Neživotní pojištění

Brno 2012

Osnova

Tarifní skupiny

- **Tarifní skupiny** jsou homogenní skupiny pojistných smluv, pro něž je pojistné riziko přibližně stejné.
- V rámci každé tarifní skupiny je možné vyžadovat jednotnou pojistnou sazbu.
- Tarifování vede k individualizaci rizik.

Příklad tarifování: V pojištění proti vichřicím uvažujme 4 tarifní proměnné s následujícími počty rizikových úrovní:

1. geografická poloha se 2 úrovněmi: méně nebo více ohrožené oblasti;
2. druh budovy s 5 úrovněmi: budovy ve skupině, jednotlivě stojící budovy, zemědělské budovy, průmyslové budovy, kostely s věžemi;
3. druh venkovních stěn se 3 úrovněmi: masivní, otevřené, jiné;
4. druh střechy se 3 úrovněmi: tašky nebo břidlice, lepenka, dřevo nebo rákos.

Základní statistické podklady a ukazatele

Statistické podklady jsou:

- počet pojištění N;
- počet pojistných událostí n;
- celková pojistná částka (všech pojištění);
- celkové pojistné plnění;
- maximální škoda v daném roce;
- celkové pojistné, přičemž rozlišujeme:
  - ***předepsané pojistné***: pojistné vyplývající z pojistných smluv;
  - ***přijaté pojistné:*** skutečně inkasované pojistné v daném kalendářním roce, obvykle menší než předepsané pojistné. Dělí se na *zasloužené pojistné* (pojistné příslušné danému roku jako účetnímu období) a *nezasloužené pojistné* (pojistné příslušné budoucímu roku jako účetnímu období).

Statistické ukazatele

Statistické ukazatele jsou:

- průměrné pojistné plnění: $PPP = \frac{\text{celkové pojistné plnění}}{N}$;
- průměrná pojistná částka: $\text{PPČ} = \frac{\text{celková pojistná částka}}{N}$;
- průměrná škoda: $\text{PŠ} = \frac{\text{celkové pojistné plnění}}{n}$;
- škodní frekvence: $\text{ŠF} = q_1 = \frac{\text{celkové pojistné}}{\text{celková pojistná částka}}$;
- pojistná sazba: $PS = \frac{\text{celkové pojistné}}{\text{celková pojistná částka}}$;
- škodní sazba: $\text{ŠS} = \frac{\text{celkové pojistné plnění}}{\text{celková pojistná částka}}$;
- škodní průběh: $\text{ŠP} = \frac{\text{celkové pojistné plnění}}{\text{celkové pojistné}}$;
- škodní stupeň: $\text{ŠSt} = q_2 = \frac{\text{PŠ}}{\text{PPČ}}$.

Obecný vzorec netto pojistného

Při odvození vzorce ročního netto pojistného P budeme předpokládat, že:

- jako jednotku, ke které je vztaženo pojistné, budeme uvažovat pojistnou částku;
- každá z N pojistek v uvažované tarifní skupině má stejnou pojistnou částku S, platí tedy PPČ $= S$;
- příjmy z pojistného a výdaje na pojistné plnění v důsledku n pojistných událostí jsou rozloženy během roku rovnoměrně. Pojistné tedy vynáší vždy přibližně jednu polovinu roku úrok s roční technickou úrokovou mírou i.

Uplatníme-li princip ekvivalence mezi příjmy z pojistného a výdaji na pojistné plnění dostáváme

$$N \cdot P \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right) = n \cdot \text{PŠ},$$

odtud dostáváme

$$\begin{aligned} P &= \frac{n \cdot \text{PŠ}}{N \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{2}\right)} \cdot \frac{n}{N} \cdot \frac{\text{PŠ}}{PP} \cdot PP \\ &= v \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \text{PPČ}, \end{aligned}$$

kde

- - $v = \frac{1}{\left(1+\frac{i}{2}\right)}$ je diskontní faktor,
  - q_1 je škodní frekvence,
  - q_2 je škodní stupeň.

- Vzhledem k našim předpokladům PPČ $= S$. Pak netto pojistné spočítáme jako

$$P = v \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot S$$

- Roční netto pojistné na jednotkovou částku vypočítáme jako

$$p = v \cdot q_1 \cdot q_2.$$

Škodní tabulka

- **Škodní tabulka** prezentuje přehledným způsobem četnostní rozdělení výše škod pro danou tarifní skupinu.
- Podobně jako úmrtnostní tabulky v životním pojištění jsou škodní tabulky konstruovány na základě skutečných dat, ale pro hypotetický soubor škod.

Formy pojištění

- Rozlišují se podle toho, jak závisí výše pojistného plnění na výši škody.
- **Formy pojištění dělíme na**:
  - pojištění na pojistnou částku,
  - škodové pojištění,
  - spoluúčast.
- Budeme předpokládat, že nejvyšší možná škoda M odpovídá pojistné hodnotě H.
- **Intenzita pojistné ochrany** se definuje jako podíl pojistného plnění vůči škodě.

Pojištění na pojistnou částku (obnosové pojištění)

- Pojistné plnění **závisí pouze na vzniku pojistné události** ne na výši škody.
- Je typické pro pojištění osob, ale také se objevuje např. v invalidním pojištění nebo jako pojistné plnění za smrt úrazem v úrazovém pojištění.
- **Pojistné plnění** se vyplácí **ve výši pojistné částky**, případně ve výši jejího určitého procenta.
- Skutečná výše pojistné potřeby se nezjišťuje a intenzitu pojistné ochrany / nelze určit.

- Obecný vzorec netto pojistného se zjednodušuje do tvaru

$$P_{(S)} = v \cdot q_1 \cdot S,$$

  kde S je pojistná částka.
- V životním pojištění se q_1 nahrazuje pravděpodobností úmrtí q_x. Pak vzorec odpovídá ročnímu běžnému netto pojistnému placenému ve věku x s pojistnou částkou S vyplácenou v případě úmrtí.

Škodové pojištění

- Pojistné plnění závisí na výši vzniklé škody X. Vždy platí

$$\text{pojistné plnění} \leq X.$$

- Setkáváme se s těmito typy škodových pojištění:
  - ryzí zájmové pojištění,
  - pojištění na plnou hodnotu
  - pojištění na první riziko

Ryzí zájmové pojištění

- Pojistné plnění je přímo rovno vzniklé škodě a **pojistná částka se zde neudává.**
- Označíme-li vzniklou škodu X, pak

$$\text{pojistné plnění} = X.$$

- Používá se pro pojištění předmětů, u nichž lze určit pojistnou hodnotu H, např v havarijním pojištění.
- Poskytuje stoprocentní intenzitu pojistné ochrany.
- Bývá kombinováno se spoluúčastí.

Obecný vzorec netto pojistného přechází do tvaru

$$P_{(Z)} = v \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot H,$$

kde H je pojistná hodnota, která nahrazuje neexistující pojistnou částku.

Pojištění na plnou hodnotu

- Klient zde volí pojistnou částku S ($S \leq H$).
- Tato je v určitém poměru k pojistné hodnotě H

$$s = \frac{S}{H}, \qquad \text{kde } s \leq 1.$$

- Takto je stanovena **intenzita pojistné ochrany**, neboť zde platí $I = s$.
- Pojistné plnění se pak vypočítá jako

$$\text{pojistné plnění} = s \cdot X.$$

- Je to převažující forma v pojištění majetku.

- Obecný vzorec netto pojistného lze vzít v původním tvaru

$$ {}^{S}P^{H}_{(H)} = v \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot S = v \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot s \cdot H = s \cdot P_{(Z)}. $$

- Je-li
  - $S = H$, pak klient zvolil *ryzí zájmové pojištění.*
  - $S < H$, pak se jedná o *podpojištění*, kdy je pojistné sice nižší než v předchozím případě, ale v případě pojistné události klient dostane také nižší pojistné plnění o stejný poměr.

Pojištění na první riziko

- Jedná se o ryzí zájmové pojištění shora omezené pojistnou částkou S.
- Pojistné plnění závisí na vzniklé škodě X prostřednictvím vztahu

$$\text{pojistné plnění} = \begin{cases} X & \text{pro } X \leq S, \\ S & \text{pro } X > S \end{cases}$$

- Pojištění na první riziko se používá:
  - v případech, kdy jsou typické malé škody a jen ojediněle škody velké (např. v pojištění domácnosti)
  - v případech, kdy chce klien záměrně pojistit jen část celkové pojistné hodnoty (např. pojištění skladu na vloupání)
  - v pojištění odpovědnosti za škodu

Obecný vzorec netto pojistného přechází do tvaru

$$^{S}P^{H}_{(P)} = v \cdot q_1 \cdot [G_s \cdot H + (1 - b_s) \cdot S] = v \cdot q_1 \cdot [G_s + (1 - b_s) \cdot s] \cdot H,$$

kde

- b_z je kumulativní relativní četnost škod ve škodních intervalech nejvýše z,
- G_z je vážená výše škod ve škodních intervalech nejvýše z,
- s je poměr $\frac{S}{H}$,
- $G_s \cdot H$ představuje střední výši pojistného plnění pro škody do škodního stupně s,
- $(1 - b_s) \cdot S$ je střední výše pojistného plnění pro škody nad škodní stupeň s

Příklad

Stanovte roční netto pojistné při pojistně-technické úrokové míře 2%, odhadnuté škodní frekvenci 2%, škodním stupni $0,3082$, pojistné hodnotě 300000 Kč, jedná-li se o následující formy škodového pojištění:

- ryzí zájmové pojištění;
- pojištění na plnou hodnotu s pojistnou částkou 200000 Kč.

Spoluúčast (Franšíza)

- Představuje doplňkovou formu pojištění, kdy se klient určitým způsobem podílí na úhradě škody.
- Vždy se kombinuje s nějakou základní formou pojištění.
- Rozlišujeme tyto typy:
  - podílová spoluúčast,
  - excendentní spoluúčast,
  - integrální spoluúčast.

Podílová spoluúčast

- Na vrub pojištěného zůstává sjednané procento p vzniklé škody.
- Např. budeme-li uvažovat kombinaci ryzího zájmového pojištění s podílovou spoluúčastí vypočteme netto pojistné jako

$$_{p}P_{(Z)} = \frac{100 - p}{100} \cdot P_{(Z)}$$

Excendentní spoluúčast

- Pojišťovna nehradí vzniklou škodu, která nedosahuje hodnoty F_0. A v případě, že škoda je vyšší než F_0, hradí pojišťovna až tu část, která převyšuje hodnotu F_0.
- Např. při kombinaci pojištění na první riziko s excendentní spoluúčastí je příslušné netto pojistné

$$ {}^{S}_{F_0}P^{H}_{(P)} = v \cdot q_1 \cdot [G_s + (1 - b_s) \cdot s - G_{f_0} - (1 - b_{f_0}) \cdot f_0] \cdot H, $$

kde $f_0 = \frac{F_0}{H}$.

Příklad

Stanovte roční netto pojistné při pojistně-technické úrokové míře 2%, odhadnuté škodní frekvenci 2%, pojistné hodnotě 300000 Kč, $G_{0,10} = 0,024871$, $G_{0,60} = 0,103613$, $b_{0,10} = 0,49742$, $b_{0,60} = 0,74987$ a $q_2 = 0,3082$, jedná-li se o následující formy škodového pojištění v kombinaci se spoluúčastí:

- ryzí zájmové pojištění s podílovou spoluúčastí 10%;
- pojištění na první riziko s pojistnou částkou 180000 Kč a s excendentní spoluúčastí ve výši 30000 Kč.

Brutto pojistné

- Konstruuje se z příslušného netto pojistného podobným způsobem jako v životním pojištění:

$$\begin{aligned}\text{brutto pojistné} &= \text{netto pojistné} + \text{bezpečnostní přirážka} \\ &+ \text{správní náklady} + \text{kalkulovaný zisk.}\end{aligned}$$

- Po přidání bezpečnostní přirážky často mluvíme o **rizikovém pojistném.**

Bezpečnostní přirážka (výkyvová přirážka)

- Měla by krýt výkyvy škodního průběhu, které jsou z hlediska pojistitele nepříznivé.
- Tyto škody jsou způsobeny především
  - aplikací pravděpodobnostního počtu a expertních odhadů na reálná data;
  - ekonomickými a jinými změnami relevantními pro daný pojistný produkt.
- Bývá jedním ze zdrojů při vytváření rezervy na vyrovnávání mimořádných rizik.

Bezpečnostní přirážka statistické povahy

- Nejčastější konstrukce rizikového pojistného RP (tj. netto pojistné P s bezpečnostní přirážkou) je

$$RP = (1 + \lambda_1) \cdot P + \lambda_2 \cdot s + \lambda_3 \cdot s^2,$$

  kde
  - s (resp. s^2) je odhadnutá směrodatná odchylka (resp. odhadnutý rozptyl) související se statistickým odhadem netto pojistného P;
  - λ_i jsou nezáporné koeficienty.
- Problém rizikového pojistného se pak redukuje na výpočet odhadu s (resp. s^2) a na numerické nastavení hodnot λ_i.

- Nejčastější v praxi bývá **princip směrodatné odchylky**:

$$RP = P + \lambda \cdot s.$$

- Uvažujme případ, kdy máme údaje za jeden rok pro tarifní skupinu se N pojistkami s pojistnoju částkou S a s ročním netto pojistným p kalkulovaným na jednotkovou pojistnou částku.
- Pro každou pojistku máme údaje o výši škody v daném roce vyjádřené jako $z_i \cdot S$, kde z_i má význam škodního stupně i-té pojistky.

- Platí

$$N \cdot p \cdot S = \sum_{i=1}^{N} z_i \cdot S,$$

kde

  - na pravé straně je celkové netto pojistné v dané tarifní skupině za daný rok
  - na pravé staně je celková škoda.

- Odtud

$$p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} z_i.$$

- Odhadnutá směrodatná odchylka výše škody na jednu pojistku je

$$s = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (z_i \cdot S - p \cdot S)^2},$$

kde při větších hodnotách N nevadí, že ve jmenovateli není $N - 1$.

- Využijeme vzorec pro p a aproximaci $p^2 \approx 0$, která je přípustná vzhledem k malým hodnotám pojistné sazby p.

- Pak dostaneme

$$
\begin{aligned}
s &= S \cdot \sqrt{\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} z_i^2 - 2 \cdot p \cdot \sum_{i=1}^{N} z_i + N \cdot p^2\right)} \\
&= S \cdot \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i^2 - p^2} \approx S \cdot \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i^2}.
\end{aligned}
$$

- Odhadnutá směrodatná odchylka celkové škody pro všechny pojistky v uvažované tarifní skupině je proto

$$
R = \sqrt{N} \cdot s \approx S \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{N} z_i^2}
$$

.

- Za předpokladu normálního rozdělení celkové škody a s využitím distribuční funkce rozdělení $N(0,1)$ pak platí

$$P\left(\frac{\text{celková škoda} - \text{celkové netto pojistné}}{R} < k\right) \approx \Phi(k).$$

- Snažíme se určit bezpečnostní přirážku tak, aby byla téměř stoprocentně bezpečná. Platí $\Phi(4) = 0,9997$ a odtud podle předchozího vzorce dostáváme

$$\Phi(4) \approx P(\text{celkové netto pojistné} + 4R > \text{celková škoda}).$$

- Tedy volíme-li bezpečnostní přirážku ve výši čtyřnásobku R, pak po rozpočtení na jednotlivé pojistky z uvažované tarifní skupiny dostáváme rizikové pojistné ve tvaru

$$RP = P + \frac{4R}{N} = P + \frac{4}{N} \cdot S \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{N} z_i^2} = P + \frac{4}{\sqrt{N}} \cdot s.$$

Příklad

Stanovte roční rizikové pojistné v tarifní skupině kde máme uzavřených 44 500 pojistek, pojistná hodnota je 300 000 Kč, součet čtverců šodních stupňů z_i je 179,64, škodní frekvence je 2%, škodní stupeň je 0,3082 a pojistně technická úroková míra činí 2%, víte-li, že se jedná o ryzí zájmové pojištění.

Matematické modelování

Hlavní důvody, které motivují snahu o matematické modelování pojistných jevů:

- model může nahradit nedostatečný počet dat;
- pomocí jednoduchých matematických vztahů je možné popsat chování velkých pojistných kmenů;
- lze statisticky testovat vlastnosti pojistných kmenů, atd.

Modely počtu pojistných nároků

- Jedná se o modely vycházející z pravděpodobnostního rozdělení náhodné veličiny n, která označuje počet pojistných nároků na jednu smlouvu během jednoho roku.
- Její nejčastější využívaná pravděpodobnostní rozdělení jsou:
  - **Binomické rozdělení** $n \sim Bi(K, p)$

$$P(n = k) = \binom{K}{k} p^k (1-p)^{K-k}, \qquad k = 0, 1, ..., K,$$

$$E(n) = Kp,$$

$$D(n) = Kp(1-p)$$

- **Poissonovo rozložení** $n \sim P(\lambda)$, kde $\lambda > 0$, je to limitní případ binomického rozdělení $n_K \sim Bi(K, p_K)$ pro $K \to \infty$ při konstantním $E(n_K) = Kp_K = \lambda$. n má význam počtu zdarů ve velkém počtu nezávislých pokusů s malou pravděpodobností zdaru.

$$P(n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$E(n) = \lambda$$

$$D(n) = \lambda$$

- **Negativní binomické rozdělení (Pólyovo rozdělení)**
  $n \sim NB(\alpha, p)$ je dvouparametrické rozdělení s $\alpha > 0$ a $0 < p < 1$: n má význam počtu nezdarů před α-tým zdarem v nezávislých pokusech s pravděpodobností nezdaru $1 - p$

$$P(n = k) = \binom{\alpha + k - 1}{k} p^{\alpha} (1 - p)^{k}, \qquad k = 0, 1, 2, ...,$$

$$E(n) = \frac{\alpha(1 - p)}{p},$$

$$D(n) = \frac{\alpha(1 - p)}{p^2}.$$

Modely výše škod

- Jedná se o modely vycházející z pravděpodobnostního rozdělení náhodné veličiny X, která označuje výši škody na jednu pojistnou událost.
- Většinou je $X \geq 0$ nebo $0 \leq X \leq H$ a rozdělení náhodné veličiny X je popsáno pravděpodobnostní hustotou $f(x)$.
- Nejčastěji využívaná pravděpodobnostní rozdělení jsou:
  - **Logaritmcko-normální rozdělení** $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$, kde $-\infty < \mu < \infty$ a $\sigma > 0$. Platí $\ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad x > 0.$$

    Využívá se k modelování výše škod v pojištění úrazovém, havarijním, požárním, atd.

- **Gamma rozdělení** $X \sim G(a, b)$ je dvuparametrické rozdělení s $a > 0$ a $b > 0$

$$f(x) = \frac{a^b}{\Gamma(b)} x^{b-1}\,\mathrm{e}^{-ax}, \quad x \geq 0$$

$$\Gamma(b) = \int_0^{\infty} z^{b-1}\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z, \text{ je tzv. gama funkce.}$$

- Speciálně $G(\lambda, 1)$ je tzv. **exponenciální rozdělení** $Exp(\lambda)$ s parametrem $\lambda > 0$

$$f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Používá se např. k modelování doby mezi pojistnými nároky.

- **Beta rozdělení** $X \sim B(a, b)$ je tříparametrické rozdělení s $a > 0,\ \ b > 0$ a $c > 0$

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{c\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(\frac{x}{c}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{b-1}, \quad 0 < x < c.$$

  Lze využívat k modelování výše škod v požárním pojištění, kde nastávají buď velmi malé nebo velmi velké škody.

- **Paretovo rozdělení** $X \sim Par(a, b)$ je dvouparametrické rozdělení s $a > 0$ a $b > 0$

$$f(x) = \frac{ba^b}{x^{b+1}}, \quad x \geq a.$$

  Lze použít v situacích s odlehlými extrémními hodnotami, např. v nemocenském pojištění.

Příklad

Nechť máme odhadnuto rozdělení výše škod $X \sim LN(6,993; 0,469^2)$. Vypočtšte pravděpodobnost toho, že výše škod přesáhne 4 000 Kč.