TRH OBLIGACÍ

Jitka Dupačová, MFF UK

Příprava k přednášce pro vstupní kurs ČSOB 22. května 1997

Motto [7]: Many years ago, bonds were boring. Returns were small and steady. Fixed income risk monitoring consisted of watching duration and avoiding low qualities. But as interest-rate volatility has increased and the variety of fixed income instruments has grown, both opportunities and dangers have flourished. Accurate fixed income risk measurement has become both more important and more difficult...

1. Úvodem

Obligace jsou zřejmě nejstarším dokumentem kapitálových trhů. Ve 12. století se s nimi obchodovalo v Benátské republice a nazývaly se "prestiti". Někdy se o nich hovoří jako o cenných papírech *s pevným důchodem*; jak ale uvidíme, toto označení odpovídá různým druhům obligací v různé míře a ani investice do obligací nejsou bezrizikové.

S odvoláním na [3, kapitola 8] nebudeme zde jmenovat a popisovat jednotlivé typy obligací (viz [3], odst. 8.1) a jen stručně připomeneme základní pojmy a vztahy vyložené v [3], odst. 8.2–8.5, které budeme v dalším používat. Přidržíme se většinou i označení zavedeného tamtéž. Pro daný titul obligace jsou kromě emitenta důležité zejména tyto údaje:

(1) P_0 současná tržní hodnota (market value);
(2) F nominální hodnota (face value);
(3) C_t kuponová platba (coupon payment) v čase t;
(4) n doba, resp. počet období do splatnosti (maturity);
(5) i^* výnosnost do splatnosti (yield to maturity).

Obligace je charakterizována tokem budoucích plateb $f_t, t = 1, \dots, n$, zpravidla $f_t = C_t, t < n, f_n = C_n + F$. Její *výnosnost do splatnosti* je definována jako řešení rovnice

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{f_t}{(1+i)^t} \tag{1}$$

Všimněme si dvou jednoduchých případů:

Pro *bezkupónovou obligaci* je $f_t = 0, t < n, f_n = F$, takže výnosnost do splatnosti

$$i^* = \sqrt[n]{\frac{F}{P_0}} - 1$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Pro *obligaci s pevnou úrokovou mírou* je kupónová platba konstantní, $C_t = C \forall t$ a používá se *kupónová sazba* $c = \frac{C}{F}$ a *běžná výnosnost* $v = \frac{C}{P_0}$. Výnosnost do splatnosti je řešením rovnice

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{C}{(1+i)^t} + \frac{F}{(1+i)^n}$$

Dosazením za $C = Fc$ a sečtením geometrické řady dostaneme

$$P_0 = F\left[\frac{c}{i}(1-(1+i)^{-n}) + (1+i)^{-n}\right] \tag{2}$$

Je-li tato obligace prodávána za nominální cenu, tj. pro $P_0 = F$, je řešení (2) snadné: $i^* = c$. V tomto případě se shoduje kuponová sazba, běžná výnosnost a výnosnost do splatnosti. Obecně se tyto veličiny od sebe liší.

Cenu obligace ke zvolenému datu, řekněme k datu $t = 0^+$ bezprostředně po výplatě kupónu, odhadujeme pomocí současné hodnoty toku budoucích plateb jako

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{f_t}{(1+r)^t}, \tag{3}$$

kde r je odpovídající úroková míra platná pro investice daných parametrů na kapitálovém trhu. Vzorec (3) lze ještě korigovat o alikvótní úrok, pokud jde o propočet ceny pro časový okamžik mezi kupónovými platbami. I bez této komplikace naráží oceňování obligací podle (3) na problém volby úrokové míry r a znalost budoucích plateb f_t, zvláště pro obligace s dlouhou dobou do splatnosti:

Úroková míra se vyvíjí v čase a liší se pro různé rizikové třídy obchodovaných obligací; v rámci dané rizikové třídy (např. pro státní obligace bez výpovědi) můžeme (3) formálně zpřesnit

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{f_t}{\prod_{k=0}^{t-1}(1+r_k)} \tag{4}$$

kde r_k je úroková míra platná pro časový interval $(k, k+1]$. Otázkou zůstává odhad budoucích hodnot r_k a tomuto problému je věnována rozsáhlá literatura.

Kromě bezkupónových obligací a obligací s pevnou úrokovou mírou nemusí být známa ani výše budoucích plateb; může záviset na budoucí úrokové míře (případ obligací s pohyblivou úrokovou mírou), na budoucí inflaci (případ indexovaných obligací) i na složitějších vazbách většího počtu vlivů (vypověditelné obligace, hypotéční zástavní listy) atp. Tím je způsobena neurčitost ohledně budoucích výnosů dané investice, což se promítne snížením tržní ceny oproti méně rizikové investici s obdobnými charakteristikami, např. do státní obligace se stejnou nominální hodnotou, dobou do splatnosti a s pevnou úrokovou mírou bez výpovědi. To má za následek nárůst výnosnosti do splatnosti o hodnotu *opravy výnosnosti do splatnosti s ohledem na riziko* (risk adjusted spread).

Investice do obligací není tedy obecně bezrizikovou záležitostí v tom smyslu, že ani budoucí tržní cena obligace ani její výnosnost nemusí být přesně určeny. V dalším odstavci se budeme zabývat některými aspekty rizika trhu obligací a jeho kvantifikací.

2. Rizika trhu obligací a jejich kvantifikace

Základním rizikem trhu obligací, tj. faktorem, který rozhodujícím způsobem ovlivňuje výnosnost investice do obligace, je vývoj úrokové míry, srv. (3), (4). Roste-li úroková míra, klesá zřejmě cena obligace a naopak, a očekáváme vztah mezi relativní změnou ceny a relativní změnou úrokové míry ve tvaru

$$\Delta P_0 = -D\Delta r, \tag{5}$$

kde D se nazývá *durace, trvání obligace.* Myšlenka kvantifikovat riziko trhu obligací pomocí durace pochází od F. Macauleye z konce 30. let.

Vztah (5) lze ve speciálních případech poměrně snadno odvodit a to svádí k používání durace bez ověření předpokladů. Odvodíme si podrobně (5) pro případ bezkupónových obligací ve stejné rizikové třídě a s různými dobami do splatnosti. Pro ně uvažujme tzv. *výnosovou křivku* (yield curve), která popisuje závislost výnosnosti do splatnosti na době do splatnosti (viz obrázek). Předpokládejme, že se jedná o *plochou* výnosovou křivku, tj. že výnosnosti do doby splatnosti jsou přibližně konstantní pro uvažované obligace a pro všechny doby do splatnosti. Vzorec (1) dává jednoduchou závislost ceny P_0 a výnosnosti do splatnosti i^* pro bezkupónovou obligaci s dobou do splatnosti n

$$P_0 = \frac{F}{(1+i^*)^n},$$

která postihuje změnu ceny obligace v souvislosti s jejím zráním v čase. Možná změna platné úrokové míry pro bezkupónové obligace dané rizikové třídy ovlivní ocenění obligací podle (3) a tím i budoucí výnosnosti do doby splatnosti a budoucí výnosovou křivku.

Pokud bude i budoucí výnosová křivka plochá, znamená to, že došlo k paralelnímu posunu výnosové křivky, tj. ke změně $r = i^*$ na $r + \delta r$, kde δr nezávisí na čase. Cena obligace při úrokové míře $r + \delta r$

$$P_0(r+\delta r) \doteq P_0(r) + \delta r \frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}r} \tag{6}$$

takže po zderivování $P_0(r)$ a po jednoduché úpravě (5) vyjde relativní změna

$$\frac{P_0(r+\Delta r) - P_0(r)}{P_0(r)} \doteq -n\frac{\delta r}{1+r} \tag{7}$$

Chápeme-li tedy Δr z (5) jako relativní změnu v $1+r$, je v tomto případě zřejmě durace podle (5) shodná s dobou do splatnosti, $D = n$.

Kupónovou obligaci se známými toky $f_t, t = 1, \ldots, n$ můžeme v souladu s (3) studovat jako portfolio bezkupónových obligací s dobami do splatnosti $t = 1, \ldots, n$, které přispívají k ceně obligace (resp. tržní hodnotě uvažovaného portfolia) svými současnými hodnotami $f_{0t}(r) = f_t(1+r)^{-t}$ počítanými pomocí *konstantní* úrokové míry r. Pro jednotlivé členy součtu platí (srv. (7))

$$f_{0t}(r+\Delta r) - f_{0t}(r) \doteq -tf_{0t}(r)\frac{\delta r}{1+r},$$

pro jejich součet je

$$\sum_t f_{0t}(r+\Delta r) - \sum_t f_{0t}(r) \doteq -\frac{\delta r}{1+r} \sum_t t f_{0t}(r)$$

a po dosazení a vydělení cenou obligace $P_0(r)$ je

$$\frac{P_0(r+\Delta r) - P_0(r)}{P_0(r)} \doteq -\frac{\delta r}{1+r} \frac{\sum_t t f_{0t}(r)}{P_0(r)}$$

Porovnáním s (5) získáme známý vzorec pro duraci kupónové obligace

$$D = \frac{\sum_t t f_{0t}(r)}{P_0(r)} \tag{8}$$

Odpovídá poučce, že *durace portfolia je vážený součet durací jednotlivých titulů zahrnutých do portfolia.* Pro jeho platnost byl podstatný předpoklad ploché výnosové křivky a omezení změn na její paralelní posuny. Dosazením za P_0 a přímým zderivováním můžeme ověřit, že platí

$$\frac{\mathrm{d}[P_0(r)(1+r)^D]}{\mathrm{d}r} = 0 \tag{9}$$

Odtud další používaná poučka: *Hodnota portfolia v čase shodném s jeho durací je imunní vzhledem k malým změnám úrokové míry.* Pro bezkuponovou obligaci jde ovšem o triviální výsledek.

Někdy se používá durace založená na absolutní změně úrokové míry v (5), tj. $\Delta r = \delta r$. Durace se v tomto případě obvykle nazývá *dolarová durace* a je rovná se až na znaménko derivaci $\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}r}$ pro danou obligaci, resp. součtu $\sum_t t f_t (1+r)^{-(t+1)}$ pro obligaci nebo portfolio obligací charakterizované toky $f_t, t = 1, \ldots, n$.

Podle (5) durace vyjadřuje citlivost změny ceny obligace na změně úrokové míry. Jedná se však o lokální vztah založený na aproximaci pomocí prvních derivací. Zpřesněním by mohlo být použití druhých a vyšších derivací v Taylorově rozvoji ceny P_0 kolem bodu r. Druhé derivaci se v této souvislosti říká *konvexita.*

Alternativní vzorce pro duraci lze odvodit za modifikovaných předpokladů o výnosové křivce, viz např [2, 6], a o změnách tvaru výnosové křivky: jestliže nedojde k paralelnímu posunu úrokových měr stejnému pro všechny doby do splatnosti, ale např. ke snížení pro krátké doby do splatnosti a zvýšení pro dlouhé doby do splatnosti, může vést mechanické použití pravidla o duraci pro ochranu investice ke ztrátám. Tomuto riziku se stručně říká *riziko tvaru* a setkáme se s ním ještě v odstavci 3 v souvislosti s imunizací portfolia.

Vedle obecného rizika trhu obligací - rizika změny úrokové míry - jde i o riziko spojené s kvalitou emitenta, podobné rizikům při poskytování úvěru. Platby od méně kvalitního emitenta nemusí být realizovány v termínu, někdy nelze vyloučit ani bankrot. To se promítne do ceny obligace a odtud do výnosu do splatnosti; viz výše zmíněnou opravu výnosnosti s ohledem na rizika. Hodnocením obligací z hlediska rizika úvěru se zabývají renomované firmy, např. Standard & Poor's nebo Moody's; viz. [9], kap. 13. Speciální problémy s ohledem na riziko s sebou nesou *vypověditelné obligace a hypotéční zástavní listy*; v jejich případě už evidentně nestačí hodnotit riziko podle peněžních toků a zařazení obligace do některé z ratingových skupin.

3. Volba a řízení portfolia obligací

Různé podpůrné modely pro optimální volbu portfolia obligací vznikaly koncem 70. let, kdy došlo k nečekaně velkému kolísání úrokových měr. Tyto modely směřovaly k ochraně investora proti riziku úrokové míry, případně i riziku tvaru v situaci, kdy má svým portfoliem financovat daný tok pasiv nebo chránit hodnotu portfolia. Tyto modely lze zhruba rozdělit na *modely založené na duraci, tzv. imunizace portfolia* (bond portfolio immunization) a na modely založené na *vyrovnání peněžních toků* (cashflow matching) nazývané také *portfolio se zaručeným důchodem* (dedicated bond portfolio).

V obou případech budeme předpokládat, že jde o investici do obligací z předem daného seznamu, označených indexy $j = 1, \ldots, J$, s odpovídajícími toky f_{jt} v časových okamžicích $t = 1, \ldots, T$ a současnými tržními hodnotami P_{0j}. Kromě toho uvažujeme daný tok finančních závazků L_t, které mají být uhrazeny z výnosu portfolia v čase t. Množství obligací zakoupených do portfolia označíme $x_j, j = 1, \ldots, J$.

Imunizace portfolia
cf. [8], je založena na myšlence, že závazkům lze dostát jen když je současná hodnota aktiv shodná (nebo větší než) se současnou hodnotou pasiv a portfolio aktiv i pasiva jsou stejně citlivá na změny v úrokové míře. Druhý požadavek se kvantifikuje jako shoda v duraci portfolia a duraci závazku.

Jedna z možných formulací úlohy zní

$$\text{minimalizovat} \quad \sum_{j=1}^{J} P_{0j} x_j$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^{J} PV_j x_j = PV_L$$

$$\sum_{j=1}^{J} D_j x_j = D_L$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j$$

Koeficienty $PV_j, j = 1, \ldots, J, PV_L$, resp. $D_j, j = 1, \ldots, J, D_L$ v této jednoduché úloze lineárního programování jsou současné hodnoty počítané podle (3) (nemusí se shodovat s tržní hodnotou), resp. durace obligací a pasiva.

Podle teorie lineárního programování, pokud má tato úloha řešení, bude optimální portfolio složeno *jen ze dvou obligací*; to je tzv. *činkovité* (barbell) portfolio a je zřejmě vystaveno značnému riziku, pokud v rozporu s předpokladem v definici durace nebudou výnosy do splatnosti u obou zahrnutých obligací přibližně stejné. Tuto nepříjemnost lze obejít tím, že se zadají další podmínky na složení portfolia, např.:

- intervaly $l_j \leq x_j \leq u_j$ pro množství každé obligace v portfoliu; vznikne tzv. *žebříkové* (ladder) portfolio;
- přidání podmínky na shodu konvexity portfolia obligací a pasiva;
- výběrem obligací, které mají přibližně stejnou duraci jako pasivum, tzv. *zaostřené* (focused, bullet) portfolio.

Uvedený typ modelu používá lokální aproximace současné hodnoty, srv. (6), chrání portfolio jen krátkodobě a je ho nutné stále přepočítávat. Je stále velmi populární, i když vychází z předpokladů (např. malé paralelní posuny ploché výnosové křivky v definici současné hodnoty i durace), které obecně nejsou splněny.

Portfolio se zaručeným důchodem
porovnává v každém uvažovaném časovém okamžiku $t = 1, \ldots, T$ peněžní toky ze za- koupeného portfolia se závazkem. Závazek bude vždy splněn, pokud

$$\sum_{j=1}^{J} f_{jt} x_j \geq L_t, \quad t = 1, \ldots, T \tag{10}$$

Předpokládejme, že případný přebytek v_t^+ v čase t lze krátkodobě (do příštího časového okamžiku) investovat za úrokovou míru r_t platnou v období $(t, t+1]$. Podmínky (10) se změní na

$$\sum_{j=1}^{J} f_{jt} x_j + (1 + r_{t-1}) v_{t-1}^+ - v_t^+ = L_t, \quad t = 1, \ldots, T \tag{11}$$

Minimalizujeme opět náklady na pořízení portfolia

$$\sum_{j=1}^{J} P_{0j} x_j \; (+v_0^+) \tag{12}$$

za podmínek nezápornosti na $x_j, v_t^+ \forall j, t$ a podmínek (11).

Zjevným problémem je přítomnost dnes ještě neznámých koeficientů r_t – budoucích hodnot úrokových měr. Můžeme mu do jisté míry čelit nasazením konservativně určených nízkých hodnot $\underline{r}_t$ nebo požadovat solventnost pro určitou množinu $(T-1)$-rozměrných vektorů $\mathbf{r}$ budoucích hodnot úrokových měr $r_t, t = 1, \ldots, T-1$. Takovým vektorům se říká *scénáře* a různé normativní předpisy požadují splnění podmínek (11) pro předepsané pesimistické nebo charakteristické scénáře. Rozsah úlohy tím vzroste, pro S uvažovaných scénářů v ní bude soustava ST podmínek

$$\sum_{j=1}^{J} f_{jt} x_j + (1 + r_{t-1}^s) v_{t-1}^{+s} - v_t^{+s} = L_t \tag{13}$$

a $J + S(T-1) + 1$ nezáporných proměnných (výchozí úroková míra r_0 je známá a v_0^+ nezávisí na s). Výsledná úloha a její řešení pochopitelně závisí na výběru scénářů.

Další myšlenka, která se nabízí, je umožnit také krátkodobé vypůjčení prostředků chybějících v některém období; označíme chybějící množství peněz v období t jako v_t^-, resp. v_t^{-s} a přepíšeme podmínku (13) odpovídajícím způsobem:

$$\sum_{j=1}^{J} f_{jt} x_j + (1 + r_{t-1}^s) v_{t-1}^{+s} - v_t^{+s} + v_t^{-s} - (1 + r_{t-1}^s + \delta_{t-1}) v_{t-1}^{-s} = L_t \tag{14}$$

kde δ_t jsou náklady na vypůjčení (spread); konservativně mohou být nastaveny např. tak, aby se shodovaly s rozdílem mezi maximální a minimální uvažovanou úrokovou mírou r_t^s pro období $(t, t+1]$.

Navíc je vhodné použití výpůjček penalizovat, tj. ocenit jejich použití v minimalizovaných nákladech úpravou původní účelové funkce na

$$\sum_{j=1}^{J} P_{0j} x_j (+v_0^+) + \sum_{s=S}^{S} p_s \sum_{t=1}^{T-1} q_t^s v_t^{-s} \tag{15}$$

kde q_t^s je současná hodnota penále za použití výpůjčky v čase t při scénáři s (při diskontování se používá $\mathbf{r}^s$) a p_s je pravděpodobnost, resp. váha scénáře s mezi uvažovanými scénáři. Vypůjčování v posledním časovém okamžiku T zpravidla není dovoleno.

Výsledný model

$$\text{minimalizovat} \quad \sum_{j=1}^{J} P_{0j} x_j \, (+v_0^+) + \sum_{s=1}^{S} p_s \sum_{t=1}^{T-1} q_t^s v_t^{-s}$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^{J} f_{jt} x_j + (1 + r_{t-1}^s) v_{t-1}^{+s} - v_t^{+s} + v_t^{-s} - (1 + r_{t-1}^s + \delta_{t-1}) v_{t-1}^{-s} = L_t$$

pro $t = 1, \ldots, T, s = 1, \ldots, S$ a při nezápornosti všech proměnných je možné přepočítávat v pozdějších časových okamžicích pro aktualizovaná data.

Scénáře slouží i k oceňování a následnému zahrnutí vypověditelných obligací a indexovaných obligaci, jejichž kupony závisí na vývoji úrokových měr (modelovaném scénáři). Další krok je umožnit rekonstrukci portfolia pozdějším prodejem a nákupem obligací; příklad takové aplikace viz. [1].

Konstrukce scénářů je obtížný a komplexní problém. Mohou je zadat experti ad hoc. Scénáře by přitom měly mj. odrážet současný stav trhu i jeho předpokládaný budoucí vývoj. Současný stav trhu je většinou popsán výnosovou křivkou vztaženou k danému datu a obligacím srovnatelné rizikové třídy, které byly toho dne obchodovány. Pro odhad celého průběhu výnosové křivky (tj. pro výnosy do splatnosti obligací všech možných dob do splatnosti) je třeba použít statistické metody a numerické postupy. Dalším podstatným a hůře postižitelným faktorem je volatilita výnosů do splatnosti, použití historických dat nemusí být vždy rozumné. Pro generování scénářů se používají různé modely vývoje úrokových měr, důležitá je i volba časového kroku, který bude pro rozhodování použit. Výsledná doporučení pro řízení portfolia závisí na použitých scénářích a výsledky je třeba doplnit informací o jejich citlivosti na volbě scénářů, viz. [5].

Použitá literatura

(1) M. Bertocchi, J. Dupačová a V. Moriggia: Sensitivity analysis on inputs for a bond portfolio management model. In: Aktuarielle Ansätze für Finanz-Risiken AFIR 1996, Proc. of the VIth AFIR Colloquium, Nuremberg (P. Albrecht, ed.), VVW Karlsruhe 1996, 783–793.

(2) G. O. Bierwag, G. G. Kaufman a A. Toevs: Bond portfolio immunization and stochastic process risk. Journal of Bank Research, Winter 1983, 282–291.
(3) T. Cipra: Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou, Edice HZ, Praha 1995.
(4) H. Dahl, A. Meeraus a S. Zenios: Some financial optimization models. I. Risk management. In: Financial optimization (S. Zenios, ed.), Cambridge Univ. Press 1993, str. 3–36.
(5) J. Dupačová, M. Bertocchi a V. Moriggia: Postoptimality for scenario based financial models with an application to bond portfolio management. In: World Wide Asset and Libility Modeling (W. Ziemba and J. Mulvey, eds.), Cambridge Univ. Press, 1998, pp. 263–285.
(6) E. J. Elton a M. J. Gruber: Modern portfolio theory and investment analysis, Wiley, New York 1987 (3. vydání).
(7) R. Kahn: Fixed income risk modelling. In: The Handbook of Fixed Income Securities (F. Fabozzi, ed.), 3. vydání, str. 1307–1319.
(8) F. M. Redington: Review of the principles of life-office valuation. J. of the Institute of Actuaries 18 (1952) 286–315.
(9) W. F. Sharpe a G. J. Alexander: Investments, Prentice-Hall 1990 (4. vydání). Český překlad Victoria Publ. 1994.
(10) P. Zipkin: The structure of structured bond portfolio models. Operations Research 40 (1992) S157–S170.