \operatorname{tr\,deg} \mathbb{K}(X)$$

podle předchozího tvrzení a indukčního předpokladu. □

Z důkazu věty lze odvodit další charakterizaci dimenze. Je-li zobrazení $f : X \to \mathbb{P}^d$ surjektivní obecně konečné[1], je $\dim X = d$. Lze totiž f nahradit kompozicí

$$X \cong \Gamma_f \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^d \to \mathbb{P}^d,$$

kde Γ_f značí graf f. Přitom projekce $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^d \subseteq \mathbb{P}^{(n+1)(d+1)-1} \to \mathbb{P}^d$ je projekcí ve smyslu kompozice projekcí z bodů a lze tedy aplikovat předchozí tvrzení (jen v tomto případě X prochází bodem, ze kterého se promítá).

Tvrzení 2.6. *Nechť $f : X \to Y$ je surjektivní obecně konečné zobrazení mezi ireducibilními projektivními varietami a $X_0 \subsetneq X$ vlastní podvarieta. Potom $f(X_0) \subsetneq Y$ je také vlastní podvarieta.*

Důkaz. Prvně můžeme Y nahradit libovolnou afinní otevřenou podmnožinou, například Y_g, a X příslušným vzorem X_{gf}, který je také afinní. Poté můžeme X nahradit grafem Γ_f, takže f je zúžením projekce $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$. Na závěr si uvědomme, že stačí dokázat tvrzení v případě $m = n - 1$, protože obecný případ je kompozicí takových projekcí. Jsme tedy v situaci, kdy

$$X \subseteq \mathbb{A}^n, \quad Y \subseteq \mathbb{A}^{n-1} \quad \text{a} \quad f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Předpokládejme sporem, že $f(X_0) = Y$. Potom $K(X_0)$ i $K(X)$ lze považovat za rozšíření $K(Y)$, navíc algebraické, protože je f obecně konečné a existuje tedy $h \in I(X)$, které je nenulové na nějakém bodu $f^{-1}(Y) \smallsetminus X$. Po vyjádření

$$h = a_0(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^d + \cdots + a_d(x_1, \dots, x_{n-1})$$

je pak zřejmé, že nějaký koeficient $a_i \notin I(Y)$ a generátor $x_n \in K(X)$ nad $K(Y)$ je tedy algebraický. Zvolme jeho minimální polynom, po vynásobení vhodným polynomem z $K[Y]$ můžeme dosáhnout toho, že je tento prvkem $K[Y][t]$ a navíc primitivní. Označme jej opět h. Podobně nechť h_0 je minimální polynom $x_n \in K(X_0)$ nad $K(Y)$. Zřejmě platí $h(x_n) = 0$ v $K(X_0)$, proto $h_0 | h$ v $K(Y)[t]$ a díky primitivitě h_0 také v $K[Y][t]$. Jelikož je h minimální, musí být $h = bh_0$, kde $b \in K[Y]$ a díky primitivitě h je b jednotka $K[Y]$. Protože je $X = \pi^{-1}(Y) \cap V(h)$ a $X_0 = \pi^{-1}(Y) \cap V(h_0)$, dostáváme $X = X_0$. □

Důsledek 2.7. *Je-li $X_0 \subseteq X$ podvarieta projektivní variety X, která neobsahuje žádnou její komponentu, pak* $\dim X_0 < \dim X$.

[1] Je otázka, jestli je toto třeba vůbec zmiňovat, já jsem provedl o něco jednodušší důkaz věty o obecné konečném zobrazení, ve kterém jsem to nezmiňoval.

Důkaz. Stačí se omezit na případ, že X je ireducibilní a tedy X_0 vlastní podvarieta. Připomeňme surjektivní obecně konečné zobrazení $\pi : X \to \mathbb{P}^d$ dané opakovanou projekcí z bodů. Podle předchozího tvrzení je $\pi(X_0) \subsetneqq \mathbb{P}^d$ a má tedy dimenzi

$$\dim X_0 = \dim \pi(X_0) < d = \dim X.$$

□

Věta 2.8. *Je-li X projektivní varieta a $V(f)$ nadplocha neobsahující žádnou komponentu X, pak platí* $\dim(X \cap V(f)) = \dim X - 1$.

Důkaz. Podle předchozího důsledku je jistě $\dim(X \cap V(f)) \leq \dim X - 1$. Předpokládejme nyní, že je tato dimenze striktně menší. Potom existuje $(k+1)$-rovina Λ disjunktní s $X \cap V(f)$. Potom ale $X \cap \Lambda$ musí být konečná (leží totiž v afinním $\Lambda \smallsetminus V(f)$) a jistě lze najít k-rovinu $\Gamma \subseteq \Lambda$, která bude s X disjunktní. To je ale spor s tím, že k je kodimenze X. □

Poznámka. V případě ireducibilní projektivní variety X předchozí věta říká, že *maximum* z dimenzí komponent $X \cap V(f)$ je rovno $\dim X - 1$. Ve skutečnosti ale platí, že všechny komponenty $X \cap V(f)$ mají dimenzi $\dim X - 1$. To se dá dokázat pomocí afinní verze předchozí věty – přechodem k afinní otevřené podmnožině totiž můžeme z X vyříznout všechny komponenty $X \cap V(f)$ s vyjímkou jediné a dimenze průniku výsledné variety s $V(f)$ pak bude jediná zbývající komponenta. Podle afinní verze bude mít dimenzi $\dim X - 1$.

Pomocí předchozí věty lze dimenzi ireducibilní projektivní variety X charakterizovat jako “délku” d nejdelšího řetězce

$$\emptyset \subsetneqq X_d \subsetneqq \cdots \subsetneqq X_0 = X$$

ireducibilních variet (index značí kodimenzi). Podle předchozího důsledku má totiž každý řetězec délku maximálně d. Podle předchozí věty pak lze najít $X_1 \subsetneqq X_0$ dimenze přesně $d-1$ a indukcí pak řetězec délky d. V řeči souřadnicových okruhů má tato charakterizace následující vyjádření, ve které je nyní X ireducibilní afinní varieta. Dimenze X je rovna tzv. Krullově dimenzi $K[X]$, která je definována jako “délka” d nejdelšího řetězce

$$0 = I_0 \subsetneqq \cdots \subsetneqq I_d \subsetneqq K[X]$$

prvoideálů v $K[X]$.

Tato definice má tu výhodu, že je vyjádřena v řeči variety samotné a nezávisí na jeho vložení do projektivního prostoru a je tedy zjevně invariantní vzhledem k izomorfismům[2].

Pomocí této charakterizace nyní dokážeme následující větu vhodnou pro počítání dimenzí.

Věta 2.9. *Nechť je $f : X \to Y$ surjektivní zobrazení mezi projektivními varietami takové, že $d = \dim f^{-1}(y)$ nezávisí na $y \in Y$. Potom*

$$\dim X = \dim Y + d.$$

[2] Ukážeme nyní, že je invariantní i vzhledem k biracionálním ekvivalencím. To je do jisté míry jasné u stupně transcendence, nedokázali jsme však, že ten je dobře definovaný. Nechť $\pi : X \to \mathbb{P}^d$ je nějaká obecně konečná projekci, kde X je ireducibilní projektivní varieta. Nechť $U \subseteq X$ je nějaká otevřená množina. Ukážeme, že $\dim U = \dim X$ (v definici pomocí délky řetězců). Zřejmě každý ostře rostoucí řetězec uzavřených ireducibilních podmnožin U zadává pomocí uzávěru ostře rostoucí řetězec uzavřených ireducibilních podmnožin X. Je tedy $\dim U \leq \dim X$. Pro opačnou implikaci stačí najít ireducibilní nadplochu $Y \subseteq X$, která nebude ležet v $X \smallsetminus U$ a použít indukci na $Y \cap U \subseteq Y$. Podle předchozího je $\pi(X \smallsetminus U)$ vlastní uzavřená množina. Zvolme v $\mathbb{P}^n$ libovolný nadrovinu Λ neležící v $\pi(X \smallsetminus U)$ a zvolme za Y libovolnou komponentu $\pi^{-1}(\Lambda)$, která se zobrazí surjektivně na Λ. Potom $\pi : Y \to \Lambda$ je opět obecně konečná projekce a můžeme pokračovat indukcí.

Důkaz. Můžeme předpokládat, že Y je ireducibilní – jinak ji rozložíme na ireducibilní komponenty. Nechť $Y_0 \subsetneqq Y$ je libovolná komponenta $Y \cap V(g)$, kde g není nulová na Y a položme $X_0 = f^{-1}(Y_0)$. Má-li Y_0 maximální dimenzi $\dim Y - 1$, dostáváme indukcí na $X_0 \to Y_0$, že

$$\dim X \geq \dim X_0 - 1 = \dim Y_0 + d - 1 = \dim Y + d.$$

Nechť naopak Y_0 je komponenta, jejíž vzor $X_0 = f^{-1}(Y_0)$ obsahuje komponentu $X \cap V(gf)$ maximální dimenze $\dim X - 1$. Potom

$$\dim X = \dim X_0 - 1 = \dim Y_0 + d - 1 \leq \dim Y + d.$$

□

Příklad 2.10. Spočítejme dimenzi Grassmannovy variety $G(k,n)$ elementárním způsobem. Uvažme zobrazení

$$\gamma : V(k,n) \longrightarrow G(k,n), \quad (v_1, \ldots, v_k) \longmapsto [v_1, \ldots, v_k]$$

s definičním oborem $V(k,n)$, který není projektivní, ale pouze kvaziprojektivní – chtělo by to všechno zobecnit, snad někdy příště. Jelikož se jedná o otevřenou podmnožinu v K^{nk}, je $\dim V(k,n) = nk$. Spočítejme dimenzi fibru $f^{-1}(\Lambda)$. Ten se zjevně skládá právě ze všech bází Λ a lze jej tedy ztotožnit s otevřenou podmnožinou K^{k^2} a má dimenzi k^2. Proto

$$nk = \dim V(k,n) = \dim G(k,n) + k^2$$

a konečně $\dim G(k,n) = nk - k^2 = k(n-k)$.

Příklad 2.11. Každá projektivní varieta $X \subseteq \mathbb{P}^n$ je biracionálně ekvivalentní nadploše. Předpokládejme, že X má kodimenzi alespoň 2 a hledejme projekci

$$\pi : \mathbb{P}^n \smallsetminus \{P\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1},$$

z nějakého bodu P tak, aby zúžení $\pi : X \to \pi(X)$ mělo v obecném fibru jediný prvek. Podle věty o obecně konečných zobrazeních je pak $\pi : X \to \pi(X)$ biracionální ekvivalence (na úrovni těles racionálních funkcí se jedná o rozšíření stupně jedna). Zabývejme se proto množinou všech přímek protínajících X. To je přesně $\mathcal{C}_1(X)$ a má dimenzi $d + n - 1$, neboť varieta incidence má tuto dimenzi (projekce na X má fibry dimenze $n-1$) a projekce na $\mathcal{C}_1(X)$ má obecně konečné fibry.

Zabývejme se nyní podmnožinou $\mathcal{C}_1(X)$ těch přímek, které protínají X ve více jak jednom bodě. Uvažujme zobrazení $(X \times X) \smallsetminus \Delta \to \mathbb{G}(1,n)$ posílající dvojici bodů (x,y) na přímku $\overline{xy}$. Jeho obraz (přesněji řečeno uzávěr tohoto obrazu) má dimenzi nejvýše $2d < d + n - 1$. Proto obecná přímka z $\mathcal{C}_1(X)$ protíná X v jediném bodě. Uvažujme nyní varietu dvojic (P,p), kde P je bod ležící na přímce p, která protíná X. Podmnožina těch dvojic (P,p), kde p protíná X v jediném bodě různém od P je podle předchozího otevřená a neprázdná. Libovolný bod P vyskytující se v nějaké takové dvojici pak bude splňovat, že projekce z něj bude po zúžení na X obecně bijektivní.

Věta 2.12. *Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení mezi projektivními varietami a položme*

$$d = \min\{\dim f^{-1}(y) \mid y \in Y\}.$$

Potom množina $U = \{y \in Y \mid \dim f^{-1}(y) = d\}$ je neprázdná otevřená. Jsou-li obě X, Y ireducibilní, pak platí $\dim X = \dim Y + d$.

Důkaz. Nahraďme $X \subseteq \mathbb{P}^n$ grafem f a zobrazení f pak projekcí

$$g : \Gamma_f \subseteq \mathbb{P}^n \times Y \longrightarrow Y.$$

Nechť minimální dimenze fibru je $d = \dim f^{-1}(y_0)$. Zvolme libovolnou $(n-d-1)$-rovinu $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^n$ disjunktní s $f^{-1}(y_0)$. Potom U zřejmě obsahuje kopmlement vlastní uzavřené množiny $Y_0 = g(\Gamma_f \cap (\Lambda \times Y))$, tj. množinu těch $y \in Y$, pro něž je $f^{-1}(y)$ disjunktní s Λ.

Ukážeme nyní, že U je skutečně otevřená. Kdyby $(Y \smallsetminus Y_0) \subsetneqq U$, zužíme f na Y_0 a použijeme předchozí tvrzení znova. Opět tedy množina těch $y \in Y_0$, pro něž je $\dim f^{-1}(y)$ minimální, obsahuje komplement nějaké vlastní uzavřené množiny $Y_1 \subsetneqq Y_0$. Protože je prostor Y Noetherovský, musí se posloupnost $Y_0 \supsetneqq Y_1 \supsetneqq \cdots$ stabilizovat od nějakého Y_n a tedy $U = Y \smallsetminus Y_n$ je otevřená.

Je-li nyní Y ireducibilní, tak zúžením na U dostáváme $f : f^{-1}(U) \to U$ splňující předpoklady předchozí věty. $\square$

Zajímavým důsledkem je následující.

Důsledek 2.13. *Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení mezi projektivními varietami takové, že všechny fibry $f^{-1}(y)$ mají tutéž dimenzi. Jsou-li Y a všechny fibry $f^{-1}(y)$ ireducibilní, je ireducibilní i X.*

Důkaz. Nechť $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ je rozklad X na sjednocení ireducibilních komponent a nechť $f_i : X_i \to Y$ značí zúžení f na jednotlivé komponenty. Označme d_i minimální dimenzi fibru f_i a nechť d_1 je maximální z nich. Podle předpokladu je pak dimenze $f_1^{-1}(y)$ konstantní a rovna dimenzi $f^{-1}(y)$. Z ireducibility fibrů pak $f_1^{-1}(y) = f^{-1}(y)$ a tedy $X = X_1$ je ireducibilní. $\square$

3. Blow-up

Blow-up, blow-up v bodě
Tečný kužel, jeho dimenze

4. Tečný prostor

Definujme pro ideál $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ jeho lineární část v bodě $P \in \mathbb{A}^n$ jako

$$I_P^{(1)} = \{\mathrm{d}f(P) \mid f \in I\},$$

kde $\mathrm{d}f(P) = \frac{\partial f(P)}{\partial x_0}\mathrm{d}x_0 + \cdots + \frac{\partial f(P)}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$ (a kde $\mathrm{d}x_i = x_i$ jakožto lineární funkce na $\mathbb{A}^n$). Tečný prostor $T_P X$ ireducibilní projektivní variety X v bodě $P \in X$ je následující rovina

$$T_P X = \{v \in \mathbb{K}^n \mid \forall \alpha \in I(X)_P^{(1)} : \alpha(v) = 0\}.$$

Bod $P \in X$ se nazývá hladký, jestliže $\dim T_P X = \dim X$ (ekvivalentně $C_P X = T_P X$). Duální prostor k $T_P X$ je izomorfní

$$T_P^* X = \mathbb{K}^{(1)}[x_1, \ldots, x_n]/I(X)_P^{(1)},$$

je totiž zobrazení $\mathbb{K}^{(1)}[x_1, \ldots, x_n] \cong (\mathbb{K}^n)^* \longrightarrow (T_P X)^*$ (dané zúžením lineární formy na podprostor) surjektivní s jádrem právě $I(X)_P^{(1)}$.

Věta 4.1. *Množina hladkých bodů ireducibilní projektivní variety tvoří neprázdnou otevřenou podmnožinu.*

Důsledek 4.2. *Dimenze ireducibilní variety X je rovna* $\dim X = \min\{\dim T_P X \mid P \in X\}$.

Důkaz. Popišme prvně množinu těch bodů P, pro něž má $T_P X$ minimální dimenzi $d = n - k$ ze všech tečných prostorů. Ta je pak dána tím, že nějakých k diferenciálů $\mathrm{d}f_1(P), \dots, \mathrm{d}f_k(P)$ je lineárně nezávislých, kde $f_1, \dots, f_k \in I(X)$, tedy nenulovostí nějakého determinantu. Je tedy vskutku otevřená. Zbývá ukázat, že je d dimenze X. K tomu použijeme následující charakterizaci.

Tvrzení 4.3. *Tečný prostor $T_P X$ afinní variety X je duální k $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \cong \mathfrak{M}_P/\mathfrak{M}_P^2$, kde $\mathfrak{m}_P \subseteq K[X]$ je maximální ideál příslušný bodu P a $\mathfrak{M}_P \subseteq \mathcal{O}_{X,P}$ je maximální ideál lokálního okruhu X v P.*

Před důkazem tohoto tvrzení dokončeme důkaz věty. Z lokální charakterizace tečného prostoru plyne, že je invariantní vůči izomorfismům variet. Z otevřenosti množiny bodů, kde $\dim T_P X$ je minimální, pak plyne, že toto minimum je dokonce invariantní vzhledem k biracionálním ekvivalencím. Protože je každá varieta biracionálně ekvivalentní s nadplochou, stačí rovnost $d = \dim X$ ověřit pro ireducibilní nadplochu $X = V(f)$ (tj. f je ireducibilní polynom). Přitom je zřejmé, že platí $T_P X = \ker \mathrm{d}f(P)$ a stačí tedy ukázat, že diferenciál $\mathrm{d}f$ je v nějakém bodě nadplochy X nenulový. Protože má ale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ menší stupeň než f, plyne z $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in I(X) = (f)$, že $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ a f je potom konstantní, což je spor s ireducibilitou. $\square$

Vraťme se nyní k důkazu tvrzení.

Důkaz Tvrzení 4.3. Definujme prvně diferenciální polynomiální funkce $f \in \mathbb{K}[X]$ v bodě $P \in X$, $\mathrm{d}f(P) : T_P X \to \mathbb{K}$, jako zúžení libovolného rozšíření na polynomiální funkci na $\mathbb{A}^n$, tj. polynom. Jelikož se každé dvě takové rozšíření liší o prvek $I(X)$, jehož diferenciál je nulový na $T_P X$, je $\mathrm{d}f(P)$ dobře definovaný. Je-li $f \in \mathfrak{m}_P^2$, tedy součet polynomiálních funkcí tvaru gh, kde $g, h \in \mathfrak{m}_P$ jsou nulové v P, pak podle Leibnizova pravidla

$$\mathrm{d}f(P) = \mathrm{d}(gh)(P) = \underbrace{g(P)}_{0}\,\mathrm{d}h(P) + \underbrace{h(P)}_{0}\,\mathrm{d}g(P) = 0.$$

Máme tedy dobře definované zobrazení

$$D_P : \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \longrightarrow (T_P X)^* \cong \mathbb{K}^{(1)}[x_1, \dots, x_n]/I(X)_P^{(1)}.$$

Jelikož je každá lineární funkce α diferenciálem afinní funkce $\alpha - \alpha(P) \in \mathfrak{m}_P$, je D_P surjektivní.

Pro injektivitu nechť $f \in \mathfrak{m}_P$. Taylorův rozvoj v bodě P dává

$$f(x) = \underbrace{f(P)}_{0} + \mathrm{d}f(P)(x - P) + \cdots,$$

kde další členy již zjevně leží v $\mathfrak{m}_P^2$, protože vždy obsahují součiny alespoň dvou lineárních činitelů $(x_i - x_i(P)) \in \mathfrak{m}_P$. Je-li tedy $\mathrm{d}f(P) = 0$, pak $f \in \mathfrak{m}_P^2$ a D_P je izomorfismus. $\square$

Poznámka. Taylorův polynom (a rozvoj) v regulárním bodě přes lokální parametry, lokální parametrizace (jakožto formální řada). Aplikace na biracionální invarianci dimenze ve smyslu délky nejdelšího řetězce ireducibilních podvariet. Definice stupně protínání dvou rovinných křivek v bodě.

5. Stupeň

Věta 5.1 (Bezoutova věta, elementární verze)**.** *Nechť $X, Y \subseteq \mathbb{P}^2$ jsou dvě křivky zadané homogenními polynomy $X = V(f), Y = V(g)$. Potom počet jejich průsečíků je maximálně $|X \cap Y| \leq \deg f \cdot \deg g$.*

Důkaz. Zvolme souřadnice tak, že $(0:0:1) \notin X \cup Y$ a že žádné dva průsečíky neleží na přímce procházející tímto bodem. To znamená, že můžeme předpokládat

$$f = x_2^d + \cdots, \quad g = x_2^e + \cdots.$$

Bod $(x_0 : x_1 : x_2)$ je průsečíkem, právě když polynomy $f, g \in \mathbb{K}[x_0, x_1][x_2]$ mají společný kořen, tj. právě když rezultanta

$$\mathrm{Res}(f, g, x_2) \in \mathbb{K}[x_0, x_1]$$

má kořen $(x_0 : x_1)$. Snadným výpočtem se lze přesvědčit, že $\mathrm{Res}(f, g, x_2)$ je homogenní stupně $d \cdot e$. Platí totiž, že v matici zadávající $\mathrm{Res}(f, g, x_2)$ je na pozici (i, j) buď polynom stupně $i - j$ nebo $i - j + d$, přičemž druhé platí, právě když $j > d$, tj. mezi $(\sigma(1), 1), \ldots, (\sigma(n), n)$ je to právě e-krát. Tvrzení plyne z toho, že každý kořen $\mathrm{Res}(f, g, x_2)$ odpovídá nejvýše jednomu průsečíku. □

Poznámka. S trochou práce lze ukázat, že v případě, že se X, Y protínají v bodě $(x_0 : x_1 : x_2)$ transverzálně, je $(x_0 : x_1)$ jednoduchým kořenem rezultanty $\mathrm{Res}(f, g, x_2)$. To znamená, že když se X, Y protínají transverzálně všude, je počet průsečíků roven přesně součinu stupňů $\deg f \cdot \deg g$ definujících polynomů.

Značí-li $\alpha_1, \ldots, \alpha_d : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ nějaké lokální parametrizace kořenů f (například v podobě formálních mocninných řad $\alpha_j(x_0 : x_1) = (x_0 : x_1 : \widetilde{\alpha}_j(x_0 : x_1))$, kde $\widetilde{\alpha}_j \in \mathbb{K}[\![x_0 : x_1]\!]$), lze rezultantu psát (obecně ve vzorci vystupuje vedoucí člen f, který jsme ale prohlásili za 1)

$$\mathrm{Res}(f, g, x_2) = g(\alpha_1) \cdots g(\alpha_d).$$

Derivací v $P = (x_0 : x_1)$ dostáváme za předpokladu, že kořenem f je $\alpha_1(P)$, vztah

$$\mathrm{d}\big(\mathrm{Res}(f, g, x_2)\big)(P) = \mathrm{d}\big(g(\alpha_1)\big)(P) \cdot g(\alpha_2(P)) \cdots g(\alpha_d(P))$$

(ostatní členy vypadnou, protože obsahují $g(\alpha_1(P)) = 0$). Protože tečný prostor $V(f)$ v bodě $\alpha_1(P)$ je dán přesně obrazem $\mathrm{d}\alpha_1(P)$, a jelikož tento neleží v $\ker \mathrm{d}g(\alpha_1(P))$ díky předpokladu transverzality, je diferenciál $\mathrm{d}(g(\alpha_1))(P)$ nenulový a proto je nenulový i celý součin. Ve výsledku je P jednoduchým kořenem rezultanty $\mathrm{Res}(f, g, x_2)$.

V obecném případě (kdy se X, Y neprotínají transverzálně) je potřeba každý průsečík brát s vhodnou násobností, abychom dostali jejich počet rovný $\deg f \cdot \deg g$. V moderní algebraické geometrii se tato násobnost zavádí s pomocí schémat. Průnik $X \cap Y$ ve smyslu schémat obsahuje totiž mnohem více informací než jen body tohoto průniku. Veškerá informace je obsažena v součtu ideálů $I(X) + I(Y)$, který není obecně radikálový a neodpovídá tedy varietě. Radikálový není dokonce ani v případě transverzálního průniku, ale rozdíl mezi $I(X) + I(Y)$ a $I(X \cap Y)$ se vyskytuje pouze v nízkých stupních polynomů, pro $k \gg 0$ je

$$I^{(k)}(X) + I^{(k)}(Y) = I^{(k)}(X \cap Y).$$

V takovém případě říkáme, že tyto ideály mají stejnou saturaci a z hlediska schémat je považujeme za totožné. Stejně jako projektivní variety jsou v bijekci s radikálovými homogenními ideály (po odebrání irelevantního), podschémata projektivního prostoru jsou v bijekci se saturovanými homogenními ideály. Budeme tedy v následujícím pracovat s (téměř) obecnými homogenními ideály a tvářit se, že jsou to geometrické objekty. V případě, že tyto ideály budou radikálové, budeme je ztotožňovat s odpovídajícími projektivními varietami.

Nechť $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ je homogenní ideál. Řekneme, že je *saturovaný*, jestliže pro každý homogenní prvek f platí $x_0 f, \ldots, x_n f \in I \Rightarrow f \in I$. Saturace ideálu je nejmenší saturovaný ideál

$$\bar{I} = \{f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \mid (\exists k \geq 0) : (\mathfrak{m}_0)^k f \subseteq I\}$$

obsahující I.

Lemma 5.2. *Pro homogenní ideály $I, J \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ jsou následující podmínky ekvivalentní.*

(1) $\bar{I} = \bar{J}$,
(2) *pro* $d \gg 0$ *platí* $I^{(d)} = J^{(d)}$.

Důkaz. Prvně dokážeme implikaci (1) $\Rightarrow$ (2) přičemž zjevně stačí, že $I^{(d)} = \bar{I}^{(d)}$ pro $d \gg 0$. To je proto, že $\bar{I} = (f_1, \dots, f_r)$ a každý homogenní prvek $f = a_1 f_1 + \cdots + a_r f_r \in \bar{I}$ dostatečně velkého stupně má každé a_i tak velkého stupně, že $a_i f_i \in (\mathfrak{m}_0)^k f_i \subseteq I$. Pro druhou implikaci si stačí uvědomit, že to, zda $f \in \bar{I}$, závisí pouze na $I^{(d)}$, $d \gg 0$. □

Dejme nyní do souvislosti saturované ideály s projektivní větou o nulách. Platí, že zobrazení

$$\{\text{radikálové saturované ideály}\} \xrightarrow{V} \{\text{projektivní variety}\}$$

je bijekce (irelevantní ideál $\mathfrak{m}_0$ není saturovaný) a $V(I) = \emptyset$, právě když $1 \in \bar{I}$.

Nyní vysvětlíme, jaký geometrický objekt lze saturovanému ideálu přiřadit. Předně je to jeho množina bodů $V(I) \subseteq \mathbb{P}^n$, ta však opovídá ideálu $\sqrt{I}$. Nejjednodušším příkladem neradikálového ideálu je $I(X)^2$, o kterém budeme uvažovat jako o množině X "násobnosti dva". Zjemněním $V(I)$ je množina ireducibilních komponent ideálu I, která obsahuje všechny ireducibilní komponenty $V(I)$, ale ještě některé variety navíc. Ty jsou zásadní pro počítání v souřadnicovém okruhu $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/I$. Ireducibilní komponenty I se definují pomocí tzv. primárního rozkladu (lze to i příměji, my ale budeme primární rozklad stejně potřebovat).

Řekneme, že ideál I je ireducibilní, jestliže nelze napsat jako průnik dvou striktně větších ideálů. Protože je $S = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ Noetherovský okruh, tj. neexistuje nekonečná rostoucí posloupnost ideálů, lze každý ideál rozložit jako konečný průnik

$$I = I_1 \cap \cdots \cap I_r$$

ireducibilních ideálů. Poznamenejme, že tento rozklad není jednoznačný v žádném smyslu. Řekneme, že ideál I je *primární*, jestliže

$$fg \in I \Longrightarrow (f \in I) \vee (g \in \sqrt{I}).$$

Tato vlastnost se dá interpretovat dvěma způsoby. Leží-li součin fg v I a $f \notin I$, pak $f \in \sqrt{I}$. Toto lze také interpretovat ekvivalentně v kvocientu S/I takto: každý dělitel nuly je nilpotentní. Pro nás bude v následujícím užitečnější její obrácení. Jestliže prvek S/I není nilpotentní, pak není dělitel nuly, tj. násobení tímto prvkem je injektivní zobrazení $S/I \to S/I$.

Myslím si, že pro homogenní ideál I, nestačí podmínku ověřovat pouze pro homogenní prvky f, g. Nicméně můžeme nadefinovat primární homogenní ideál jako ten, který výše uvedenou podmínku splňuje pouze pro f, g homogenní. To nám bude v následujícím postačovat.

Lemma 5.3. *Každý ireducibilní ideál je primární.*

Důkaz. Nechť $I \subseteq S$ je ireducibilní ideál a $f, g \in S$ dva (homogenní) prvky splňující $fg \in I$. Definujme (homogenní) ideály

$$(I : g^n) = \{h \in S \mid hg^n \in I\}$$

které zjevně tvoří neklesající posloupnost

$$(I : g) \subseteq (I : g^2) \subseteq \cdots .$$

Díky Noetherovskosti S musí pro nějaké n platit $(I : g^{n+1}) = (I : g^n)$. Jelikož chceme ukázat, že buď $g^n \in I$ nebo $f \in I$ stačí nám díky ireducibilitě I dokázat, že $(I+(f))\cap(I+(g^n)) = I$. Nechť tedy h leží v tomto průniku (a můžeme předpokládat, že je homogenní). Máme

$$hg \in I + (fg) = I,$$

tedy při rozkladu $h = k + lg^n$ musí být $lg^{n+1} \in I$, což znamená $l \in (I : g^{n+1}) = (I : g^n)$ a proto $lg^n \in I$ a konečně $h \in I$. □

Tvrzení 5.4. *Je-li I primární, pak $\sqrt{I}$ je prvoideál.*

Důkaz. Je-li $fg \in \sqrt{I}$, tj. $f^k g^k \in I$, pak buď $f^k \in I$ nebo $g^k \in \sqrt{I}$, každopádně však $f \in \sqrt{I}$ nebo $g \in \sqrt{I}$. □

V dalším nás nebude zajímat rozklad na průnik ireducibilních ideálů, ale primárních ideálů. Platí, že $I \cap J$ je primární, pokud $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ (který je pak roven $\sqrt{I \cap J}$):

$$fg \in I \cap J \Leftrightarrow ((f \in I) \vee (g \in \sqrt{I}))\&((f \in J) \vee (g \in \sqrt{J})) \Leftrightarrow (f \in (I \cap J)) \vee (g \in \sqrt{I \cap J})$$

Můžeme tedy sloučit ty činitele, jejichž radikály jsou stejné a dostaneme rozklad na průnik primárních ideálů, který ovšem stále není jednoznačný. Je-li však $I = I_1 \cap \cdots \cap I_r$ takovýto iredundantní rozklad na primární, tj. takový, že vynecháním libovolného člene se průnik změní, pak $\sqrt{I_1}, \ldots, \sqrt{I_r}$ už na rozkladu nezávisí[3] a příslušné ireducibilní variety $V(I_1), \ldots, V(I_r)$ se nazývají ireducibilní komponenty (projektivního schématu zadaného ideálem I). Samozřejmě platí

$$V(I) = V(I_1 \cap \cdots \cap I_r) = V(I_1) \cup \cdots \cup V(I_r).$$

Příklad 5.5. $I = (x^2, xy) = (x) \cap (x, y)^2 = (x) \cap (x^2, y)$ (plus obrázek). Ireducibilními komponentami tedy jsou přímka $V(x)$ (tedy osa y) a bod $V(x, y)$ (tedy počátek).

Tvrzení 5.6. *Je-li $V(I) = \{P\}$, pak $I^{(d)} \subseteq S^{(d)}$ má pro $d \gg 0$ konstantní kodimenzi, která je rovna dimenzi "afinního souřadnicového okruhu".*

Důkaz. Předpokládejme, že $P = (1 : 0 : \cdots : 0)$ a uvažme (surjektivní) homomorfismus

$$\varphi : \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n] \longmapsto \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n], \quad f(x_0, \ldots, x_n) \mapsto f(1, x_1, \ldots, x_n)$$

a zúžením na homogenní polynomy stupně d nalevo a polynomy stupně nejvýše d napravo jím indukovaný izomorfismus

$$\varphi_d : \mathbb{K}^{(d)}[x_0, x_1, \ldots, x_n] \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{(\leq d)}[x_1, \ldots, x_n].$$

Vezmeme nyní kvocient podle obrazů ideálu I a dostaneme izomorfismus

$$\mathbb{K}^{(d)}[x_0, x_1, \ldots, x_n]/I^{(d)} \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{(\leq d)}[x_1, \ldots, x_n]/\varphi_d(I^{(d)}).$$

Ukážeme nyní, že pravá strana je izomorfní "souřadnicovému okruhu" $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/\varphi(I)$ pro $d \gg 0$. Podle projektivní věty o nulách $\mathfrak{m}_P = \sqrt{I}$, tj. $(x_1, \ldots, x_n)^k = (\mathfrak{m}_P)^k \subseteq I$ a proto

[3] Nebudeme to dokazovat, jen uvedeme základní myšlenkou. Tou je charakterizovat tyto prvoideály alternativním způsobem jako ty, které se vyskytují mezi ideály $(I : f)$, $f \in S$.

$(\mathfrak{m}_0)^k \subseteq \varphi(I)$. Díky tomu je každý prvek $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]/\varphi(I)$ reprezentován polynomem stupně menšího než k. Je-li tedy $d \geq k-1$ je přirozené zobrazení

$$\mathbb{K}^{(\leq d)}[x_1,\dots,x_n]/\varphi_d(I^{(d)}) \longrightarrow \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]/\varphi(I)$$

surjektivní. Potřebujeme dále ukázat, že pro $d \gg 0$ je

$$\varphi(I) \cap \mathbb{K}^{(\leq d)}[x_1,\dots,x_n] = \varphi_d(I^{(d)}).$$

Přitom ale $(\mathfrak{m}_0)^k \cap \mathbb{K}^{(\leq d)}[x_1,\dots,x_n] \subseteq \varphi_d(I^{(d)})$ vždy. Jelikož je $\varphi(I)/(\mathfrak{m}_0)^k$ konečně rozměrný vektorový prostor generovaný řekněmě $\varphi(g_1)+(\mathfrak{m}_0)^k,\dots,\varphi(g_r)+(\mathfrak{m}_0)^k$, bude pro libovolné $d \geq \max\{\deg g_1,\dots,\deg g_r\}$ platit, že $\varphi(I)$ je generovaný

$$(\varphi(g_1),\dots,\varphi(g_r)) + (\mathfrak{m}_0)^k \subseteq \varphi(I^{(d)}).$$

□

Definujeme Hilbertovu funkci homogenního ideálu $I \subseteq \mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]$ jako

$$h_I(d) = \dim \mathbb{K}^{(d)}[x_0,\dots,x_n]/I^{(d)}.$$

V následujícím ukážeme, že pro $d \gg 0$ je $h_I(d)$ polynom nad $\mathbb{Q}$ (a to sice tzv. numerický, tj. jeho hodnoty jsou celočíselné). Zatím jsme to ukázali pro ideál, jehož asociovaná varieta má jediný bod. Rozšíření na libovolné konečné množiny vyžaduje rozklad ideálu na ireducibilní komponenty. Je-li $I = I_1 \cap \dots \cap I_r$, kde $V(I_k) = \{P_k\}$, tvrdíme, že pro $d \gg 0$ platí

$$h_I(d) = h_{I_1}(d) + \dots + h_{I_r}(d).$$

Předpokládejme, že $r = 2$, tj. $I = I_1 \cap I_2$. Potom

$$0 \to S/(I_1 \cap I_2) \to S/I_1 \oplus S/I_2 \to S/(I_1+I_2) \to 0$$

je exaktní, přičemž $I_1 + I_2 = S$, alespoň pro $d \gg 0$, neboť $V(I_1+I_2) = V(I_1) \cap V(I_2) = \emptyset$ a tedy $\overline{I_1+I_2} = S$. Ve výsledku $h_{I_1 \cap I_2}(d) = h_{I_1}(d) + h_{I_2}(d)$ pro $d \gg 0$.

Pro nás bude primární rozklad užitečný zejména kvůli tomu, že nám umožní poznat dělitele nuly v S/I. Ideál I je totiž primární, právě když každý dělitel nuly v S/I je nilpotentní. Rozklad na primární potom dává následující kritérium. Je-li $(f+I) \in S/I$ dělitel nuly, pak existuje $g \in S$ tak, že $fg \in I = I_1 \cap \dots \cap I_r$ a tedy za předpokladu, že f neleží v žádném $\sqrt{I_j}$ dostáváme $g \in I_j$ pro všechna j, tedy $g \in I$.

Lemma 5.7. *Jestliže f není nulový na žádné ireducibilní komponentě I, pak $f + I \in S/I$ je nedělitel nuly.*

Věta 5.8. *Hilbertova funkce $h_I(k) = \dim \mathbb{K}^{(k)}[x_0,\dots,x_n]/I^{(k)}$ je pro $k \gg 0$ rovna hodnotě (jediného) numerického polynomu, jehož stupeň je roven $d = \dim V(I)$. Vedoucí koeficient tohoto polynomu je $1/d!$-násobkem přirozeného čísla* $\deg I$*, které nazýváme stupněm I.*

Důkaz. Větu dokážeme indukcí vzhledem k $\dim V(I)$. Je-li tato dimenze nula, větu jsme již dokázali. Nechť tedy má $V(I)$ nenulovou dimenzi a zvolme libovolný lineární polynom f, který je nenulový na všech ireducibilních komponentách I. Potom násobení f zadává injektivní homomorfismus $S/I \to S/I$ jehož kojádro je zjevně $S/(I+(f))$. Označíme-li $J = I + (f)$ máme tedy exaktní posloupnost

$$0 \to S^{(k-1)}/I^{(k-1)} \to S^{(k)}/I^{(k)} \to S^{(k)}/J^{(k)} \to 0.$$

Pro dimenze tedy platí $h_I(k) - h_I(k-1) = h_J(k)$, neboli

$$h_I(k) = h_J(k) + \dots + h_J(0).$$

Protože $V(I+(f)) = V(I)\cap V(f)$, je tato dimenze o jedna menší a můžeme indukcí předpokládat, že pro $k \gg 0$ je

$$h_J(k) = c_{d-1}\tbinom{k}{d-1} + \cdots + c_0\tbinom{k}{0}.$$

Sečtením pak dostáváme pro $k \gg 0$ vyjádření

$$\begin{aligned} h_I(k) &= c_{d-1}\underbrace{\Big(\tbinom{k}{d-1} + \cdots + \tbinom{k_0+1}{d-1}\Big)}_{\binom{k+1}{d}-\mathrm{const}} + \cdots + c_0\Big(\tbinom{k}{0} + \cdots + \tbinom{k_0+1}{0}\Big) + h_I(k_0) \\ &= c_{d-1}\tbinom{k+1}{d} + \cdots + c_0\tbinom{k+1}{1} + \mathrm{const} = \widetilde{c}_d\tbinom{k}{d} + \cdots + \widetilde{c}_1\tbinom{k}{1} + \widetilde{c}_0\tbinom{k}{0}. \end{aligned}$$

Z tohoto tvaru je jasné, že vedoucí koeficient je $\widetilde{c}_d/d!$, přičemž $\widetilde{c}_d = c_{d-1}$ je podle indukce přirozené číslo. □

Příklad 5.9. Spočítejme stupeň ideálu (f). V případě, že f nemá násobné činitele v rozkladu na součin ireducibilních polynomů, tedy počítáme stupeň $I(V(f))$, tedy nadplochy $V(f)$. Postupujme stejně jako v předchozím důkazu pro $I = 0$, $J = (f)$, máme tedy

$$h_0(k) = \dim \mathbb{K}^{(k)}[x_0, \ldots, x_n] = \tbinom{k+n}{n}.$$

Z exaktní posloupnosti analogické té z důkazu, kde ale tentokrát f navyšuje stupeň o $\deg f$, dostáváme pro $k \gg 0$ vztah

$$\begin{aligned} h_{(f)}(k) &= h_0(k) - h_0(k-\deg f) = \tbinom{k+n}{n} - \tbinom{k+n-\deg f}{n} \\ &= \Big(k^n/n! + (n+\cdots+1)\cdot k^{n-1}/n! + \mathrm{lot}\Big) - \\ &\quad - \Big(k^n/n! + \big((n-\deg f) + \cdots + (1-\deg f)\big)\cdot k^{n-1}/n! + \mathrm{lot}\Big) \\ &= n\deg f\cdot k^{n-1}/n! + \mathrm{lot} \\ &= \deg f \cdot k^{n-1}/(n-1)! + \mathrm{lot}. \end{aligned}$$

Je tedy stupeň ideálu (f) roven stupni polynomu f.

Věta 5.10 (Bezoutova)**.** *Nechť $I \subseteq S$ je libovolný homogenní ideál a nechť $f \in S$ je homogenní polynom. Potom platí*

$$\deg(I+(f)) = \deg I \cdot \deg f$$

Důkaz. Využijeme exaktní posloupnost z důkazu předchozí věty, opět s posunem o $\deg f$. Označíme $J = I + (f)$ a dostáváme

$$\begin{aligned} h_J(k) &= h_I(k) - h_I(k-\deg f) \\ &= \Big(c_d k^d + c_{d-1}k^{d-1} + \mathrm{lot}\Big) - \Big(\underbrace{c_d(k-\deg f)^d}_{c_d\cdot k^d - c_d d\deg f\cdot k^{d-1} + \mathrm{lot}} + \underbrace{c_{d-1}(k-\deg f)^{d-1}}_{c_{d-1}\cdot k^{d-1}+\mathrm{lot}} + \mathrm{lot}\Big) \\ &= c_d d\deg f\cdot k^{d-1} + \mathrm{lot} \\ &= \deg I/d!\cdot d\deg f\cdot k^{d-1} + \mathrm{lot} \\ &= \deg I\cdot\deg f\cdot k^{d-1}/(d-1)! + \mathrm{lot} \end{aligned}$$

□

V případě, že je f lineární, je jeho stupeň 1 a je tedy počet průsečíků X s $V(f)$ roven stupni $\deg X$.

Důsledek 5.11. *Každý izomorfismus $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ je lineární.*

Důkaz. Idea důkazu je, že nadroviny jsou právě nadplochy stupně jedna a ty jsou při každém izomorfismu zachovávány. Přitom ale zobrazení zachovávající nadroviny je (alespoň pro $n > 1$ nebo 2) nutně lineární. □

Příklad 5.12. Kubická křivka $X = \{(s^3 : s^2t : st^2 : t^3) \mid (s : t) \in \mathbb{P}^1\} \subseteq \mathbb{P}^3$ není “úplný průnik”, tj. neexistuje $\operatorname{codim} X$ homogenních polynomů, které by generovaly $I(X)$. V našem případě je kodimenze dva a chceme tedy ukázat, že $I(X)$ není generovaný dvěma homogenními polynomy. Pokud by to byla pravda, musel by součin jejich stupňů být roven stupni X. Ten se jednoduše spočítá, že je tři. Ukážeme prvně, že $I(X)$ je roven ideálu

$$I = (x_0x_2 - x_1^2, x_0x_3 - x_1x_2, x_1x_3 - x_2^2).$$

Jako bázi $S^{(d)}/I(X)^{(d)}$ lze totiž zvolit jisté třídy monomů. Snadno se pak lze přesvědčit, že relace

$$x_0x_2 \sim x_1^2, \quad x_0x_3 \sim x_1x_2, \quad x_1x_3 \sim x_2^2$$

zachovávají součet indexů a naopak každá dvojice monomů se stejným součtem indexů je ekvivalentní. Je proto $h_I(k) = 3k+1$ a $\deg I = 3$. Jelikož $X = V(I)$ je jedinou komponentou I dimenze 1, musí být $\deg X = \deg I(X)$ nějaký dělitel 3, přičemž stupeň 1 má pouze projektivní podprostor a X není přímka.

Podle Bezoutovy věty by za předpokladu $I(X) = (f, g)$ musely mít polynomy f, g stupně 1 a 3, což by ale znamenalo, že X leží v rovině. Jednoduše se lze přesvědčit, že tomu tak není. Dodejme, že existují homogenní polynomy f, g takové, že $X = V(f, g)$ (přičemž vyjde nejspíš $I(X)^2 = (f, g)$, protože polynomy jsou stupňů 2 a 3). V takové, případě říkáme, že X je množinový úplný průnik.

Zabývejme se nyní tím, jak spočítat stupeň nula rozměrného ideálu, o kterém budeme uvažovat afinně. Předně pomocí primárního rozkladu zredukujeme problém na ideál soustředěný v jednom bodě. Toho dosáhneme pomocí následujícího lemmatu.

Lemma 5.13. *Nechť $I = I_1 \cap I_2$, přičemž $d = \dim V(I_1) = \dim V(I_2) > \dim V(I_1) \cap V(I_2)$ (nebo $V(I_1) \cap V(I_2) = \emptyset$). Potom platí $\deg I = \deg I_1 + \deg I_2$.*

Důkaz. Využijeme exaktní posloupnosti

$$0 \to S/(I_1 \cap I_2) \to S/I_1 \oplus S/I_2 \to S/(I_1 + I_2) \to 0.$$

Podle ní platí

$$\begin{aligned} h_{I_1 \cap I_2}(k) &= h_{I_1}(k) + h_{I_2}(k) - h_{I_1+I_2}(k) \\ &= \Big(\deg I_1 \cdot k^d/d! + \mathrm{lot}\Big) + \Big(\deg I_2 \cdot k^d/d! + \mathrm{lot}\Big) - \Big(\mathrm{lot}\Big) \\ &= (\deg I_1 + \deg I_2) \cdot k^d/d! + \mathrm{lot}. \end{aligned}$$

□

Je-li tedy I nula rozměrný ideál s primárním rozkladem $I = I_1 \cap \cdots \cap I_r$, pak platí

$$\deg I = \deg I_1 + \cdots + \deg I_r$$

a v následujícím postačí spočítat primární ideál odpovídající bodu $P \in V(I)$, který označme I_P. Stupeň $\deg I_P$ se nazývá lokálním stupněm I v bodě P.

Lemma 5.14. *Primární ideál I_P odpovídající bodu $P \in V(I)$ je roven $I + (\mathfrak{m}_P)^k$ pro $k \gg 0$.*

Důkaz. Podle Hilbertovy věty o nulách platí $\sqrt{I_P} = \mathfrak{m}_P$ a tedy $(\mathfrak{m}_P)^k \subseteq I_P$ pro nějaké $k \gg 0$. Potom

$$I + (\mathfrak{m}_P)^k \subseteq I_P.$$

Pro druhou inkluzi si uvědomme, že

$$V(\bigcap_{I_j \neq I_P} I_j + (\mathfrak{m}_P)^k) = V(\bigcap_{I_j \neq I_P} I_j) \cap V((\mathfrak{m}_P)^k) = \emptyset$$

a podle Hilbertovy věty o nulách pak $\bigcap_{I_j \neq I_P} I_j + (\mathfrak{m}_P)^k = R$. Je-li $f \in I_P$, můžeme tedy psát $f = g + h$, kde $g \in \bigcap_{I_j \neq I_P} I_j$ a $h \in (\mathfrak{m}_P)^k$. Proto také $g = f - h \in I_P + (\mathfrak{m}_P)^k = I_P$ a dohromady $g \in I$. Proto platí také

$$I_P \subseteq I + (\mathfrak{m}_P)^k.$$

□

Poznamenejme, že jakmile $I + (\mathfrak{m}_P)^k = I + (\mathfrak{m}_P)^{k+1}$, je již tato společná hodnota rovna I_P. Toho lze využít pro výpočet I_P – postupně počítat $I, I + \mathfrak{m}_P, I + (\mathfrak{m}_P)^2, \ldots$ do okamžiku, kdy se posloupnost zastaví. Jelikož $R/(\mathfrak{m}_P)^k$ lze kanonicky ztotožnit s vektorovým prostorem polynomů stupně menšího než k, lze spočítat kodimenzi

$$I_P/(\mathfrak{m}_P)^k \subseteq R/(\mathfrak{m}_P)^k$$

většinou relativně snadno. Tato kodimenze je rovna dimenzi kvocientu R/I_P, tedy $\deg I_P$.

Řekneme, že dvě variety $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n$ komplementární dimenze (tj. $\dim X + \dim Y = n$) se v bodě $P \in X \cap Y$ protínají transverzálně, jestliže $T_P X + T_P Y = T_P \mathbb{P}^n$.

Tvrzení 5.15. *Jestliže se variety $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n$ komplementární dimenze protínají v bodě P transverzálně, pak* $\deg(I(X) + I(Y))_P = 1$. *Pokud průnik není transverzální v P, potom*

$$\deg(I(X) + I(Y))_P \geq n + 1 - \dim(T_P X + T_P Y).$$

Důkaz. Počítejme afinně s $P = 0$. Potom $I(X)$ obsahuje polynomy tvaru $f^{(1)} + \mathrm{hot}$, kde $f^{(1)}$ je nulové na $T_0 X$ a podobně pro $I(Y)$. Pokud je tedy průnik transverzální, máme

$$x_1 + \mathrm{hot}, \ldots, x_n + \mathrm{hot} \in I(X) + I(Y).$$

Snadno se lze přesvědčit, že $I(X) + I(Y) + (\mathfrak{m}_0)^k$ obsahuje induktivně všechny monomy stupně $k, k-1, \ldots, 1$ a proto

$$I(X) + I(Y) + (\mathfrak{m}_0)^k = \mathfrak{m}_0$$

má kodimenzi 1 v R.

Není-li průnik transverzální, lze podobně ukázat, že

$$I(X) + I(Y) + (\mathfrak{m}_0)^2 \subseteq R$$

se skládá právě z těch polynomů s nulovým absolutním členem, jejichž lineární část je nulová na $T_P X + T_P Y$. Kodimenze tohoto ideálu je proto rovna té z tvrzení (jednička odpovídá absolutnímu členu). Kodimenze $(I(X) + I(Y))_P = I(X) + I(Y) + (\mathfrak{m}_0)^k$ je buď stejná nebo vyšší, proto platí nerovnost z tvrzení. □

Poznamenejme, že Bezoutova věta platí mnohem obecněji, než jak jsme ji zde formulovali a dokázali. Zejména, pokud je průnik $X \cap Y$ transverzální ve všech bodech, platí, že

$$\#(X \cap Y) = \deg X \cdot \deg Y$$

(obecně to myslím nebude platit ani po nahrazení $\#(X \cap Y)$ stupněm $\deg(I(X) + I(Y))$, ačkoliv pro úplné průniky by to platit mělo).

Tvrzení 5.16. *Ideál $I \subseteq S$ je primární, právě když množina $\{(I : x) \mid x \notin I\}$ obsahuje jediný prvoideál P. V tom případě říkáme, že I je P-primární a platí $P = \sqrt{I}$.*

Důkaz. Počítejme $(I : x)$ v případě, že I je primární. Jelikož $x \notin I$, je součin $xy \in I$ pouze, pokud $y \in \sqrt{I}$, tedy vždy $I \subseteq (I : x) \subseteq \sqrt{I} = P$. Vzítím radikálů dostáváme $\sqrt{(I : x)} = P$ a jediný prvoideál mezi $(I : x)$ tedy může být P. V dalším ukážeme, že nějaký prvek x, pro nějž je $(I : x)$ prvoideál, existuje. Budeme však postupovat obecněji.

Předpokládejme, že $I = I_1 \cap \cdots \cap I_r$ je minimální rozklad na průnik primárních ideálů. Potom pro libovolný $x \in (I_2 \cap \cdots \cap I_r) \smallsetminus I_1$ platí $(I : x) = (I_1 : x)$ a podle předchozího pak $\sqrt{(I : x)} = P_1$. Díky konečné generovanosti P_1 také $(P_1)^k \subseteq (I : x)$, tedy $(P_1)^k(x) \subseteq I$. Zvolme k minimální s touto vlastností. Potom $(P_1)^{k-1}(x) \nsubseteq I$ a nechť $y \in (P_1)^{k-1}(x) \smallsetminus I$. Dostáváme $P_1 y \in (P_1)^k(x) \subseteq I$ a tedy $P_1 \subseteq (I : y)$. Zároveň však podle předchozího také $(I : y) = (I_1 : y) \subseteq P_1$ a dostáváme tedy rovnost. Platí tedy, že každý z asociovaných prvoideálů se vyskytuje jako $(I : x)$ pro nějaké $x \notin I$.

Pro úplnost ještě ukážeme, že v obecném případě z předchozího odstavce každý prvoideál tvaru $(I : x)$ musí být některý z P_j. To je proto, že

$$P_1 \cap \cdots \cap P_r = \sqrt{I} \subseteq \sqrt{(I : x)} = \sqrt{(I_1 : x)} \cap \cdots \cap \sqrt{(I_r : x)} = \bigcap_{x \notin P_j} P_j$$

Je-li tedy $(I : x)$ prvoideál, pak musí být roven některému z P_j (je roven průniku některých z nich a proto musí být roven jednomu z nich). $\square$

Poznámka. Z předchozího tvrzení lze jednoduše vyvodit, že každý ireducibilní ideál je primární. Předpokládejme, že existují $x, y \notin I$ takové, že $(I : x), (I : y)$ jsou dva různé prvoideály. Pak pro libovolný $z \in I + (x) \smallsetminus I$ je $(I : z) = (I : x)$ (inkluze “$\supseteq$” je zřejmá a druhá plyne z toho, že z $t(wx) \in I$ plyne $tw \in (I : x)$ a tedy $t \in (I : x)$, protože $wx \notin I$, tj. $w \notin (I : x)$). Stejně tak $(I : z) = (I : y)$ pokud $z \in I + (y) \smallsetminus I$. Proto $(I + (x)) \cap (I + (y)) = I$, což je spor s ireducibilitou. Podobný důkaz lze vést v homogenním případě, jakmile se ukáže, že v případě, že $(I : x)$ je prvoideál, musí být automaticky homogenní a je roven $(I : x_i)$, kde x_i je nějaká homogenní komponenta x. Důkaz tohoto tvrzení viz Eisenbud.