Životní pojištění

Brno 2012

Osnova

Modelování úmrtnosti

- ***Charakteristika úmrtnosti:***
  - dva stavy- "*naživu*" a "*zemřelý*", o příslušném stavu každého z pojištěných lze jednoznačně rozhodnout;
  - přechod mezi těmito stavy pouze jedním směrem- úmrtí;
  - okamžik úmrtí je náhodný a může být popsán jen s použitím pravděpodobnosních nástrojů.

Délka života T_0

Délka života:

- spojitá náhodná veličina představující **délku života právě narozeného jedince** (doba mezi věkem 0 a úmrtím);
- měří se v letech;

Představa na níž je založen model úmrtnosti:

- náhodně vybereme jednoho jedince z velké skupiny x-letých, jeho délka života není známá, ale můžeme na ni pohlížet jako na náhodnou veličinu s odhadnutelným pravděpodobnostním rozdělením.

Pravděpodobnostní rozdělení

- Pravděpodobnostní rozdělení délky života T_0 popisujeme pomocí **distribuční funkce**

$$F_0(t) = \mathrm{P}(T_0 \leq t)$$

díky spojitosti můžeme psát

$$\mathrm{P}(T_0 \leq t) = \mathrm{P}(T_0 < t).$$

- Někdy se zavádí také **funkce přežití**

$$S_0(t) = \mathrm{P}(T_0 > t) = 1 - F_0(t)$$

- **Budoucí délku života ve věku x** za podmínky, že jedinec se dožil věku x budeme značit T_x.
- Distribuční funkci **délky života ve věku x** počítáme pomocí podmíněné pravděpodobnosti:

$$\begin{aligned} F_x(t) &= \mathrm{P}(T_x \le t) = \mathrm{P}(T_0 \le x+t | T_0 > x) = \\ &= \frac{\mathrm{P}(x < T_0 \le x+t)}{\mathrm{P}(T_0 > x)} = \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)}. \end{aligned}$$

- Pro **funkci přežití ve věku x** platí

$$\begin{aligned} S_x(t) &= \mathrm{P}(T_x > t) = \mathrm{P}(T_0 > x+t | T_0 > x) = \\ &= \frac{\mathrm{P}(T_0 > x+t)}{\mathrm{P}(T_0 > x)} = \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)}. \end{aligned}$$

Značení

- q_x **- pravděpodobnost úmrtí ve věku x**: pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku x, se nedožije věku $x+1$

$$q_x = F_x(1) = \mathrm{P}(T_x \leq 1);$$

- p_x **- pravděpodobnost dožití ve věku x**: pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku x, se dožije věku $x+1$:

$$p_x = S_x(1) = \mathrm{P}(T_x > 1);$$

- ${}_tq_x$ - pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku x, zemře před dosažením věku $x+t$

$${}_tq_x = F_x(t) = \mathrm{P}(T_x \leq t);$$

Značení

- ${}_tp_x$ - pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku x, se dožije věku $x+t$

$$ {}_tp_x = S_x(t) = \mathrm{P}(T_x > t); $$

- ${}_{s|}q_x$ - pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku x, zemře ve věku $x+s$

$$ {}_{s|}q_x = F_x(s+1) - F_x(s) = \mathrm{P}(s < T_x \leq s+1); $$

- ${}_{s|t}q_x$ - pravděpodobnost toho, že jedinec, který je naživu ve věku x, se dožije věku $x+s$, ale zemře před dosažením věku $x+s+t$

$$ {}_{s|t}q_x = F_x(s+t) - F_x(s) = \mathrm{P}(s < T_x \leq s+t). $$

Intenzita úmrtnosti

- Označme si pravděpodobnostní hustotu veličiny T_0 jako

$$f_0(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_0(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} ({}_t q_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (1 - {}_t p_0) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} {}_t p_0.$$

- Pak pravděpodobnostní hustota veličiny T_x je

$$\begin{aligned} f_x(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{{}_{x+t} p_0}{{}_x p_0} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} {}_t p_x. \end{aligned}$$

- **Intenzita úmrtnosti ve věku x**

$$\mu_x = \frac{f_0(x)}{{}_x p_0} = -\frac{1}{{}_x p_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} {}_x p_0 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln({}_x p_0).$$

Zákony úmrtnosti

- Praktické využití intenzity úmrtnosti.
- Snaha modelovat lidskou úmrtnost pomocí matematických vzorců, konstrukce *křivek úmrtnosti* pro danou populaci.
- Jedná se pak o úsporný popis velkého množství údajů.
- Úmrtnostní křivky jsou hladké a přispívají k vyhlazování úmrtnostních tabulek.
- Pro rozlišení různých zákonů úmrtnosti jsou vhodné různé volby intenzit úmrtnosti.

Konstantní intenzita úmrtnosti

- Intenzita úmrtnosti je konstantní, tedy

$$\mu_x = \lambda$$

pak můžeme psát

$$_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}\,\mathrm{d}s\right) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

- Funkce přežití $_tp_x$ zde nezávisí na věku, a proto je tento zákon úmrtnosti pro lidskou populaci nevhodný.

Moivrův zákon úmrtnosti

- Jedná se o rovnoměrné rozdělení délky života s pravděpodobnostní hustotou

$$f_x(t) = \frac{1}{\omega - x}, \text{ pro } 0 < t < \omega - x,$$

kde ω je stanovený nejvyšší věk pro uvažovanou populaci.

- Platí

$${}_tp_x = 1 -{}_t q_x = 1 - F_x(t) = \frac{\omega - x - t}{\omega - x}, \text{ pro } 0 < t < \omega - x.$$

- Intenzita úmrtnosti

$$\mu_x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln({}_xp_0) = \frac{1}{\omega - x}, \text{ pro } 0 < x < \omega.$$

Další zákony úmrtnosti

- **Gompertzův zákon úmrtnosti:** exponenciálně rostoucí intenzita úmrtnosti

$$\mu_x = Bc^x, \text{ kde } B > 0, \text{ a } c > 1 \text{ jsou parametry.}$$

- **Makehamův zákon úmrtnosti:** zobecnění Gompertzovy intenzity úmrtnosti do tvaru

$$\mu_x = A + Bc^x, \text{kde } A > 0 \text{ je další parametr.}$$

Úmrtnostní tabulky

- jsou základním nástrojem pro výpočty prováděné v rámci životního pojištění. Prezentují model úmrtnosti praktickým způsobem.
- poskytují základní informace o úmrtnosti uzavřené stacionární populace- nedochází k migraci obyvatelstva a v čase se nemění ani velikost populace a její věkové složení.
- pro Českou republiku je publikuje je každoročně Český statistický úřad.

Popis úmrtnostni tabulky

Sloupce úmrtnostní tabulky představují konkrétní veličiny, např. věk osob, počet žijících osob v daném věku, atd. **Řádky** představují hodnoty veličin uvedených ve sloupcích pro konkrétní věk.

Charakteristika konkrétních veličin uvedených v úmrtnostních tabulkách:

- ***x*** - vyjadřuje **věk osoby** - $x \in \{0, 1, ..., \omega\}$, kde ω je předpokládaný nejvyšší věk, který může dosáhnout osoba sledovaného souboru

Veličiny úmrtnostní tabulky

- ***pravděpodobnost dožití*** p_x - vyjadřuje pravděpodobnost, že x-letá osoba se dožije věku $(x+1)$
- ***pravděpodobnost úmrtí*** q_x - vyjadřuje pravděpodobnost, že x-letá osoba se nedožije věku $(x+1)$
- platí $p_x + q_x = 1$
- ***počet dožívajících se věku*** x l_x- vyjadřuje počet osob žijících ve věku x. Počáteční hodnota l_0 vyjadřuje počáteční počet osob modelovaného souboru a nazývá se **kořen úmrtnostní tabulky**.

Příklad

Kolik osob ve věku 60 let zemřelo během

- 5 roků;
- 7 roků?

Komutační čísla

- Jedná se o často se opakující součiny a součty v pojistných výpočtech.
- Tyto součiny a součty byly označeny a jejich hodnoty jsou tabelizovány.
- Hodnoty komutačních čísel závisí na úmrtnostní tabulce a na výšce úrokové míry.
- V dalším budeme používat označení v pro **diskontní faktor**
$$v = \frac{1}{1+i},$$
kde i je úroková míra.

Rozlišujeme komutační čísla:

- **nultého řádu:**

$$
\begin{aligned}
D_x &= l_x v^x \quad \text{diskontovaný počet dožívajících se věku } x \\
C_x &= d_x v^{x+1} \quad \text{diskontovaný počet zemřelých ve věku } x
\end{aligned}
$$

- **prvního řádu**

$$
\begin{aligned}
N_x &= \sum_{j=0}^{\omega-x} D_{x+j} \\
M_x &= \sum_{j=0}^{\omega-x} C_{x+j}
\end{aligned}
$$

- **druhého řádu**

$$S_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} N_{x+j}$$

$$R_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} M_{x+j}$$

- Komutační čísla vyšších řádů se nepoužívají.

Pojistné

- Platí, že **pojistné = netto pojistné + náklady pojišťovny**
- Pojistné se také někdy nazývá **brutto pojistné**, pojistná sazba nebo pojistný tarif. Jedná se o ekvivalentní výrazy.
- Netto pojistné se někdy nazývá **čisté pojistné** nebo rizikové pojistné.
- **Podle frekvence plateb pojistného rozlišujeme**
  - **Jednorázové** pojistné - pojistné je zaplaceno jednou a dále se nic neplatí.
  - **Běžné** pojistné - pojistné je placeno jednou za rok. Dá se dále rozlišit placení běžné po celou dobu pojištění a placení běžné placené kratší dobu, než je doba pojištění.
  - **Področní** pojistné - je placeno *m* krát za rok, např. měsíčně, půlročně, atd.

Základní principy pojištění osob

Při stanovení výše pojistného vycházíme ze dvou záladních principů. Jsou to

- **princip fiktivního souboru** - spočívá v předpokladu, že stejný typ pojištění uzavřou všechny osoby, které jsou ve věku x naživu. Tento předpoklad zjednodušuje všechny úvahy, ale nakonec vede k výsledkům dostatečně přesným na praktické použití.
- **princip ekvivalence** - vychází z požadavku, aby se rovnaly příjmy a výdaje pojišťovny, pokud se diskontují nebo zúročí ke stejnému datu.

- Pojišťovna oceňuje své budoucí příjmy a výdaje hlavně pomocí jejich **očekávaných počátečních hodnot.** Princip ekvivalence pak má tento tvar:

  očekávaná počáteční hodnota pojistného=
  =očekávaná počáteční hodnota pojistného plnění.

- V nejjednodušším případě představuje počáteční hodnota pojištění **jednorázové netto pojistné**, protože částka v této výši jednorázově pokryje průměrná pojistná plnění pojišťovny.
- Pro jednoduchost budeme uvažovat jednotková pojistná plnění, pak mluvíme o **jednotkové počáteční hodnotě pojištění.**

Vzorce pro výpočet některých pojištění

- pojištění pro případ dožití

$$ {}_nE_x = {}_n p_x \cdot v^n = \frac{D_{x+n}}{D_x}; $$

- (doživotní) pojištění pro případ smrti

$$ A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1} = \frac{M_x}{D_x}; $$

- dočasné pojištění pro případ smrti

$$ A^{1}_{x\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}; $$

Vzorce pro výpočet některých pojištění

- smíšené pojištění

$$A_{x\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-2} {}_{k|}q_x \cdot v^{k+1} + {}_{n-1}\, p_x \cdot v^n = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x};$$

- doživotní důchod předlhůtní

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} {}_k p_x \cdot v^k = \frac{N_x}{D_x};$$

- doživotní důchod polhůtní

$$a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_k p_x \cdot v^k = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Příklad

20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na smíšené pojištění na 50 roků. Kolik obdrží dědicové, pokud daná osoba zemře během dané doby, respektive kolik obdrží pojištěná osoba, pokud se dožije konce pojištěni (nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry)?

Výpočet běžného netto pojistného

- Předpokládejme hodnotu pojištění π.
- Zákazník si ale přeje platit pojistné m roků ročními předlhůtními splátkami.
- Platí, že $m \leq n$, kde n je doba trvání pojištění.
- Výše předlhůtní splátky je P.
- Vyjdeme opět z rovnice ekvivalence

$$\textit{přijaté jednorázové pojistné } \pi =$$
$$= \textit{ součet ročních pojistných přijatých od žijících osob}$$

- To lze matematicky zapsat jako

$$\pi \cdot l_x = P \cdot l_x + P \cdot l_{x+1} \cdot v + \ldots + P \cdot l_{x+m-1} \cdot v^{m-1}$$

- Rovnici vynásobíme výrazem v^x a přejdeme ke komutačním číslům

$$\pi \cdot D_x = P \cdot D_x + P \cdot D_{x+1} + \ldots + P \cdot D_{x+m-1}$$

Odtud

$$\begin{aligned} \pi \cdot D_x &= P \cdot (N_x - N_{x+m}) \\ P &= \frac{\pi}{\frac{N_x - N_{x+m}}{D_x}} \end{aligned}$$

Brutto pojistné

- **Netto pojistné** se počítá tak, aby pokrylo výplatu pojistných částek**.**
- Pokud připočítáme k netto pojistnému také **správní náklady**, dostaneme tzv**. brutto pojistné.**
- **Označení:**
  - Б **- jednorázové brutto pojistné**
  - ***B*- běžné brutto pojistné**

Náklady

- **Počáteční jednorázové náklady α -** spojené s uzavíráním pojistné smlouvy (propagace, provize pojistným agentům, obchodním zástupcům, makléřům). Určují se v procentech z pojistné částky nebo jako procenta z ročního důchodu.
- **Běžné správní náklady β -** jedná se o každoroční náklady během trvání pojištění spojené s jeho udržováním (náklady na daně, nájemné, administrativu,...); určují se v promilích z pojistné částky nebo z ročního důchodu.
- **Inkasní náklady γ -** jedná se o náklady spojené s inkasem (běžného) pojistného; počítají se jako procenta z brutto pojistného.
- **Náklady při výplatě důchodů δ -** vznikají jen u důchodového pojištění jako náklady spojené s výplatami důchodů.

- Brutto pojistné placené jednorázově pro doživotní pojištění

$$Б = \pi + \alpha + \beta \cdot \ddot{a}_x$$

- Brutto pojistné placené jednorázově pro dočasné pojištění

$$Б = \pi + \alpha + \beta \cdot \ddot{a}_{x\overline{n}|}$$

- Brutto pojistné placené běžně pro doživotní pojištění

$$B = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \left(P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_x} + \beta \right)$$

Příklad

35-ti letá osoba uzavře pojistnou smlouvu na smíšené pojištění na 15 let s pojistnou částkou 25000 Kč. Vypočítejte jednorázové brutto pojistné, jestliže víme, že $\pi(A_{35;\overline{15}|}) = 18647$Kč. Pojišťovna si účtuje tyto náklady: $\alpha = 3\%$ a $\beta = 0,3\%$.