A. Interpolace polynomy

Na úvod této kapitoly se budeme snažit odhadnout funkce pomocí polynomů. Předpokládejme, že o neznámé funkci máme pouze kusé informace, totiž její hodnoty v několika bodech, popřípadě i hodnoty její první či druhé derivace v těchto bodech. Budeme se snažit najít polynom (co nejmenšího stupně) splňující tyto závislosti.

5.1. Nalezněte polynom P splňující následující podmínky:

$$P(2) = 1,\ P(3) = 0,\ P(4) = -1,\ P(5) = 6.$$

Řešení. Řešíme buď přímo, t.j. sestavením soustavy čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých. Předpokládáme polynom ve tvaru $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x_1 + a_0$. Víme, že polynom stupně nejvýše tři splňující podmínky v zadání je dán jednoznačně.

$$\begin{aligned} a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 1 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 &= 0 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 &= -1 \\ a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 &= 6. \end{aligned}$$

Každá rovnice vznikla z jedné z podmínek v zadání.

Druhou možností je vytvořit hledaný polynom pomocí fundamentálních Lagrangeových polynomů:

$$\begin{aligned}
P(x) &= 1 \cdot \frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-3)(2-4)(2-5)} + 0 \cdot (\ldots) + \\
&= (-1) \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-2)(4-3)(4-5)} + 6 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-2)(5-3)(5-4)} = \\
&= \frac{4}{3}z^3 - 12z^2 + \frac{101}{3}z - 29.
\end{aligned}$$

Koeficienty tohoto polynomu jsou samozřejmě jediným řešením výše sestavené soustavy lineárních rovnic. □

5.2. Nalezněte polynom P splňující následující podmínky:

$$P(1+i) = i,\ P(2) = 1,\ P(3) = -i.$$

5.3. Nalezněte polynom P splňující následující podmínky:

$$P(1) = 0,\ P'(1) = 1,\ P(2) = 3,\ P'(2) = 3.$$

Řešení. Opět ukážeme dvě možnosti řešení.

Dané podmínky určují čtyři lineární rovnice pro koeficienty hledaného polynomu. Budeme-li hledat polynom třetího stupně, dostáváme tedy přesně tolik rovnic, kolik je neznámých koeficientů polynomu (nechť např. $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$):

$$\begin{aligned}
P(1) &= (a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &&= 0, \\
P'(1) &= 3a_3 + 2a_2 + a_1 = &&1, \\
P(2) &= 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = &&3, \\
P'(2) &= 12a_3 + 4a_2 + a_1 = &&3.
\end{aligned}$$

Vyřešením tohoto systému obdžíme polynom $P(x) = -2x^3 + 10x^2 - 13x + 5$.

Jiné řešení. Použijeme fundamentální Hermiteovy polynomy:

$$\begin{aligned}
h_1^1(x) &= \left(1 - \frac{2}{0+(-1)}(x-1)\right)(2-x)^2 = (2x-1)(x-2)^2, \\
h_2^1(x) &= (5-2x)(x-1)^2, \\
h_1^2(x) &= (x-1)(x-2)^2, \\
h_2^2(x) &= (x-2)(x-1)^2.
\end{aligned}$$

Celkem

$$P(x) = 0 \cdot h_1^1(x) + 3 \cdot h_2^1(x) + 1 \cdot h_1^2(x) + 3 \cdot h_2^2(x) = -2x^3 + 10x^2 - 13x + 5.$$

□

5.4. Pomocí Lagrangovy interpolace spočítejte příbližnou hodnotu $\cos^2 1$. Použijte k tomu hodnoty funkce v bodech $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ a $\frac{\pi}{2}$.

Řešení. Nejprve určíme funkční hodnoty v zadaných bodech: $\cos^2(\frac{\pi}{4}) = 1/2$, $\cos^2(\frac{\pi}{3}) = 1/4$, $\cos^2(\frac{\pi}{2}) = 0$. Dále určíme elementární Larangeovy polynomy, přitom můžeme spočítat hodnoty přímo v zadaném bodě:

$$l_0(1) = \frac{(1-\frac{\pi}{3})(1-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})} = 8\frac{(\pi-3)(\pi-2)}{\pi^2}$$
$$l_1(1) = \frac{(1-\frac{\pi}{4})(1-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2})} = -9\frac{(\pi-4)(\pi-2)}{\pi^2}$$
$$l_2(1) = \frac{(1-\frac{\pi}{4})(1-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})} = 2\frac{(\pi-4)(\pi-3)}{\pi^2}$$

Celkem tedy

$$P(1) = \frac{1}{2}\cdot 8\frac{(\pi-3)(\pi-2)}{\pi^2} - \frac{1}{4}\cdot 9\frac{(\pi-4)(\pi-2)}{\pi^2} + 0 =$$
$$= \frac{(5\pi-12)(\pi-2)}{4\pi^2} \doteq 0.288913.$$

Vidíme, že při výpočtu třetí elementrání polynom nebyl potřeba. Skutečná hodnota je $\cos^2 1 \doteq 0.291927$. □

5.5. Franta potřebuje počítat hodnoty funkce sin, ale má k dispozici jen mobilní telefon s jednoduchou kalkulačkou, která umí základní operace. Protože si pamatuje hodnoty funkce sin v bodech 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$ a $\frac{\pi}{2}$ a ví, že přibližné hodnoty π, $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ jsou 3.1416, 1.4142 a 1.7321, rozhodl se, že použije k přibližnému výpočtu interpolaci. Pomozte mu sestrojit přibližný vztah s využitím všech hodnot.

Řešení. Sestrojíme elementární Larangeovy polynomy:

$$l_0(x) = \frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{2})}{(0-\frac{\pi}{6})(0-\frac{\pi}{4})(0-\frac{\pi}{3})(0-\frac{\pi}{2})} \doteq$$
$$\doteq 1.4783x^4 - 5.8052x^3 + 8.1057x^2 - 4.7746x + 1$$

$$l_1(x) = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{6}-0)(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2})} \doteq$$
$$\doteq -13.3046x^4 + 45.2808x^3 - 49.2419x^2 + 17.1887x$$

$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{4}-0)(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})} \doteq$$
$$\doteq 23.6526x^4 - 74.3070x^3 + 71.3298x^2 - 20.3718x$$

$$l_3(x) = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{3}-0)(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2})} \doteq$$
$$\doteq -13.3046x^4 + 38.3146x^3 - 32.8279x^2 + 8.5943x$$

$$l_4(x) = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})} \doteq$$

$$\doteq 1.4783x^4 - 3.4831x^3 + 2.6343x^2 - 0.6366x$$

Hodnota interpolačního polynomou je pak

$$P(x) = 0 \cdot {}_0(x) + \frac{1}{2}l_1(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}l_2(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}l_3(x) + l_4(x) \doteq$$

$$\doteq 0.0288x^4 - 0.2043x^3 + 0.0214x^2 + 0.9956x.$$

□

Doplňující otázky: Může Franta tento přibližný výsledek použít i pro výpočet funkce sin na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \pi]$? A pokud ne, jak by měl postupovat?
Jak by vypadaly přibližné vztahy, pokud by Franta ne použil všechny uzly, ale pro každý bod jen tři uzly nejbližší?

5.6. Další den potřeboval Franta spočítat dvojkový logaritmus 25. (Ve skutečnosti potřeboval přirozený logaritmus, ale protože ví, že $\ln 2$ je zhruba 0.6931, vystačí s i s dvojkovým.) Nejprve tedy vzal uzly 16 a 32 s funkčními hodnotami 4 a 5 a sestrojil interpolační polynom (přímku) $P(x) = \frac{1}{16} + 3$, takže $P(25) = \frac{73}{16} = 4.5625$. Kvůli zpřesnění výsledku přidal další uzel 8 s funkční hodnotou 3. V tomto případě vyšel interpolační polynom roven $P(x) = -\frac{1}{384}x^2 + \frac{3}{16}x + \frac{5}{3}$, což dává $P(25) \doteq 4.7266$. Franta chtěl výsledek ještě zpřesnit, přidal tedy rovnou dva uzly, a to 2 a 4 s funkčními hodnotami 1 a 2. Jaké však bylo jeho překvapení, když mu vyšla hodnota $P(25) \doteq 5.892$, která je určitě nesprávná vzhledem k tomu, že logaritmus je rostoucí funkce. Dokážete vysvětlit, kde se vzala taková chyba?

Řešení. Franta trochu pátral na internetu a zjistil, že chyba při interpolaci se dá vyjádřit ve tvaru

$$f(x) - P_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

kde bod ξ není znám, ale leží v intervalu daném nejmenším a největším uzlem. Člen v čitateli zlomku způsobuje, že přidávání dalších vzdálených uzlů přesnost spíše zhoršuje. □

5.7. O týden později potřeboval Franta určit $\sqrt{7}$. Napdlo ho problém otočit a použít tzv. inverzní interpolaci, tedy zaměnit roli uzlů a funkčních hodnot a určit přibližnou hodnotu vhodné funkce v nule. Jak postupoval?

Řešení. $\sqrt{7}$ je nulový bod funkce $x^2 - 7$. Franta vzal uzly $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 3$, příslušné funkční hodnoty jsou -3, -0.75 a 2. Pak prohodil úlohu uzlů a funkčních hodnot a získal elementární Lagrangeovy polynomy

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x+0.75)(x-2)}{(-3+0.75)(-3-2)} = \frac{4}{45}x^2 - \frac{1}{9}x - \frac{2}{15} \\ l_1(x) &= -\frac{16}{99}x^2 - \frac{16}{99}x + \frac{32}{33} \\ l_2(x) &= \frac{6}{55}x^2 + \frac{3}{11}x + \frac{9}{55} \end{aligned}$$

Pro $\sqrt{7}$ tak dostal přibližnou hodnotu $2 \cdot l_0(0) + 2.5 \cdot l_1(0) + 3 \cdot l_2(0) = \frac{437}{165} \doteq 2.6485$.

Doplňující otázky: Frantovy se do výpočtu jednoho elementráního polynomu vloudila chyba, pokuste se ji vypátrat. Má tato chyba vliv na výslednou hodnotou?

Jak bychom mohli využít také hodnotu derivace v bodě 2.5? □

Prirozeny_splajn

5.8. Nalezněte přirozený splajn S, který splňuje podmínky

$$S(-1) = 0,\ S(0) = 1,\ S(1) = 0.$$

Řešení. Hledaný přirozený splajn bude složen ze dvou kubických polynomů, jednoho, řekněme S_1, pro interval $\langle -1, 0\rangle$, druhého, řekněme S_2 pro interval $\langle 0, 1\rangle$. Slůvko „přirozený“ navíc určuje, že hodnoty druhých derivací polynomů S_1, resp. S_2, budou nulové v bodě -1, resp. 1. Díky předepsané společné hodnotě v bodě 0 víme že absolutní člen obou polynomů je 1, ze symetrie úlohy plyne, že společná hodnota první derivace v bodě 0 je nulová. Můžeme tedy psát $S_1(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ a $S_2(x) = cx^3 + dx^2 + 1$, pro neznámé reálné parametry a, b, c a d. Dosazením těchto tvarů do čtyř podmínek $S_1(-1) = 0$, $S_1"(-1) = 0$, $S_2(1) = 0$a $S_2"(1) = 0$ dostáváme čtyři lineární rovnice pro tyto parametry:

$$\begin{aligned} -a + b + 1 &= 0, \\ -6a + 2b &= 0, \\ c + d + 1 &= 0, \\ 6c + 2d &= 0. \end{aligned}$$

Jejich vyřešením pak $S_1(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$, $S_2(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$. Celkem tedy

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1 & \text{pro} x \in \langle -1, 0\rangle \\ \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1 & \text{pro} x \in \langle 0, 1\rangle \end{cases}$$

□

5.9. Nalezněte splajn S, který splňuje podmínky

$$S(-1) = 0,\ S(0) = 1,\ S(1) = 0,\ S'(-1) = 1,\ S'(1) = 1.$$

Řešení. Hledaný splajn se od splajnu z předchozí úlohy liší pouze hodnotami derivací v bodech -1 a 1. Obdobně jako v předchozí úloze tak dostáváme části S_1 a S_2 splajnu ve tvaru $S_1(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ a $S_2(x) = cx^3 + dx^2 + 1$, pro neznámé reálné parametry a, b, c a d. Dosazením do podmínek $S_1(-1) = 0$, $S_1'(-1) = 1$, $S_2(1) = 0$a $S_2'(1) = 1$ dostáváme nyní soustavu

$$\begin{aligned} -a + b + 1 &= 0, \\ 3a - 2b &= 1, \\ c + d + 1 &= 0, \\ 3c + 2d &= 1 \end{aligned}$$

s řešením $a = -1$, $b = -2$, $c = 3$ a $d = -4$, tedy hledaný splajn je funkce

$$S(x) = \begin{cases} -x^3 - 2x^2 + 1 & \text{pro} x \in \langle -1, 0 \rangle \\ 3x^3 - 4x^2 + 1 & \text{pro} x \in \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$$

□

5.10. Přidání požadované hodnoty splajnu. Na tomto příkladu demonstrujeme, že je početně jednoduché (v porovnání s Lagrangeovou či Hermiteovou interpolací), doplnit požadavky na hledanou funkci (splajn) o funkční hodnotu v jednom novém bodě: nalezněte přirozený kubický splajn splňující

$$S(-1) = 0,\ S(0) = 1,\ S(1) = 0, S(2) = 1.$$

Prirozeny_splajn

Řešení. Vůči příkladu je přidána pouze hodnota $S(2) = 1$. Použijeme tedy výsledky ze zmíněného příkladu. Na polynomy S_1 a S_2 nážeme rovněž kubickým polynomem S_3 a to tak, aby měl v bodě 1 shodnou hodnotu derivace s již vypočteným mnohočlenem $S_2 = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$. Je tedy $S_2'(1) = -\frac{1}{2}$. Tuto hodnotu použijeme jako okrajovou podmínku pro polynom S_3. Druhá okrajová podmínka je dána tím, že požadujeme, aby výsledný splajn byl přirozený, tedy $S_3''(2) = 0$. Hledáme tedy kubický polynom $S_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ splňující podmínky $S_3(1) = 0$, $S_3'(1) = -\frac{1}{2}$, $S_3(2) = 1$ a $S_3''(2) = 0$, což dává soustavu:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 1, \\ 3a + 2b + c &= -\frac{1}{2}, \\ 8a + 4b + 2c + d &= 1, \\ 6a + 2b = 0 \end{aligned}$$

s řešením $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{9}{2}$, $c = 4$ a $d = -1$. Hledaný splajn je tedy tvaru

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1 & \text{pro} x \in \langle -1, 0 \rangle \\ \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1 & \text{pro} x \in \langle 0, 1 \rangle \\ \frac{3}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 4x - 1 & \text{pro} x \in \langle 1, 2 \rangle \end{cases}$$

□

Více příkladů k interpolačním polynomům najdete na straně 272.

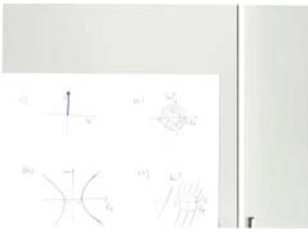
B. Topologie komplexních čísel a jejich podmnožin

5.11. Načrtněte následující podmnožiny v $\mathbb{C}$

i) $\{z \in \mathbb{C} | \, |z-1| = |z+1|\}$
ii) $\{z \in \mathbb{C} | \, 1 \leq |z-i| \leq 2\}$
iii) $\{z \in \mathbb{C} | \, \mathrm{Re}(z^2) = 1\}$
iv) $\{z \in \mathbb{C} | \, \mathrm{Re}(\frac{1}{z}) < \frac{1}{2}\}$

Řešení.

- imaginární osa
- mezikruží okolo i
- hyperbola $a^2 - b^2 = 1$.
- vnějšek jednotkového kruhu se středem v 1.



□

5.12. Nalezněte hromadné, izolované, hraniční a vnitřní body množin

$$\mathbb{N}, \quad \mathbb{Q}, \quad X = \{x \in \mathbb{R};\ 0 \leq x < 1\}$$

v $\mathbb{R}$.

Řešení. Množina $\mathbb{N}$. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ očividně platí

$$\mathcal{O}_1(n) \cap \mathbb{N} = (n-1, n+1) \cap \mathbb{N} = \{n\}.$$

Existuje tedy okolí bodu $n \in \mathbb{N}$ v $\mathbb{R}$, které obsahuje pouze jeden prvek množiny $\mathbb{N}$ (pochopitelně právě uvažované n), tj. každý bod $n \in \mathbb{N}$ je izolovaný. Množina vnitřních bodů je proto prázdná (je-li bod izolovaný, nemůže být vnitřní). Bod $a \in \mathbb{R}$ je pak hromadným bodem A právě tehdy, když každé jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů A. Ovšem množina

$$\mathcal{O}_1(a) \cap \mathbb{N} = (a-1, a+1) \cap \mathbb{N}, \quad \text{přičemž } a \in \mathbb{R},$$

je konečná, z čehož plyne, že $\mathbb{N}$ hromadné body nemá. To, že tato množina je konečná, dále implikuje

$$\delta_b := \inf_{n \in \mathbb{N}} |\, b - n \,| = \inf_{n \in \mathcal{O}_1(b) \cap \mathbb{N}} |\, b - n \,| > 0 \quad \text{pro } b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$$

Odsud máme $\mathcal{O}_{\delta_b}(b) \cap \mathbb{N} = \emptyset$, tj. žádné $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ není hraničním bodem $\mathbb{N}$. Současně víme, že každý bod dané množiny, který není vnitřním bodem, je nutně jejím hraničním bodem. Množina hraničních bodů tak obsahuje $\mathbb{N}$. Shrneme-li to, množina hraničních bodů $\mathbb{N}$ je $\mathbb{N}$.

Množina $\mathbb{Q}$. Racionální čísla tvoří tzv. hustou podmnožinu množiny všech reálných čísel. To znamená, že ke každému reálnému číslu konverguje posloupnost racionálních čísel (představme si např. nekonečný desetinný rozvoj reálného čísla a jemu odpovídající posloupnost, kdy v následujícím členu přidáváme další cifru rozvoje). O této posloupnosti lze navíc předpokládat, že všechny její členy jsou navzájem různé (na poslední pozici konečného desetinného rozvoje se můžeme záměrně dopouštět chyby nebo kupř. číslu 1 přiřadíme desetinný rozvoj $0,999\ldots$ apod.). Množina hromadných bodů $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$ je proto celé $\mathbb{R}$ a každý bod $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je hraniční. Zvláště dostáváme, že libovolné δ-okolí

$$\mathcal{O}_\delta\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q} - \delta,\ \frac{p}{q} + \delta\right), \quad \text{kde } p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,$$

racionálního čísla p/q musí obsahovat nekonečně mnoho racionálních čísel, což dává neexistenci izolovaných bodů. Číslo $\sqrt{2}/10^n$ není racionální pro žádné $n \in \mathbb{N}$. Předpokladem opaku (opět $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$)

$$\frac{\sqrt{2}}{10^n} = \frac{p}{q}, \quad \text{tj.} \quad \sqrt{2} = \frac{10^n p}{q},$$

totiž okamžitě obdržíme spor – o číslu $\sqrt{2}$ víme, že není racionální. Libovolné okolí racionálního čísla p/q tak zároveň obsahuje nekonečně mnoho reálných čísel $p/q + \sqrt{2}/10^n$ ($n \in \mathbb{N}$), která nejsou racionální (množina $\mathbb{Q}$ jako těleso je uzavřená vzhledem k odečítání). Všechny body $p/q \in \mathbb{Q}$ jsou tudíž rovněž hraniční a vnitřní body množina $\mathbb{Q}$ nemá.

Množina $X = [0, 1)$. Nechť $a \in [0, 1)$ je zvoleno libovolně. Posloupnosti se členy (pro dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$)

$$a + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \subset [0, 1)$$

zjevně konvergují po řadě k hodnotám a, 1. Snadno jsme tak ukázali, že množina hromadných bodů obsahuje interval $[0, 1]$. Jiné hromadné body neexistují: pro jakékoli $b \notin [0, 1]$ existuje $\delta > 0$ takové, že $\mathcal{O}_\delta(b) \cap [0, 1] = \emptyset$ (pro $b < 0$ postačuje položit $\delta = -b$ a pro $b > 1$ potom $\delta = b - 1$). Protože každý bod intervalu $[0, 1)$ je hromadným bodem, množina izolovaných bodů je prázdná. Pro $a \in (0, 1)$ označme menší z kladných čísel a, $1-a$ jako δ_a. Uvážíme-li

$$\mathcal{O}_{\delta_a}(a) = (a-\delta_a,\ a+\delta_a) \subseteq (0,1), \quad a \in (0,1),$$

vidíme, že libovolný bod intervalu $(0, 1)$ je vnitřním bodem intervalu $[0, 1)$. Pro každé $\delta \in (0, 1)$ je

$$\mathcal{O}_\delta(0) \cap [0,1) = (-\delta,\ \delta) \cap [0,1) = [0,\delta),$$
$$\mathcal{O}_\delta(1) \cap [0,1) = (1-\delta,\ 1+\delta) \cap [0,1) = (1-\delta,1),$$

tj. každé δ-okolí bodu 0 obsahuje jisté body intervalu $[0, 1)$ a hodnoty z intervalu $(-\delta, 0)$ a každé δ-okolí bodu 1 má neprázdný průnik s intervaly $[0, 1)$, $[1, 1+\delta)$. Body 0 a 1 jsou tedy hraničními body. Celkem jsme zjistili, že množina všech vnitřních bodů odpovídá intervalu $(0, 1)$ a množina hraničních bodů je $\{0, 1\}$. Stačí si uvědomit, že bod nemůže být současně vnitřní a hraniční a že hraniční bod musí být izolovaný, nebo hromadný. □

Více příkladů k danému tématu najdete na straně 272

C. Limity

V následujících příkladech se budeme zabývat výpočtem limit posloupností, tedy tím, jak posloupnosti „vypadají v nekonečnu“. Tj. pokud bychom chtěli předepsat n-tý člen posloupnosti pro hodně velké n, tak nám jej limita posloupnosti (pokud existuje) velmi dobře přiblíží. Limitám posloupností a posléze funkcí věnujeme v příkladovém sloupci hodně prostoru, proto s nimi začínáme dříve (a končíme později), než ve sloupci teorie.

Začněme s limitami posloupností. Potřebné definice nalezne čtenář na straně **??**.

5.13. Spočítejte následující limity posloupností:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{n+1}$,
ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{3n^2+n+1}$,
iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n^2+3n+1}$,
iv) $\lim_{n\to-\infty} \frac{2^n-2^{-n}}{2^n+2^{-n}}$,
v) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+n}}{n}$,
vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{4n^2+n}-2n$.

Řešení.
i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \infty.$
ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{3n^2+n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3}.$
iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n^2+3n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2n+3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

iv)

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{2^n-2^{-n}}{2^n+2^{-n}} \quad = \quad \lim_{n\to-\infty}\frac{\frac{2^n}{2^{-n}}-1}{\frac{2^n}{2^{-n}}+1}=-1$$

v) Podle věty o třech limitách (**??**): $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{\sqrt{4n^2}}{n} < \frac{\sqrt{4n^2+n}}{n} < \frac{\sqrt{4n^2+n+\frac{1}{16}}}{n}$. Dále pak $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n} = 2$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+n+\frac{1}{16}}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+\frac{1}{4}}{n} = 2$. Tedy i $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+n}}{n} = 2$.

vi)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt{4n^2+n}-2n &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+n}-2n)(\sqrt{4n^2+n}+2n)}{\sqrt{4n^2+n}+2n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}=\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{4n^2+n}}{n}+2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

□

5.14. Buď $c \in \mathbb{R}^+$ (kladné reálné číslo). Ukážeme, že $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=1$.

Řešení. Uvažme nejprve $c>1$. Vzhledem k tomu, že funkce $\sqrt[n]{c}$ je vzhledem k n klesající a její hodnoty jsou stále větší než 1, tak musí mít posloupnost $\sqrt[n]{c}$ limitu a tou je infimum jejich členů. Předpokládejme, že by tato limita byla větší než 1, řekněme $1+\varepsilon$, kde $\varepsilon>0$. Pak by podle definice limity byly všechny hodnoty dané posloupnosti od jistého m menší než $1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4}$, t.j. zejména $\sqrt[m]{c}<1+\varepsilon+\frac{eps^2}{4}$. Potom by však

$$\sqrt[2m]{c}=\sqrt{\sqrt[m]{c}}<\sqrt{1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4}}=1+\frac{\varepsilon}{2}<1+\varepsilon,$$

což je spor s tím, že $1+\varepsilon$ je infimem dané posloupnosti. □

5.15. Stanovte

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}.$$

Řešení. Zřejmě je $\sqrt[n]{n}\geq 1$, $n\in\mathbb{N}$. Můžeme tedy položit

$$\sqrt[n]{n}=1+a_n \quad \text{pro jistá čísla} \quad a_n\geq 0,\ n\in\mathbb{N}.$$

Užitím binomické věty získáváme

$$n=(1+a_n)^n=1+\binom{n}{1}a_n+\binom{n}{2}a_n^2+\cdots+a_n^n, \quad n\geq 2\,(n\in\mathbb{N}).$$

Odsud plyne odhad (všechna čísla a_n jsou nezáporná)

$$n\geq\binom{n}{2}a_n^2=\frac{n\,(n-1)}{2}\,a_n^2, \quad n\geq 2\,(n\in\mathbb{N}),$$

tj. po úpravě máme

$$0\leq a_n\leq\sqrt{\frac{2}{n-1}}, \quad n\geq 2\,(n\in\mathbb{N}).$$

Podle Věty o třech limitách je

$$0 = \lim_{n\to\infty} 0 \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0.$$

Obdrželi jsme tak výsledek

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + a_n) = 1 + 0 = 1.$$

Poznamenejme, že další užití Věty o třech limitách mj. dává

$$1 = \lim_{n\to\infty} 1 \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

pro libovolné reálné číslo $c \ge 1$. □

5.16. Nyní přejděme k určování limit funkcí. Definice viz strana **??**.

Určete

(a)

$$\lim_{x\to\pi/3} \sin x;$$

(b)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2};$$

(c)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\arccos \frac{1}{x+1}\right)^3;$$

(d)

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x^4, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\,(\sin x)\,.$$

Řešení. Případ (a). Připomeňme, že funkce je spojitá v jistém bodě, když je v tomto bodě její limita rovna funkční hodnotě. O funkci $y = \sin x$ však víme, že je spojitá na $\mathbb{R}$. Dostáváme tak

$$\lim_{x\to\pi/3} \sin x = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Případ (b). Přímé dosazení $x = 2$ dává nulový čitatel i jmenovatel. Přesto je příklad velmi snadno řešitelný. Jednoduché krácení

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\,(x+3)}{(x-2)\,(x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x-1} = \frac{2+3}{2-1} = 5$$

totiž vedlo ke správnému výsledku (díky spojitosti obdržené funkce v bodě $x_0 = 2$). Uvědomme si zde, že limitu můžeme počítat pouze z funkčních hodnot v libovolně malém okolí daného bodu x_0 a že přitom limita nezávisí na hodnotě přímo v tomto bodě. Při počítání limit tedy můžeme využívat krácení a rozšiřování výrazů, které nemění hodnoty uvažované funkce v libovolně zvoleném ryzím okolí bodu x_0.

Případ (c). Dvojnásobná záměna pořadí limity a vnější funkce převádí původní limitu na

$$\left(\arccos \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1}\right)\right)^3.$$

Lehce určíme, že

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

Neboť je funkce $y = \arccos x$ spojitá v bodě 0, ve kterém nabývá hodnoty $\pi/2$, a funkce $y = x^3$ je spojitá v bodě $\pi/2$, platí

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\arccos\frac{1}{x+1}\right)^3 = \left(\arccos\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}\right)\right)^3 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3.$$

Případ (d). Funkce $y = \operatorname{arctg} x$ má vlastnosti „užitečné při počítání limit" – je spojitá a prostá (rostoucí) na celé reálné ose. Tyto vlastnosti vždy (bez dalších podmínek či omezení) umožňují vnořit vyšetřovanou limitu do argumentu takové reálné funkce. Proto uvažujme

$$\operatorname{arctg}\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\right), \quad \operatorname{arctg}\left(\lim_{x\to-\infty}x^4\right), \quad \operatorname{arctg}\left(\lim_{x\to-\infty}\sin x\right).$$

Zřejmě je

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty}x^4 = +\infty$$

a limita $\lim_{x\to-\infty}\sin x$ neexistuje, což již implikuje

$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \operatorname{arctg}0 = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x^4 = \lim_{y\to+\infty}\operatorname{arctg}y = \frac{\pi}{2}$$

a neexistenci poslední limity. □

5.17. Určete limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right).$$

Řešení. Ke stanovení limity postačuje její členy vyjádřit ve tvaru

$$2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}\cdots 2^{\frac{1}{2^n}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}.$$

Dostáváme tak

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right) = \lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$$
$$= 2^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)} = 2^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}}.$$

Ze známého vzorce pro součet geometrické řady

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2, \quad \text{tj.} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 2-1 = 1,$$

plyne výsledek

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right) = 2^1 = 2.$$

□

5.18. Určete limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\sin(x^2)}$$

Řešení.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\sin(x^2)} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2\sin(x^2)} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\sin(x^2)} = \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2(x^2)} = \frac{1}{2}\cdot\infty = \infty.
\end{aligned}$$

Předchozí výpočet je nutné chápat „odzadu“. Protože existují limity na pravé straně (ať už vlastní či nevlastní) a výraz $\frac{1}{2}\cdot\infty$ má smysl (viz Poznámka za větou (**??**)), existuje i původní limita. Kdybychom původní limitu rozdělili na součin limit

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2\sin(x^2)}$$

, jednalo by se o součin typu $0\cdot\infty$, tedy nedefinovaný výraz, ale tento fakt nevypovídá nic o exitenci původní limity. □

5.19. Určete následující limity:

i)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}},$$

ii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x},$$

iii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x},$$

iv)

$$\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}.$$

Řešení.

i)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{(x-2)(x+2)}} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} = \frac{0}{4} = 0.$$

ii)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} \overset{(??)}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1,$$

kde jsme využili toho, že $\lim_{x\to 0}\sin x = 0$.

iii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\sin(x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 0\cdot 1 = 0,$$

opět původní limita existuje, protože existují obě limity na pravé straně rovnosti a jejich součin je definován.

iv) Při výpočtu této limity musíme být obezřetní, protože obě jednostranné limity v bodě nula existují, jejich hodnoty se však liší, zkoumaná limita tedy neexistuje:

$$\lim_{x\to 0_+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x}} = e^{\infty} = \infty,$$

$$\lim_{x\to 0_-} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0_-} \frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0.$$

□

5.20. Určete

(a)
$$\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{(x-2)^6};$$

(b)
$$\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{(x-2)^5};$$

(c)
$$\lim_{x\to +\infty} \left(2+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}};$$

(d)
$$\lim_{x\to +\infty} x^{-x}.$$

Řešení. V tomto příkladu se budeme věnovat tzv. neurčitým výrazům. Přesněji řečeno, budeme se zabývat situacemi, kdy se o ně nejedná. Čtenáři doporučujeme, aby neurčité výrazy vnímal jako pojem pomocný, který mu má pouze usnadnit orientování se při prvním počítání limit, neboť obdržený neurčitý výraz pouze znamená, že jsme „nic nezjistili“. Víme, že limita součtu je součet limit, limita součinu je součin limit a že limita podílu je podíl limit, pokud jednotlivé limity existují a nezískáme-li některý z výrazů $\infty - \infty$, $0\cdot\infty$, $0/0$, ∞/∞, o kterých právě hovoříme jako o neurčitých. Pro úplnost dodejme, že tato pravidla můžeme kombinovat (pro limity všech složek určené současně) a že za neurčitý výraz pak považujeme také ten, jenž obsahuje alespoň jeden neurčitý výraz. Např. tedy výrazy

$$-\infty+\infty = \infty-\infty, \quad \frac{-\infty}{3+\infty} = -\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{(-\infty)^3+\infty} = 0\cdot(\infty-\infty)^{-1}$$

označujeme jako neurčité a o výrazech

$$-\infty-\infty, \quad \frac{0}{3+\infty}, \quad \frac{0}{(-\infty)^3-\infty}$$

můžeme říci, že jsou „určité“ (pro ně jsme schopni ihned příslušnou limitu stanovit – výrazy odpovídají po řadě hodnotám $-\infty$, 0, 0).

V případě (a) podíl limit čitatele a jmenovatele dává výraz $4/0$. Zápis, ve kterém dělíme nulou, je sám o sobě přinejmenším nežádoucí (později bychom se mu měli být schopni vyvarovat). Přesto nám umožní stanovit výsledek: nejedná se o neurčitý výraz. Všimněme si, že jmenovatel se blíží k nule zprava (pro $x \neq 2$ je $(x-2)^6 > 0$). To zapisujeme jako $4/+0$. Čitatel a jmenovatel tak mají stejné znaménko v jistém ryzím okolí bodu $x_0 = 2$ a lze říci, že jmenovatel je v limitě „nekonečněkrát menší“ než čitatel, tj.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{(x-2)^6} = +\infty,$$

což odpovídá položení $4/{+0} = +\infty$ (podobně se klade $4/{-0} = -\infty$).

Při určování druhé limity lze postupovat analogicky. Protože čísla $a \in \mathbb{R}$ a a^5 mají stejná znaménka, dostáváme

$$\lim_{x\to 2+} \frac{x+2}{(x-2)^5} = +\infty \neq -\infty = \lim_{x\to 2-} \frac{x+2}{(x-2)^5},$$

tj. oboustranná limita neexistuje. Tomu odpovídá zápis $4/\pm 0$ (nebo obecnější $a/\pm 0$, $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}^*$), který je „určitým výrazem“. Při důsledném oddělování symbolů $+0$ a -0 od ± 0 vždy $a/\pm 0$ pro $a \neq 0$ znamená, že limita neexistuje.

Případy (c), (d). Je-li $f(x) > 0$ pro všechna uvažovaná $x \in \mathbb{R}$, platí

$$f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} = \mathrm{e}^{g(x)\cdot \ln f(x)}.$$

Využijeme-li toho, že exponenciální funkce je spojitá a prostá na reálné přímce, můžeme nahradit limitu

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$$

za

$$\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0}(g(x)\cdot \ln f(x))}.$$

Připomeňme, že jedna z těchto limit existuje právě tehdy, když existuje druhá; a doplňme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}(g(x)\cdot \ln f(x)) = a \in \mathbb{R} \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^a,\\
\lim_{x\to x_0}(g(x)\cdot \ln f(x)) = +\infty \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty,\\
\lim_{x\to x_0}(g(x)\cdot \ln f(x)) = -\infty \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 0.
\end{aligned}$$

Můžeme tudíž psát

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x)},$$

jestliže obě limity vpravo existují a neobdržíme-li neurčitý výraz $0\cdot\infty$. Není obtížné si uvědomit, že tento neurčitý výraz lze získat pouze ve třech případech odpovídajících zbylým neurčitým výrazům 0^0; ∞^0; 1^∞, kdy postupně je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad &\text{a} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0;\\
\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad &\text{a} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0;\\
\lim_{x\to x_0} f(x) = 1 \quad &\text{a} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty.
\end{aligned}$$

V ostatních případech nám tedy znalost (a pochopitelně existence) limit

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \qquad \lim_{x\to x_0} g(x)$$

umožňuje uvést výsledek (při dodefinování některých zápisů)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Protože

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right) = 2, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty,$$

je

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 2^0 = 1;$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^x = 0$$

nebo

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\left(x^x\right)^{-1} = 0.$$

Poslední výsledek pak bychom mohli vyjádřit zápisem $0^\infty = 0$ či $\infty^\infty = \infty$, $\infty^{-1} = 0$ (zdůrazněme, že se nejedná o neurčité výrazy).

Přestože jsme kladli důraz na to, aby čtenář raději upřednostňoval úvahy o limitním chování funkcí před škatulkováním výrazů na určité a neurčité (a tyto pojmy vnímal jen jako pomocné), je snad dobře patrný důvod, proč se budeme nadále zabývat především neurčitými výrazy.
□

5.21. Vypočítejte

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x + \pi x^2}{2\cos x - 1 - x^2};$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{x+1} + x^5 - 4x}{3^x + 2^x + x^2};$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x - 8x^6 - 2^x - 167}{3^x - 45x - \sqrt{11}\pi^{x+12}};$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x} - \sin^3 x + x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+2x+x^2}}.$$

Řešení. Vydělíme-li v případě první z limit čitatele i jmenovatele polynomem x^2, obdržíme

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x + \pi x^2}{2\cos x - 1 - x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sin x}{x^2} + \pi}{\frac{2\cos x - 1}{x^2} - 1}.$$

Ohraničenost výrazů

$$|\sin x| \le 1, \quad |2\cos x - 1| \le 3 \quad \text{pro} \quad x \in \mathbb{R}$$

a $x^2 \to +\infty$ pro $x \to +\infty$ pak dávají výsledek

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sin x}{x^2} + \pi}{\frac{2\cos x - 1}{x^2} - 1} = \frac{0+\pi}{0-1} = -\pi.$$

V předešlé úvaze jsme vlastně použili Větu o třech limitách a zápis $c/\infty = 0$ platný pro $c \in \mathbb{R}$ (nebo přímo ohr.$/\infty = 0$, kde „ohr.“ značí ohraničenou funkci).

Tento postup lze zobecnit. Pro limitu tvaru

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_m(x)}{g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x)},$$

přičemž

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_i(x)}{f_1(x)} = 0, \quad i \in \{2, \ldots, m\},$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{g_i(x)}{g_1(x)} = 0, \quad i \in \{2, \ldots, n\},$$

platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_m(x)}{g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

pokud limita na pravé straně existuje. Je přitom výhodné si uvědomit (třetí z limit lze určit např. pomocí l'Hospitalova pravidla, se kterým se seznámíme později), že

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{c}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{b^x} = 0$$

pro

$$c \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha < \beta, \quad 1 < a < b.$$

Odtud ihned plyne

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3^{x+1} + x^5 - 4x}{3^x + 2^x + x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 \cdot 3^x}{3^x} = 3;$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4^x - 8x^6 - 2^x - 167}{3^x - 45x - \sqrt{11}\pi^{x+12}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4^x}{-\sqrt{11}\pi^{12} \cdot \pi^x} = -\infty.$$

Uvědomíme-li si, že je

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \geq 1,$$

stejně snadno dostaneme

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sin^3 x + x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1 + 2x + x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

□

5.22. Určete limity

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right);$$
$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right).$$

Řešení. Neboť pro každé přirozené číslo $k \geq 2$ je (provádíme tzv. rozklad na parciální zlomky – budeme jej probírat u integrování racionálních lomených funkcí)

$$\frac{1}{(k-1)\,k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)=$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1.$$

Poznamenejme, že stanovení této limity je důležité: určuje součet jedné z tzv. teleskopických řad (se kterou pracoval již Johann I. Bernoulli).

Ke stanovení druhé limity využijeme Větu o třech limitách. Odhady

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\geq\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}},$$
$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

pro $n\in\mathbb{N}$ dávají

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)\leq\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2}}=1,\qquad\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2}}=1,$$

je rovněž

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

□

5.23. Spočtěte

(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x};$$

(b)

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{\cos(2x)};$$

(c)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^4}\left(\sqrt[3]{x^2+2x+3}-\sqrt[3]{x^2+2x+2}\right)\right).$$

Řešení. Všechny uvedené limity vypočítáme pomocí vhodného rozšíření zadaného výrazu. V případě první limity vynásobíme čitatele i jmenovatele výrazem

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$$

a využijeme známého vztahu $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Takto obdržíme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=1.\end{aligned}$$

Podobně vypočítáme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{\cos(2x)}&=\lim_{x\to\pi/4}\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{(\cos x+\sin x)\cos(2x)}\\&=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{(\cos x+\sin x)\cos(2x)}\\&=\lim_{x\to\pi/4}\frac{1}{\cos x+\sin x}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

U provedeného krácení připomeňme identitu

$$\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Abychom mohli při určování poslední limity použít

$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3,$$

k rozšíření potřebujeme výraz

$$\sqrt[3]{\left(x^2+2x+3\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+2x+3}\cdot\sqrt[3]{x^2+2x+2}+\sqrt[3]{\left(x^2+2x+2\right)^2},$$

který odpovídá a^2+ab+b^2, resp. volíme

$$a=\sqrt[3]{x^2+2x+3},\qquad b=\sqrt[3]{x^2+2x+2}.$$

Tímto rozšířením převedeme limitu ze zadání na

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4}\left(\left(x^2+2x+3\right)-\left(x^2+2x+2\right)\right)}{\sqrt[3]{\left(x^2+2x+3\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+2x+3}\cdot\sqrt[3]{x^2+2x+2}+\sqrt[3]{\left(x^2+2x+2\right)^2}},$$

tj.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{\left(x^2+2x+3\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+2x+3}\cdot\sqrt[3]{x^2+2x+2}+\sqrt[3]{\left(x^2+2x+2\right)^2}}.$$

Poslední limitu umíme snadno vyčíslit. Víme totiž, že je určena pouze jedním členem v čitateli a jedním ve jmenovateli, a to ax^p pro největší p (v tomto případě je uvažovaný člen ve jmenovateli rozdělen na několik sčítanců). Platí tudíž

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{\left(x^2+2x+3\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+2x+3}\cdot\sqrt[3]{x^2+2x+2}+\sqrt[3]{\left(x^2+2x+2\right)^2}}\\&\qquad=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{\left(x^2\right)^2}+\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{\left(x^2\right)^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{3\sqrt[3]{x^4}}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Celkem tak je

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^4}\left(\sqrt[3]{x^2+2x+3}-\sqrt[3]{x^2+2x+2}\right)\right)=\frac{1}{3}.$$

□

5.24. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ určete limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+2nx)^n - (1+nx)^{2n}}{x^2}.$$

Řešení. Podle binomické věty je

$$(1+2nx)^n = 1 + \binom{n}{1} 2nx + \binom{n}{2} (2nx)^2 + P(x)\, x^3, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$(1+nx)^{2n} = 1 + \binom{2n}{1} nx + \binom{2n}{2} (nx)^2 + Q(x)\, x^3, \quad x \in \mathbb{R}$$

pro jisté polynomy P, Q. Raději vyzdvihněme, že předchozí vyjádření skutečně platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pro $n = 1$ si stačí uvědomit, že klademe $\binom{1}{2} = 0$ a že polynomy P, Q mohou být identicky rovny nule. Dostáváme tedy

$$(1+2nx)^n = 1 + 2n^2 x + 2n^3 (n-1)\, x^2 + P(x)\, x^3, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$(1+nx)^{2n} = 1 + 2n^2 x + n^3 (2n-1)\, x^2 + Q(x)\, x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pouhé dosazení a jednoduché úpravy již dávají

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+2nx)^n - (1+nx)^{2n}}{x^2} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(2n^3(n-1) - n^3(2n-1)\right) x^2 + (P(x) - Q(x))\, x^3}{x^2} =$$
$$\lim_{x\to 0} \left(-n^3 + (P(x) - Q(x))\, x\right) = -n^3 + 0 = -n^3.$$

□

5.25. Spočítejte

$$\lim_{x\to \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}.$$

Řešení. Limity typu $1^{\pm\infty}$ (jako je v zadání) lze počítat podle vzorce

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0} ((f(x)-1)g(x))},$$

jestliže limita na pravé straně existuje a $f(x) \neq 1$ pro x z jistého ryzího okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Určeme proto

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi/4} ((\operatorname{tg} x - 1)\operatorname{tg}(2x)) &= \lim_{x\to\pi/4} \left(\left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1 \right) \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} \right) \\
&= \lim_{x\to\pi/4} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\cos x} \cdot \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \right) \\
&= \lim_{x\to\pi/4} -\frac{2\sin x}{\cos x + \sin x} = -\frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = -1.
\end{aligned}$$

Odtud máme

$$\lim_{x\to\pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Doplňme, že použitý vzorec platí obecněji pro „typ 1^{cokoli}“, tj. bez kladení jakýchkoli podmínek týkajících se limity $\lim_{x\to x_0} g(x)$, která tak ani nemusí existovat. □

5.26. Ukažte, že je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Řešení. Uvažujme jednotkovou čtvrtkružnici v prvním kvadrantu a její bod $[\cos x, \sin x]$, $x \in (0, \pi/2)$. Délka kruhového oblouku mezi body $[\cos x, \sin x]$ a $[1, 0]$ je rovna x. Zřejmě tedy je

$$\sin x < x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Hodnotu $\operatorname{tg} x$ potom vyjadřuje délka úsečky s krajními body $[1, \sin x/\cos x]$ a $[1, 0]$. Vidíme, že je (příp. si nakreslete obrázek)

$$x < \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Tato nerovnost rovněž vyplývá z toho, že trojúhelník s vrcholy $[0, 0]$, $[1, 0]$, $[1, \operatorname{tg} x]$ má očividně větší obsah než uvažovaná kruhová výseč. Dohromady jsme získali

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

tj.

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Z Věty o třech limitách nyní plynou nerovnosti

$$1 = \lim_{x\to 0+} 1 \geq \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x\to 0+} \cos x = \cos 0 = 1.$$

Dokázali jsme tak, že

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Funkce $y = (\sin x)/x$ definovaná pro $x \neq 0$ je ovšem sudá, a tudíž je

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Protože obě jednostranné limity existují a jsou si rovny, existuje oboustranná limita a platí pro ni

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Poznamenejme ještě, že uvedenou limitu šlo velmi snadno vyčíslit za pomoci l'Hospitalova pravidla. □

5.27. Stanovte limity

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin^2 x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3 \operatorname{tg}^2 x}{5 x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\sin(5x)};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x} - e^{2x}}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{5x} - e^{-x}}{\sin(2x)}.$$

Řešení. Při určování těchto limit využijeme znalosti limit ($a \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Víme tedy, že je

$$e^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

Substituce $m = n - 1$ dává

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{m}{m+1}\right)^m \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{m}{m+1}.$$

Celkem máme

$$e^{-1} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{m}{m+1}\right)^m \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{m}{m+1}.$$

Druhá z limit je zjevně rovna 1. Když změníme označení (nahradíme n za m), můžeme napsat výsledek

$$e^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Dále platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^n = 0.$$

Upozorněme, že první z předešlých vyčíslení vyplývá z limit

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

a druhé potom z

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}, \qquad \lim_{n\to\infty} n = +\infty,$$

přičemž klademe $e^{-\infty} = 0$ (zápis označuje $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ – jedná se o určitý výraz).

Snadno lze získat

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \sin x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Zřejmě je

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1^{-1} = 1$$

a limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin x}$$

neexistuje (zapisujeme $1/\pm 0$). Kdybychom tedy k výpočtu limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin^2 x}$$

užili pravidla o limitě součinu, obdrželi bychom $1 \cdot 1/\pm 0 = 1/\pm 0$. To znamená, že tato limita neexistuje (opět jde o určitý výraz). Ke stanovení

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$$

použijeme identitu $x = \sin(\arcsin x)$ platnou pro $x \in (-1, 1)$, tj. v jistém okolí bodu 0. Pomocí substituce $y = \arcsin x$ dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

Poznamenejme, že $y \to 0$ plyne z dosazení $x = 0$ do $y = \arcsin x$ a ze spojitosti této funkce v počátku (to také zaručuje, že jsme tuto substituci mohli „bez obav“ zavést).

Ihned vidíme, že je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{3\,\mathrm{tg}^2 x}{5\,x^2} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\right) \\ &= \frac{3}{5} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Vhodné rozšíření a substituce dávají

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{5x}{\sin(5x)} \cdot \frac{3}{5}\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{5x}{\sin(5x)} \cdot \frac{3}{5} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin z} \cdot \frac{3}{5} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Pomocí předešlého výsledku pak lehce spočítáme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\,(3x)}{\sin(5x)} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} \cdot \frac{1}{\cos(3x)}\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(3x)} = \frac{3}{5} \cdot 1 = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Podobně můžeme stanovit

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x} - e^{2x}}{x} &= \lim_{x\to 0} \left(e^{2x}\, \frac{e^{(5-2)x} - 1}{(5-2)x}\,(5-2)\right) \\ &= \lim_{x\to 0} e^{2x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \cdot 3 \\ &= e^0 \cdot \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} \cdot 3 = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3\end{aligned}$$

a rovněž

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{-x}}{\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{5x}-1}{\sin(2x)}-\frac{e^{-x}-1}{\sin(2x)}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{5x}-1}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\frac{5}{2}-\frac{e^{-x}-1}{-x}\cdot\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\frac{5}{2}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{e^{u}-1}{u}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}\cdot\frac{5}{2}-\lim_{v\to 0}\frac{e^{v}-1}{v}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3.$$

□

5.28. Bez použití Věty o třech limitách dokažte, že funkce

$$R(x)=\begin{cases}x, & x\in\left\{\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}\right\};\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}\right\}\end{cases}$$

je spojitá v bodě 0.

Řešení. Funkce R je spojitá v bodě 0, právě když je

$$\lim_{x\to 0}R(x)=R(0)=0.$$

Z definice limity ukážeme, že tato limita se skutečně rovná 0. Při „obvyklém“ značení je $a=0$, $x_0=0$. Nechť $\delta>0$ je nadále libovolné. Pro jakékoli $x\in(-\delta,\delta)$ je $R(x)=0$, nebo $R(x)=x$, a tudíž (v obou případech) dostáváme $R(x)\in(-\delta,\delta)$. Jinými slovy, vezmeme-li libovolné δ-okolí $(-\delta,\delta)$ hodnoty a a přiřadíme-li mu $(-\delta,\delta)$ (jako okolí bodu x_0), pak pro každé $x\in(-\delta,\delta)$ (z uvažovaného okolí x_0) platí, že $R(x)\in(-\delta,\delta)$ (zde na interval $(-\delta,\delta)$ nahlížíme jako na okolí a). To odpovídá znění definice limity (nemuseli jsme ani požadovat, aby bylo $x\neq x_0$).

Uvažovaná funkce R se nazývá Riemannova funkce (proto označení R). V literatuře se ovšem uvádí v různých modifikacích. Např. o funkci

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Z};\\ \frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\text{ pro nesoudělná }p,q\in\mathbb{Z}\text{ a }q>1;\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

se „často“ hovoří jako o Riemannově. □

5.29. Dodefinujte funkci

$$f(x)=\left(x^2-1\right)\sin\frac{2x-1}{x^2-1},\qquad x\neq\pm1\ (x\in\mathbb{R})$$

v bodech -1, 1 tak, aby byla spojitá na $\mathbb{R}$.

Řešení. Daná funkce je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru. V bodech -1, 1 bude spojitá, právě když položíme

$$f(-1):=\lim_{x\to-1}\left(\left(x^2-1\right)\sin\frac{2x-1}{x^2-1}\right),\quad f(1):=\lim_{x\to 1}\left(\left(x^2-1\right)\sin\frac{2x-1}{x^2-1}\right).$$

Pokud by jedna z těchto limit neexistovala (příp. byla nevlastní), funkci by nešlo spojitě dodefinovat. Očividně je

$$\left| \sin \frac{2x-1}{x^2-1} \right| \leq 1, \quad x \neq \pm 1 \; (x \in \mathbb{R}),$$

odkud plyne

$$-\left| x^2 - 1 \right| \leq f(x) \leq \left| x^2 - 1 \right|, \quad x \neq \pm 1 \; (x \in \mathbb{R}).$$

Protože

$$\lim_{x \to \pm 1} \left| x^2 - 1 \right| = 0,$$

z Věty o třech limitách již dostáváme výsledek $f(\pm 1) := 0$. □

D. Derivace

Ukažme si nejprve, že derivace funkcí uvedené v tabulce v odstavci **??** jsou skutečně správně. Určíme je přímo z definice derivace.

5.30. Z definice (viz **??**) určete hodnoty derivací funkcí x^n (x je proměnná, n kladná celá konstanta), $\sqrt{x}$, $\sin x$.

Řešení. Nejprve podotkněme, že označíme-li v definici derivace výraz $x - x_0$ jako h, pak dostáváme

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

V následujících výpočtech budeme pracovat s druhým vyjádřením téže limity.

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + h^n}{h} \\
&= n x^{n-1} + \lim_{h \to 0} \left(\binom{n}{2} x^{n-2} h + \binom{n}{3} x^{n-3} h^2 + \cdots + h^{n-1} \right) \\
&= n x^{n-1} \\
(\sqrt{x})' &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim h \to 0 \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
(\sin x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \sin h}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{sin(x)(\cos(h) - 1)}{h} \\
&= \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{2(\sin \frac{h}{2})^2}{h} \\
&= \cos x \cdot 1 + \lim_{t \to 0} \sin(t) \frac{sin(t)}{t} \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

□

5.31. Zderivujte a výsledek upravte:

i) $x\sin x$,

ii) $\frac{\sin x}{x}$,

iii) $\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$, $a\neq 0$, $|x|\geq |a|$,

iv) $\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, $|x|\leq 1$,

derivace

v) x^x.

Řešení. (i) Podle pravidla o derivování součinu funkcí, tedy Leibnitzova pravidla, viz **??** dostáváme

$$(x\sin x)' = x'\cdot \sin x + x\cdot(\sin x)' = \sin x + x\cos x.$$

(ii) Podle pravidla o derivování podílu funkcí (**??**) je

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{(\sin x)'\cdot x - sin(x)\cdot x'}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}.$$

(iii) Použijeme pravidla pro derivování složené funkce (**??**). Označíme-li $h(x)=\ln(x)$, $f(x)=x+\sqrt{x^2-a^2}$, máme

$$\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})' = h(f(x))' = h(f(x))\cdot f'(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-a^2})'}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= \frac{1+\frac{x}{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}},$$

kde jsme pro derivování výrazu $\sqrt{x^2-a^2}$ použili opět pravidlo o derivování složené funkce.

(iv) Opět derivujeme složenou funkci:

$$\left[\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right]' = \frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'$$

$$= \frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= \sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(v) Funkci je nejprve převedeme na funkci o konstatním základu (nejlépe o základu e), kterou už umíme derivovat.

$$(x^x)' = \left((e^{\ln x})^x\right)' = (e^{x\ln x})'$$

$$= (x\ln x)'\cdot e^{x\ln x} = (1+\ln x)\cdot x^x$$

□

Doporučujeme čtenáři si vymyslet funkce, které potom sám zderivuje. Výsledek si může ověřit v celé řadě matematických výpočetních programů. V následujícím příkladu si uvědomíme geometrický význam derivace bodě, totiž, že určuje směrnici tečny ke grafu v daném bodě (viz **??**)

5.32. Určete parametr $c \in \mathbb{R}$ tak, aby tečna ke grafu funkce $\frac{ln(c \cdot x)}{\sqrt{x}}$ v bodě $[1, 0]$ procházela bodem $[2, 2]$.

Řešení. Podle zadání má mít tečna směrnici 2 $(\frac{2-0}{2-1})$. Směrnice je určena derivací funkce v daném bodě, dostáváme tedy podmínku

$$\frac{2 - \ln(cx)}{2\sqrt{x}}(1) = 2, \text{ neboli } 2 - \ln(c) = 4,$$

tedy $c = \frac{1}{e^2}$. Pro $c = \frac{1}{e^2}$ je však hodnota fce $\frac{ln(c \cdot x)}{\sqrt{x}}$ v bodě 1 rovna -2. Tedy žádné takové c neexistuje. □

E. L'Hospitalovo pravidlo

5.33. Ověřte, že je limita

(a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2\sin x}{2e^x - x^2 - 2x - 2} \qquad \text{typu } \frac{0}{0};$$

(b)
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x} \qquad \text{typu } \frac{\infty}{\infty};$$

(c)
$$\lim_{x\to 1+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) \qquad \text{typu } \infty - \infty;$$

(d)
$$\lim_{x\to 1+} (\ln(x-1) \cdot \ln x) \qquad \text{typu } 0 \cdot \infty;$$

(e)
$$\lim_{x\to 0+} (\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}} \qquad \text{typu } \infty^0;$$

(f)
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \qquad \text{typu } 1^{\infty};$$

(g)
$$\lim_{x\to 1-} \left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)^{\ln x} \qquad \text{typu } 0^0.$$

Poté ji spočtěte užitím l'Hospitalova pravidla.

Řešení. Bezprostředně můžeme potvrdit, že je

(a)
$$\lim_{x\to 0} (\sin(2x) - 2\sin x) = 0 - 0 = 0,$$
$$\lim_{x\to 0} \left(2e^x - x^2 - 2x - 2\right) = 2 - 0 - 0 - 2 = 0;$$

(b)
$$\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0+} \operatorname{cotg} x = +\infty;$$

(c)
$$\lim_{x\to 1+} \frac{x}{x-1} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1+} \frac{1}{\ln x} = +\infty;$$

(d)
$$\lim_{x\to 1+} \ln x = 0, \qquad \lim_{x\to 1+} \ln(x-1) = -\infty;$$

(e)

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{cotg} x = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\ln x} = 0;$$

(f)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty;$$

(g)

$$\lim_{x\to 1-} \cos\frac{\pi x}{2} = 0, \qquad \lim_{x\to 1-} \ln x = 0.$$

Případ (a). Aplikování l'Hospitalova pravidla převádí limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2\sin x}{2e^x - x^2 - 2x - 2}$$

na limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x) - 2\cos x}{2e^x - 2x - 2},$$

která je ovšem typu $0/0$. Dalšími dvěma aplikacemi l'Hospitalova pravidla dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{-4\sin(2x) + 2\sin x}{2e^x - 2}$$

a (výše uvedená limita je opět typu $0/0$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{-8\cos(2x) + 2\cos x}{2e^x} = \frac{-8+2}{2} = -3.$$

Celkem tak máme (vrátíme se k původní limitě)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2\sin x}{2e^x - x^2 - 2x - 2} = -3.$$

Dodejme, že opakované užití l'Hospitalova pravidla v jednom příkladu je běžné.

Nadále budeme klást, že se limity podílů derivací získané l'Hospitalovým pravidlem přímo rovnají původním limitám podílů. Takto si můžeme počínat, pokud obdržené limity na pravých stranách budou existovat, tj. o platnosti zápisů se vlastně budeme přesvědčovat dodatečně.

Případ (b). Tentokráte derivování čitatele a jmenovatele dává

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\sin^2 x}{x}.$$

Poslední limitu umíme snadno určit (dokonce ji známe). Z

$$\lim_{x\to 0+} -\sin x = 0, \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

plyne výsledek $0 = 0 \cdot 1$. Také jsme mohli znovu použít l'Hospitalovo pravidlo (nyní pro výraz $0/0$) se ziskem

$$\lim_{x\to 0+} \frac{-\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{-2\cdot \sin x \cdot \cos x}{1} = \frac{-2\cdot 0\cdot 1}{1} = 0.$$

Případ (c). Pouze převodem na společného jmenovatele

$$\lim_{x\to 1+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1+} \frac{x\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x}$$

jsme obdrželi typ $0/0$. Je

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x \ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1+} \frac{\ln x + \frac{x}{x} - 1}{\frac{x-1}{x} + \ln x} = \lim_{x\to 1+} \frac{\ln x}{1 - \frac{1}{x} + \ln x}.$$

Máme podíl $0/0$, pro který (opět dle l'Hospitalova pravidla) platí

$$\lim_{x\to 1+} \frac{\ln x}{1 - \frac{1}{x} + \ln x} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Návratem k původní limitě zapíšeme výsledek

$$\lim_{x\to 1+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \frac{1}{2}.$$

Případ (d). Uvedený výraz převedeme na typ ∞/∞ (přesněji řečeno, na typ $-\infty/\infty$) vytvořením zlomku

$$\lim_{x\to 1+} (\ln (x-1) \cdot \ln x) = \lim_{x\to 1+} \frac{\ln (x-1)}{\frac{1}{\ln x}}.$$

Podle l'Hospitalova pravidla je

$$\lim_{x\to 1+} \frac{\ln (x-1)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1+} \frac{-x \ln^2 x}{x-1}.$$

Pro tento neurčitý výraz (typu $0/0$) lze pokračovat l'Hospitalovým pravidlem a stanovit

$$\lim_{x\to 1+} \frac{-x \ln^2 x}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{-\ln^2 x - 2x \ln x \cdot \frac{1}{x}}{1} = -\frac{0+0}{1} = 0.$$

Případy (e), (f), (g). Protože

$$\lim_{x\to 0+} (\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln(\operatorname{cotg} x)}{\ln x}};$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2}};$$

$$\lim_{x\to 1-} \left(\cos \frac{\pi x}{2} \right)^{\ln x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 1-} \left(\ln x \cdot \ln\left(\cos \frac{\pi x}{2}\right)\right)},$$

postačuje vypočítat limity uvedené v argumentu exponenciální funkce. Pomocí l'Hospitalova pravidla a jednoduchých úprav získáváme

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln (\operatorname{cotg} x)}{\ln x} = \left[\text{typ } \frac{+\infty}{-\infty} \right] = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\operatorname{cotg} x} \cdot \frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{-x}{\cos x \cdot \sin x} = \left[\text{typ } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x\to 0+} \frac{-1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{-1}{1-0} = -1;$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2} &= \left[\text{typ } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{2x^2 \sin x} \\
&= \left[\text{typ } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{4x \sin x + 2x^2 \cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{4 \sin x + 2x \cos x} = \left[\text{typ } \frac{0}{0} \right] \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{4 \cos x + 2 \cos x - 2x \sin x} = \frac{-1}{4+2-0} = -\frac{1}{6},
\end{aligned}$$

a tudíž

$$\lim_{x\to 0+} (\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}};$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{\mathrm{e}}}.$$

Obdobně lze postupovat při určování poslední limity. Platí

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1-} \left(\ln x \cdot \ln\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)\right) &= \lim_{x\to 1-} \frac{\ln\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{1}{\ln x}} = \left[\text{typ } \frac{-\infty}{-\infty} = \frac{\infty}{\infty}\right] \\
&= \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}\left(-\sin\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\pi}{2}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} \\
&= \frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1-} \frac{x\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\ln^2 x}{\cos\frac{\pi x}{2}}.
\end{aligned}$$

Neboť je tento výraz typu $0/0$, mohli bychom pokračovat l'Hospitalovým pravidlem; místo toho ale přejdeme od

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\ln^2 x}{\cos\frac{\pi x}{2}}$$

k součinu limit

$$\lim_{x\to 1-}\left(x\sin\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\lim_{x\to 1-}\frac{\ln^2 x}{\cos\frac{\pi x}{2}} = 1\cdot\lim_{x\to 1-}\frac{\ln^2 x}{\cos\frac{\pi x}{2}}.$$

Teprve nyní aplikujeme l'Hospitalovo pravidlo pro

$$\lim_{x\to 1-}\frac{\ln^2 x}{\cos\frac{\pi x}{2}} = \left[\text{typ } \frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1-}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{-\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Celkem máme

$$\lim_{x\to 1-}\left(\ln x\cdot\ln\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot 0 = 0,$$

tj.

$$\lim_{x\to 1-}\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)^{\ln x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

□

5.34. Určete

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right).$$

Řešení. Uvědomíme-li si, že je

$$\lim_{x\to 0+}\operatorname{cotg} x = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0-}\operatorname{cotg} x = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x} = -\infty,$$

vidíme, že v případě obou jednostranných limit dostáváme typ $\infty - \infty$. Můžeme tedy uvažovat najednou oboustrannou limitu. Funkci kotangens zapíšeme jako podíl kosinu a sinu a zlomky převedeme na společného jmenovatele, tj.

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}.$$

Obdrželi jsme výraz $0/0$, pro který platí (podle l'Hospitalova pravidla)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}.$$

Druhým použitím l'Hospitalova pravidla pro typ $0/0$ pak již dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-x\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0-0}{1+1-0}=0.$$

□

5.35. Určete

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x},\qquad \lim_{x\to 0+}x\ln\frac{1}{x},\qquad \lim_{x\to 0+}x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}};$$

$$\lim_{x\to 0-}x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}},\qquad \lim_{x\to+\infty}(\ln x-x)\,;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+\ln x\cdot\cos x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[5]{x+3}},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Řešení. Snadno lze zjistit (např. n-násobným užitím l'Hospitalova pravidla), že pro libovolné $n\in\mathbb{N}$ je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\mathrm{e}^x}=0,\quad \text{tj.}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^n}=+\infty.$$

Z Věty o třech limitách potom pro reálná čísla $a>0$ ihned plyne zobecnění

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{\mathrm{e}^x}=0,\quad \text{tj.}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^a}=+\infty.$$

Uvážíme-li, že grafy funkcí $y=\mathrm{e}^x$ a $y=\ln x$ (inverzní funkce k $y=\mathrm{e}^x$) jsou symetrické vzhledem k přímce $y=x$, víme dále

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0,\quad \text{tj.}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty.$$

Získali jsme tak první výsledek. Ten přitom dává rovněž l'Hospitalovo pravidlo, podle kterého je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Upozorněme, že l'Hospitalovo pravidlo lze použít k vyčíslení každé z dalších pěti uvedených limit. Je ovšem možné určit tyto limity jednoduššími způsoby. Např. substituce $y=1/x$ vede na

$$\lim_{x\to 0+}x\ln\frac{1}{x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}=0;$$

$$\lim_{x\to 0+}x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^y}{y}=+\infty.$$

Samozřejmě $x\to 0+$ dává $y=1/x\to+\infty$ (píšeme $1/+0=+\infty$).

Pomocí substitucí $u=-1/x$, $v=1/x^2$ po řadě dostáváme

$$\lim_{x\to 0-}x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=\lim_{u\to+\infty}-\frac{\mathrm{e}^u}{u}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim_{v\to+\infty}\frac{v^{50}}{\mathrm{e}^v}=0,$$

přičemž $x \to 0-$ odpovídá $u = -1/x \to +\infty$ (píšeme $-1/-0 = +\infty$) a $x \to 0$ potom $v = 1/x^2 \to +\infty$ (znovu $1/+0 = +\infty$). Již dříve jsme také objasnili, že platí

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln x - x) = \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty.$$

Případné pochyby snad rozptýlí limita

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x - x}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{x}{\ln x}\right) = -\infty,$$

která dokazuje, že při zmenšení absolutní hodnoty uvažovaného výrazu (aniž by došlo ke změně znaménka) stále výraz v absolutní hodnotě roste nade všechny meze.

Stejně snadno umíme určit

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x + \ln x \cdot \cos x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1;$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[5]{x+3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x}} = +\infty;$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = 1.$$

Viděli jsme, že l'Hospitalovo pravidlo nemusí být nejlepší metodou výpočtu limity jednoho z typů $0/0$, ∞/∞. Na předchozích třech příkladech lze ilustrovat, že jej ani nelze vždy (pro neurčité výrazy) aplikovat. Kdybychom jej použili k řešení prvního z nich, obdrželi bychom pro $x > 0$ podíl

$$\frac{1}{1 + \frac{\cos x}{x} - \ln x \cdot \sin x} = \frac{x}{x + \cos x - x \ln x \cdot \sin x},$$

který je složitější než původní. Dokonce pro $x \to +\infty$ limitu nemá. Není tedy splněn jeden z předpokladů l'Hospitalova pravidla. Ve druhém případě pak (libovolný počet opakovaných) použití l'Hospitalova pravidla vede na neurčité výrazy. Pro poslední limitu nás l'Hospitalovo pravidlo vrátí do zadání: dává nejdříve zlomek

$$\frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

a následně

$$\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Odsud můžeme odvodit, že limita je rovna 1 (hledáme nezápornou hodnotu $a \in \mathbb{R}$ takovou, aby platilo $a = a^{-1}$), pouze když dříve dokážeme, že vůbec existuje. $\square$

Další příklady na výpočet limit užitím L'Hospitalova pravidla nalezneet na straně 276.

F. Extremální úlohy

Jednoduché pozorování **??** o geometrickém významu derivace nám také říká, že extrémy diferencovatelné reálné funkce jedné reálné proměnné mohou nastat pouze v bodech, kde je derivace dané funkce nulová. Tohoto prostého faktu lze využít při řešení množství zajímavých praktických úloh.

5.36. Určete x-ovou souřadnici x_A bodu paraboly $y = x^2$, který je nejblíže bodu $A = [1, 2]$.

Řešení. Není obtížné uvědomit si, že příklad má právě jedno řešení a že úkolem je vlastně najít absolutní minimum funkce

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funkce f má zjevně nejmenší hodnotu ve stejném bodě jako funkce

$$g(x) = (x-1)^2 + (x^2-2)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Neboť

$$g'(x) = 4x^3 - 6x - 2, \quad x \in \mathbb{R},$$

řešením rovnice $0 = 2x^3 - 3x - 1$ dostáváme nejprve stacionární bod $x = -1$ a po vydělení polynomu $2x^3 - 3x - 1$ polynomem $x + 1$ také zbývající dva stacionární body

$$\tfrac{1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{a} \quad \tfrac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Protože funkce g je polynomem (má derivaci na celé reálné ose), z geometrického významu úlohy již získáváme

$$x_A = \tfrac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

□

5.37. Do rovnoramenného trojúhelníku o základně z a výšce v (nad základnou) vepište obdélník (jedna jeho strana bude částí základny trojúhelníku) s největším obsahem. Stanovte obsah S tohoto obdélníku.

Řešení. Pro vyřešení příkladu postačuje uvažovat úlohu, kdy se snažíme vepsat do pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami délek $z/2$ a v obdélník s maximálním možným obsahem, přičemž dvě jeho strany musí být částmi odvěsen tohoto trojúhelníku. Úlohu takto převedeme na otázku maximalizace funkce

$$f(x) = x\left(v - \tfrac{2vx}{z}\right)$$

na intervalu $I = [0, z/2]$. Neboť je

$$f'(x) = v - \tfrac{4vx}{z} \qquad \text{pro všechna } x \in I$$

a dále

$$f(0) = f\left(\tfrac{z}{2}\right) = 0, \qquad f(x) \geq 0, \quad x \in I,$$

v jediném svém stacionárním bodě $x_0 = z/4$ nutně nabývá funkce f maxima na I. Proto jsou strany hledaného obdélníku dlouhé $z/2$ (dvojnásobek x_0: uvažujeme původní úlohu) a $v/2$ (to lze získat dosazením $z/4$ za x do výrazu $v - 2vx/z$). Odsud dostáváme, že $S = vz/4$. $\square$

5.38. Firma hledá obdélníkovou parcelu o rozměrech $5a \times b$ se záměrem ji po obvodu celou oplotit a pak ještě ploty kolmými na první stranu rozdělit na 5 stejně velkých parcel o rozměrech $a \times b$. Pro jaké hodnoty a, b bude rozloha parcely $S = 5ab$ maximální, má-li být celková délka plotů 2 400 m?

Řešení. Přeformulujme zadání: Chceme maximalizovat součin $5ab$ při splnění podmínky

ves7863k2 (5.1) $$6b + 10a = 2\,400, \quad a, b > 0.$$

Lehce lze ukázat, že funkce

$$a \mapsto 5a\,\frac{2\,400 - 10a}{6}$$

definovaná pro $a \in [0, 240]$ nabývá maximální hodnoty v bodě $a = 120$. Proto je výsledek

$$a = 120 \text{ m}, \quad b = 200 \text{ m}.$$

Doplňme, že uvedená hodnota b bezprostředně plyne z (6.2). $\square$

5.39. Mezi obdélníky, jejichž dva vrcholy leží na ose x a další dva s kladnými druhými souřadnicemi na parabole $y = 8 - 2x^2$, najděte obdélník s maximálním obsahem.

Řešení. Základna obdélníku s maximálním obsahem měří $4/\sqrt{3}$, jeho výška pak $16/3$. Tento výsledek lze obdržet nalezením absolutního maxima funkce

$$S(x) = 2x\left(8 - 2x^2\right)$$

na intervalu $I = [0, 2]$. Neboť tato funkce je na I nezáporná, v krajních bodech I nulová a má derivaci na celém I, přičemž její derivace je nulová pouze v jednom bodě intervalu I, a to v bodě $x = 2/\sqrt{3}$, nabývá zde maximální hodnoty. $\square$

5.40. Do rovnostranného trojúhelníka o straně a je vepsán pravoúhelník (jedna jeho strana leží na straně trojúhelníka, zbylé dva vrcholy leží na zbylých stranách trojúhelníka). Jaký může mít maximálně obsah?

Řešení. Vepsaný pravoúhelník má strany x, $\sqrt{3}/2(a - x)$, tedy obsah $\sqrt{3}/2(a - x)x$. Maximum pro $x = a/2$, tedy maximální obsah je $(\sqrt{3}/8)a^2$. $\square$

5.41. Ve čase $t = 0$ se začaly pohybovat tři body P, Q, R v rovině a to bod P z bodu $[-2, 1]$ směrem $(3, 1)$, rovnoměrnou rychlostí $\sqrt{10}\,m/s$, bod Q z bodu $[0, 0]$ směrem $(-1, 1)$ rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením $2\sqrt{2}\,m/s^2$ a bod R z bodu $[0, 1]$ směrem $(1, 0)$

rovnoměrnou rychlostí $2\,m/s$. V jakém čase bude obsah trojúhelníku PQR minimální?

Řešení. Rovnice bodů P, Q, R v čase jsou

$$\begin{aligned} P &: [-2,1] + (3,1)t \\ Q &: [0,0] + (-1,1)t^2 \\ R &: [0,1] + (2,0)t \end{aligned}$$

Obsah trojúhelníka PQR je určený např. polovinou absolutní hodnoty determinantu, jehož řádky jsou souřadnice vektorů PQ a QR (viz Matematika I). Minimalizujeme tedy determinant:

$$\begin{vmatrix} -2+t & t \\ -t^2-2t & -1+t^2 \end{vmatrix} = 2t^3 - t + 2.$$

Derivace je $6t^2 - 1$, extrémy tedy nastávají pro $t = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$, vzhledem k tomu, že uvažujeme pouze nezáporný čas, vyšetřujeme pouze $t = \frac{1}{\sqrt{6}}$, jde o minimum, navíc je hodnota determinantu v tomto bodě kladná a menší, než hodnota v bodě 0 (krajní bod intervalu, na kterém hledáme extrém), je tedy o globální minimum obsahu v čase. □

5.42. V devět hodin ráno vylezl starý vlk z nory N a v rámci ranní rozcvičky začal běhat proti směru hodinových ručiček po kružnici o poloměru 1km, kolem svého oblíbeného pařezu P a to rovnoměrnou rychlostí 4 km/h. Ve stejnou dobu vyrazila Karkulka z domu D k babičce sídlící v chaloupce C rychlostí 4 km/h (po přímce). Kdy si budou nejblíž a jaká tato vzdálenost bude? Souřadnice (v kilometrech): $N = [2,3]$, $P = [3,3]$, $D = [0,0]$, $C = [5,5]$.

Řešení. Vlk se pohybuje po jednotkové kružnici, jeho úhlová rychlost je tedy stejná jako jeho absolutní rychlost a jeho dráhu můžeme v závislosti na čase popsat následujícími parametrickými rovnicemi:

$$x(t) = 2 - \cos(4t),\ \ y(t) = 2 - \sin(4t),$$

Karkulka se pak pohybuje po dráze

$$x(t) = 2\sqrt{2}t,\ \ y(t) = 2\sqrt{2}t.$$

Nalezněme extrémy (čtverce) vzdálenosti ρ jejich drah v čase:

$$\begin{aligned} \rho(t) =& (2 - \cos(4t) - 2\sqrt{2}t)^2 + (2 - \sin(4t) - 2\sqrt{2}t)^2 \\ \rho'(t) =& 16(\cos(4t) - \sin(4t))(\sqrt{2}t - 1) + 32t + \\ & + 4\sqrt{2}(\cos(4t) + \sin(4t)) - 16\sqrt{2} \end{aligned}$$

Řešit algebraicky rovnici $\rho'(t) = 0$ se nám nepodaří (ani to nelze), zbývá pouze najít řešení numericky (pomocí výpočetního softwaru). Zjistíme, že lokální minima nastávají pro $t \doteq 0,31$ a poté pro $t \doteq 0,97$, kdy bude vzdálenost vlka a Karkulky asi 5 metrů. Je zřejmé, že půjde i o globální minimum.

Situace, kdy neumíme explicitně vyřešit daný problém je v praxi velmi častá a použití numerických metod výpočtu má velký význam. □

5.43. Pro jaká $a \in \mathbb{R}$ je kubický polynom P vyhovující vztahům $P(0) = 1$, $P'(0) = 1$, $P(1) = 2a + 2$, $P'(1) = 5a + 1$, monotónní funkcí na celém $\mathbb{R}$?

Řešení. Z podmínek $P(0) = 1$ a $P'(0) = 1$ plyne, že $P(x) = bx^3 + cx^2 + x + 1$, kde $b, c \in \mathbb{R}$, zbylé dvě podmínky určují dvě rovnice pro neznámé b a c: $b + c + 2 = 2a + 2$, $3b + 2c + 1 = 5a + 1$ s jediným řešením $b = c = a$, polynom vyhovující zadaným podmínkám je tedy $P(x) = ax^3 + ax^2 + x + 1$. Podmínka na to, aby byl monotónní funkcí na celém $\mathbb{R}$, je ekvivalentní tomu, že polynom nemá lokální extrém. Extrémy mohou nastat v kritických bodech, tedy v nulových bodech derivace. Pokud tedy derivace nebude mít nulových bodů, fukce bude monotónní. Derivace je

$$P'(x) = 3ax^2 + 2ax + 1$$

a nebude mít nulových bodů, bude-li její diskriminant záporný. Navíc inflexní body $P(x)$ odpovídají bodům, kde je nulová první i druhá derivace (a nenulová třetí, což je v případě kubického polynomu automatické), tedy násobným kořenům $P'(x)$. $P'(x)$ má násobné kořeny, právě když je její diskriminant nulový. Celkem je podmínka monotónnosti $P(x)$ ekvivalentní nekladnosti diskriminantu $P'(x)$, tedy

$$\begin{aligned} 4a^2 - 12a &\leq 0 \\ 4a(a - 3) &\leq 0, \end{aligned}$$

což odpovídá $a \in \langle 0, 3\rangle$. Pro $a = 0$ však P sice je monotónní funkcí, nikoliv však kubickým polynomem. Dané podmínky splňují právě $a \in (0, 3\rangle$. □

5.44. Regiomontanův problém, 1471. V muzeu na stěně visí obraz. Jeho dolní okraj je a metrů nad zemí a horní okraj pak b metrů nad zemí (tj. výška obrazu je $b - a$). Na obraz se dívá turista, jehož oči jsou ve výšce $h < a$ metrů nad zemí. (Důvodem nerovnosti $h < a$ může např. být, že se tak dá umožnit výhled stejně vysokým návštěvníkům muzea stojícím v několika řadách.) Jak daleko od stěny má turista stát, aby maximalizoval velikost svého úhlu pohledu na obraz?

Řešení. Jako x označme vzdálenost (v metrech) turisty od stěny a jako φ jeho úhel pohledu na obraz. Dále zaveďme (viz obrázek) úhly $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$ vztahy

$$\operatorname{tg} \alpha = \tfrac{b-h}{x}, \qquad \operatorname{tg} \beta = \tfrac{a-h}{x}.$$

Naším úkolem je maximalizovat $\varphi = \alpha - \beta$. Doplňme, že pro $h > b$ lze postupovat analogicky a že pro $h \in [a, b]$ se zřejmě úhel φ stále zvětšuje při zmenšujícím se x ($\varphi = \pi$ pro $x = 0$ a $h \in (a, b)$).

Z podmínky $h < a$ plyne, že úhel φ je ostrý, tj. $\varphi \in (0, \pi/2)$. Protože je funkce $y = \operatorname{tg} x$ rostoucí na intervalu $(0, \pi/2)$, můžeme přejít k maximalizování hodnoty $\operatorname{tg}\varphi$. Platí

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\,(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{b-h}{x} - \frac{a-h}{x}}{1+\frac{b-h}{x}\cdot\frac{a-h}{x}} = \frac{x(b-a)}{x^2+(b-h)(a-h)}.$$

Stačí nám tedy najít globální maximum funkce

$$f(x) = \frac{x(b-a)}{x^2+(b-h)(a-h)}, \qquad x \in [0, +\infty).$$

Z vyjádření

$$f'(x) = \frac{(b-a)\left[x^2+(b-h)(a-h)\right]-2x^2(b-a)}{\left[x^2+(b-h)(a-h)\right]^2} = \frac{(b-a)\left[(b-h)(a-h)-x^2\right]}{\left[x^2+(b-h)(a-h)\right]^2}, \quad x \in (0, +\infty)$$

vidíme, že

$$f'(x) > 0 \quad \text{pro} \quad x \in \left(0, \sqrt{(b-h)(a-h)}\right),$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{pro} \quad x \in \left(\sqrt{(b-h)(a-h)}, +\infty\right).$$

Funkce f má proto globální maximum v bodě $x_0 = \sqrt{(b-h)(a-h)}$ (připomeňme nerovnosti $h < a < b$).

Určit bod x_0 lze samozřejmě i jinými způsoby. Můžeme např. místo hledání maxima kladné funkce f na intervalu $(0, +\infty)$ pomocí diferenciálního počtu hledat globální minimum funkce

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{x^2+(b-h)(a-h)}{x(b-a)} = \frac{x}{b-a} + \frac{(b-h)(a-h)}{x(b-a)}, \qquad x \in (0, +\infty)$$

využitím tzv. A-G nerovnosti (mezi aritmetickým a geometrickým průměrem)

$$\frac{y_1+y_2}{2} \geq \sqrt{y_1\,y_2}, \qquad y_1, y_2 \geq 0,$$

ve které rovnost nastává právě pro $y_1 = y_2$. Volba

$$y_1(x) = \frac{x}{b-a}, \qquad y_2(x) = \frac{(b-h)(a-h)}{x(b-a)}$$

totiž dává

$$g(x) = y_1(x) + y_2(x) \geq 2\sqrt{y_1(x)\,y_2(x)} = \frac{2}{b-a}\sqrt{(b-h)\,(a-h)}.$$

Pokud tak existuje $x > 0$, pro které je $y_1(x) = y_2(x)$, má funkce g v bodě x globální minimum. Rovnice

$$y_1(x) = y_2(x), \quad \text{tj.} \quad \frac{x}{b-a} = \frac{(b-h)(a-h)}{x(b-a)},$$

má jediné kladné řešení $x_0 = \sqrt{(b-h)(a-h)}$.

Dvěma odlišnými způsoby jsem stanovili ideální vzdálenost turisty od stěny. Hodnotě x_0 odpovídá

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{x_0(b-a)}{x_0^2+(b-h)(a-h)} = \operatorname{arctg}\frac{b-a}{2\sqrt{(b-h)(a-h)}}.$$

Při pohledu z úrovně podlahy (kdyby se díval brouk) je $h = 0$, a tudíž je

$$x_0 = \sqrt{ab}, \qquad \varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}.$$

Je-li obraz vysoký 1 m a jeho dolní okraj je 2 m nad zemí ($a = 2, b = 3$), bude brouk vidět obraz pod největším úhlem $\varphi_0 \doteq 0,201\,4$ rad $\approx 11,5\,°$ ve vzdálenosti $x_0 \doteq 2,45$ m od stěny. Pokud si bude stejný obraz prohlížet muž, který má oči ve výšce 1, 8 m, se svým synem, který má oči ve výšce 1 m, měl by otec stát ve vzdálenosti $x_0 \doteq 0,49$ m a syn ve vzdálenosti $x_0 \doteq 1,41$ m. Všimněme si, že pro otce je $\varphi_0 \doteq 0,795\,6$ rad $\approx 45,6\,°$, zatímco pro jeho syna je $\varphi_0 \doteq 0,339\,8$ rad $\approx 19,5\,°$. Poměr

$$\tfrac{0,795\,6}{0,339\,8} \approx \tfrac{45,6}{19,5} \doteq 2,3$$

dokládá, jak výrazně má otec lepší výhled. □

5.45. Snellův zákon. Určete lomený světelný paprsek mezi bodem A v homogenním prostředí s rychlostí šíření světla v_1 a bodem B v homogenním prostředí s rychlostí šíření světla v_2. Viz obrázek.

Řešení. V celém příkladu nebudeme uvádět fyzikální jednotky: můžeme kupř. předpokládat, že údaje o vzdálenostech budou v metrech a rychlosti v_1, v_2 jsou v metrech za sekundu (čas bude vyjádřen v sekundách). Paprsek je určen principem minimálního času, kdy k přenosu energie elektromagnetickým vlněním mezi body A a B dochází takovým způsobem, aby se odehrál v co nejkratším čase. V homogenních prostředích bude paprsek úsečkou. Stačí tedy stanovit bod R (určený hodnotou x), kde dojde k lomu. Vzdálenost mezi body A a R činí $\sqrt{h_1^2 + x^2}$ a mezi body R a B pak $\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}$. Celková doba přenosu energie mezi body A a B je tak dána funkcí

$$T(x) = \frac{\sqrt{h_1^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2+(d-x)^2}}{v_2}$$

v proměnné $x \in [0, d]$. Zdůrazněme, že chceme nalézt bod $x \in [0, d]$, ve kterém je hodnota $T(x)$ minimální.

Derivace

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{h_1^2+x^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{h_2^2+(d-x)^2}}$$

je spojitou funkcí na intervalu $[0, d]$, a proto o znaménku derivace můžeme snadno rozhodnout pomocí jejích nulových bodů. Z rovnice

$$T'(x) = 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{x}{v_1\sqrt{h_1^2+x^2}} = \frac{d-x}{v_2\sqrt{h_2^2+(d-x)^2}},$$

jednoduchou úpravou dostáváme

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}}}{\frac{d-x}{\sqrt{h_2^2+(d-x)^2}}} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Tento tvar je pro nás užitečný, neboť (viz obrázek)

$$\sin\varphi_1 = \frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}}, \qquad \sin\varphi_2 = \frac{d-x}{\sqrt{h_2^2+(d-x)^2}}.$$

Existuje tudíž nejvýše jeden stacionární bod; a ten je určen vztahem

vesdrff331 (5.2)
$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Uvědomme si, že při zvětšujícím se $\varphi_1 \in [0, \pi/2]$ (když x roste) se úhel $\varphi_2 \in [0, \pi/2]$ zmenšuje. Funkce sinus je nezáporná a rostoucí na intervalu $[0, \pi/2]$, a tak je podíl $(\sin\varphi_1)/(\sin\varphi_2)$ rostoucí funkcí v závislosti na x. Protože $T'(0) < 0$ a $T'(d) > 0$, existuje právě jeden stacionární bod x_0. Z nerovností $T'(x) < 0$ pro $x \in [0, x_0)$ a $T'(x) > 0$ pro $x \in (x_0, d]$ již plyne, že ve stacionárním bodě x_0 je globální minimum.

Shrňme předchozí. Paprsek je zadán bodem lomu R (hodnotou x_0) a bod R je potom určen identitou (5.2), která se ve fyzice označuje jako Snellův zákon.

Podíl rychlostí v_1 a v_2 je pro uvedená homogenní prostředí konstantní a vyjadřuje důležitou veličinu, jež popisuje rozhraní optických prostředí. Nazývá se index lomu a značí se n. Obvykle se požaduje, aby první z prostředí bylo vakuum, tj. klade se $v_1 = c$ a $v_2 = v$, se ziskem (absolutního) indexu lomu $n = c/v$. Pro vakuum je $n = 1$. Také pro vzduch se používá $n = 1$, neboť při standardních podmínkách (tj. při tlaku 101 325 Pa, teplotě 293 K a absolutní vlhkosti $0,9\ \mathrm{g}\cdot\mathrm{m}^{-3}$) je pro vzduch $n \doteq 1,000\,272$. U ostatních prostředí se uvádí $n > 1$ (např. se klade $n = 1,31$ pro led, $n = 1,33$ pro vodu, $n = 1,5$ pro běžné sklo).

Index lomu ovšem rovněž závisí na vlnové délce uvažovaného elektromagnetického vlnění (kupř. pro vodu a světlo se jedná o rozsah od $n \doteq 1,331$ až po $n \doteq 1,344$), kdy index lomu zpravidla klesá s rostoucí vlnovou délkou. Rychlost světla v optickém prostředí s indexem lomu $n > 1$ totiž závisí na frekvenci světla. Hovoří se o tzv. disperzi světla. Právě disperze světla způsobuje, že se paprsky světla různých barev lámou pod různými úhly. (Nejvíce se láme paprsek fialového světla a nejméně paprsek světla červeného.) To je mj. příčina vzniku duhy. Můžeme dále vzpomenout slavný Newtonův pokus se skleněným jehlanem (optickým hranolem) z roku 1 666.

Na závěr ještě doplňme, že naše úloha měla vždy řešení, protože jsme mohli volit bod R libovolně. Pokud by byl s rychlostmi v_1 a v_2 zadán také úhel φ_1 (naším úkolem by třeba bylo vypočítat, kde paprsek vycházející z bodu A protne přímku $y = c$ pro jisté $c < 0$, když rozhraní optických prostředí je součástí osy x), pak by úhel $\varphi_2 \in (0, \pi/2)$ splňující (5.2) nemusel existovat. Takové situaci odpovídá úplný odraz světla (k lomu světla vůbec nedojde). □

5.46. Halleyova úloha, 1686. Hráč stojí před basketbalovým košem ve vzdálenosti l od obroučky, která je ve výšce h nad bodem odhodu. Určete minimální počáteční rychlost v_0, kterou musí udělit míči, aby skóroval, a příslušný elevační úhel φ pro toto v_0. Viz obrázek.

Řešení. Opět vynecháváme fyzikální jednotky: můžeme předpokládat, že údaje o vzdálenostech jsou uváděny v metrech a časové údaje v sekundách (rychlosti pak v metrech za sekundu). Nechť hráč hodí míč v čase $t = 0$ a nechť míč projde obroučkou v čase $t_0 > 0$. Pozici míče (během jeho letu) vyjádříme body $[x(t), y(t)]$ pro $t \in [0, t_0]$, přičemž požadujeme, aby $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $x(t_0) = l$, $y(t_0) = h$.

Zřejmě je

$$x'(t) = v_0 \cos\varphi, \qquad y'(t) = v_0 \sin\varphi - gt$$

pro $t \in (0, t_0)$, kde g je normální tíhové zrychlení (konstanta gravitačního zrychlení). Hodnoty $x'(t)$ a $y'(t)$ totiž po řadě udávají horizontální a vertikální rychlost míče. Integrováním těchto rovnic získáme

$$x(t) = v_0 t \cos\varphi + c_1, \qquad y(t) = v_0 t \sin\varphi - \tfrac{1}{2} g t^2 + c_2$$

pro $t \in (0, t_0)$ a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Z počátečních podmínek

$$\lim_{t \to 0+} x(t) = x(0) = 0, \qquad \lim_{t \to 0+} y(t) = y(0) = 0$$

plyne, že $c_1 = c_2 = 0$. Dosazení zbývajících podmínek

$$\lim_{t \to t_0-} x(t) = x(t_0) = l, \qquad \lim_{t \to t_0-} y(t) = y(t_0) = h$$

tak již dává

$$l = v_0 t_0 \cos\varphi, \qquad h = v_0 t_0 \sin\varphi - \tfrac{1}{2} g t_0^2.$$

Podle první rovnice je

vesddf4fr5 (5.3) $$t_0 = \frac{l}{v_0 \cos\varphi},$$

a tudíž dostáváme jedinou rovnici

vesddf4fr6 (5.4) $$h = l \operatorname{tg}\varphi - \frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2\varphi},$$

přičemž $v_0 \in (0, +\infty)$, $\varphi \in (0, \pi/2)$.

Zopakujme, že naším úkolem je stanovit minimální v_0 a odpovídající φ, které této rovnici vyhovuje. Řečeno srozumitelněji, chceme určit minimální hodnotu v_0, pro kterou bude existovat φ splňující (5.4). Neboť

$$\tfrac{1}{\cos^2\varphi} = \tfrac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi, \qquad \varphi \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right),$$

rovnici (5.4) můžeme převést do tvaru

$$h - l \operatorname{tg}\varphi + \tfrac{gl^2}{2v_0^2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\varphi\right) = 0,$$

tj.

$$\operatorname{tg}^2\varphi - \tfrac{2v_0^2}{gl} \operatorname{tg}\varphi + \tfrac{2hv_0^2}{gl^2} + 1 = 0.$$

Z poslední rovnice (kvadratické rovnice pro neznámou $p = \operatorname{tg}\varphi$) vyplývá, že

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{2v_0^2}{gl} \pm \sqrt{\frac{4v_0^4}{g^2l^2} - 4\left(\frac{2hv_0^2}{gl^2} + 1\right)}}{2},$$

tj.

vesdgq291k (5.5) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_0^2}{gl} \pm \frac{\sqrt{v_0^4 - 2hv_0^2 g - g^2 l^2}}{gl}.$$

Úhel φ splňující (5.4) tedy existuje, právě když je

$$v_0^4 - 2gh\, v_0^2 - g^2 l^2 \geq 0.$$

Také nyní nám substituce (tentokráte $q = v_0^2$) umožní přejít ke kvadratickému výrazu (na levé straně nerovnice) a následně získat

$$\left(v_0^2 - g\left[h + \sqrt{h^2 + l^2}\right]\right)\left(v_0^2 - g\left[h - \sqrt{h^2 + l^2}\right]\right) \geq 0.$$

Protože $h < \sqrt{h^2 + l^2}$, musí být

$$v_0^2 \geq g\left[h + \sqrt{h^2 + l^2}\right], \quad \text{tj.} \quad v_0 \geq \sqrt{g\left[h + \sqrt{h^2 + l^2}\right]}.$$

Nejmenší přípustné hodnotě

veswwhnb4x (5.6)
$$v_0 = \sqrt{g\left[h + \sqrt{h^2 + l^2}\right]}$$

potom odpovídá (viz (5.5))

vesddfttb2 (5.7)
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_0^2}{gl} = \frac{h + \sqrt{h^2 + l^2}}{l}, \quad \text{tj.} \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{h + \sqrt{h^2 + l^2}}{l}.$$

Předchozí výpočet byl ovšem založen na podmínkách $x(t_0) = l$, $y(t_0) = h$, které pouze udávají požadovanou polohu v čase t_0. Míč však mohl projít obroučkou zespodu. Doplňme proto podmínku $y'(t_0) < 0$, která říká, že míč v čase t_0 už klesal, a dokažme, že je pro v_0 z (5.6) a φ z (5.7) splněna.

Připomeňme, že je (viz (5.3), (5.4))

$$t_0 = \frac{l}{v_0 \cos\varphi}, \qquad v_0^2 = \frac{gl^2}{2(l \operatorname{tg}\varphi - h)\cos^2\varphi}.$$

Využitím toho z

$$y'(t_0) = \lim_{t \to t_0-} y'(t) = v_0 \sin\varphi - gt_0 < 0$$

dostáváme

$$\frac{gl^2}{2(l \operatorname{tg}\varphi - h)\cos^2\varphi} = v_0^2 < v_0 \cdot \frac{gt_0}{\sin\varphi} = \frac{gl}{\sin\varphi\, \cos\varphi},$$

tj. nerovnici

$$l\, \sin\varphi\, \cos\varphi < 2(l \operatorname{tg}\varphi - h)\cos^2\varphi,$$

z níž snadno vyjádříme

$$\frac{2h}{l} < \operatorname{tg}\varphi.$$

Porovnáním s (5.7) vidíme, že poslední nerovnost je splněna, neboť

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{h + \sqrt{h^2 + l^2}}{l} > \frac{h + \sqrt{h^2}}{l} = \frac{2h}{l}.$$

Tím jsme ukázali, že při počáteční rychlosti uvedené v (5.6) může hráč koš dát.

Při trestném hodu, kdy hráč odhazuje míč ve výšce 2 m, je

$$h = 1{,}05 \text{ m}, \quad l = 4{,}225 \text{ m}, \quad g = 9{,}806\,65 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

a tudíž minimální počáteční rychlost míče činí

$$v_0 = \sqrt{9{,}806\,65\left[1{,}05 + \sqrt{(1{,}05)^2 + (4{,}225)^2}\right]} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 7{,}28 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Této rychlosti odpovídá úhel

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{v_0^2}{9{,}806\,65 \cdot 4{,}225} \doteq 0{,}907 \text{ rad} \approx 52^\circ.$$

Zamysleme se ještě nad získanou hodnotou úhlu φ pro minimální rychlost v_0. Podle obrázku je

$$2\beta + (\pi - \alpha) = \pi \qquad \text{a} \qquad \alpha + \gamma = \tfrac{\pi}{2},$$

odkud vyplývá

$$\beta = \tfrac{\alpha}{2} = \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\gamma}{2}.$$

Platí tedy

$$\varphi = \tfrac{\pi}{2} - \beta = \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\gamma}{2} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2} + \gamma\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\tfrac{h}{l}\right).$$

Obdrželi jsme, že elevační úhel při hodu s minimální energií je aritmetickým průměrem pravého úhlu a úhlu pohledu na obroučku (z pozice míče).

Problém stanovení minimální nutné rychlosti odhazovaného míče vlastně vyřešil Edmond Halley už v roce 1 686, když určil minimální potřebné množství střelného prachu k tomu, aby vystřelená dělová koule mohla zasáhnout cíl na výše položeném místě (např. za hradbami). Halley dokázal (tzv. Halleyovo kalibrační pravidlo), že pro zasažení cíle v bodě $[l, h]$ při střelbě z pozice $[0, 0]$ je potřeba stejné minimální množství prachu jako pro zasažení horizontálního cíle ve vzdálenosti $h + \sqrt{h^2 + l^2}$ (při úhlu $\varphi = 45\,^\circ$). Halley také prokázal, že hodnota φ je stabilní vzhledem k malým odchylkám množství použitého střelného prachu a nevýrazným chybám v odhadu vzdálenosti cíle. □

5.47. Projektil je vystřelen pod úhlem φ z bodu ve výšce h nad zemí s počáteční rychlostí v_0. Dopadne na zem ve vzdálenosti R od místa výstřelu. Viz obrázek. Stanovte úhel φ, při kterém bude hodnota R maximální.

Řešení. Pozici projektilu v čase vyjádříme body $[x(t), y(t)]$. Předpokládáme, že projektil byl vystřelen v čase $t = 0$ z bodu $[0, 0]$ a dopadne na zem v bodě $[R, -h]$ v jistém čase $t = t_0$, tj. $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $x(t_0) = R$, $y(t_0) = -h$. Podobně jako v Halleyově úloze uvažujme rovnice

$$x'(t) = v_0 \cos\varphi, \quad y'(t) = v_0 \sin\varphi - gt, \qquad t \in (0, t_0)$$

pro horizontální a vertikální rychlost projektilu, kde g je normální tíhové zrychlení.

I nadále můžeme pokračovat jako při řešení Halleyovy úlohy, kdy integrováním těchto rovnic se zohledněním $x(0) = y(0) = 0$ získáme

$$x(t) = v_0 t \cos\varphi, \quad y(t) = v_0 t \sin\varphi - \tfrac{1}{2} g t^2, \qquad t \in (0, t_0)$$

a z podmínek $\lim_{t\to t_0-} x(t) = x(t_0) = R$, $\lim_{t\to t_0-} y(t) = y(t_0) = -h$ poté

$$R = v_0 t_0 \cos\varphi, \quad -h = v_0 t_0 \sin\varphi - \tfrac{1}{2} g t_0^2.$$

Z první rovnice plyne

$$t_0 = \tfrac{R}{v_0 \cos\varphi},$$

a tak můžeme předchozí dvě rovnice vyjádřit jedinou rovnicí

vesdqwa23u (5.8)
$$-h = R\,\mathrm{tg}\,\varphi - \frac{gR^2}{2v_0^2\cos^2\varphi},$$

přičemž $\varphi \in (0, \pi/2)$.

Na rozdíl od Halleyovy úlohy je však hodnota v_0 dána a měnné je R v závislosti na φ. Je tak vlastně $R = R(\varphi)$ funkcí v proměnné φ, která musí splňovat (5.8) (je určena rovnicí (5.8)). Jedná se tedy o funkci zadanou implicitně. Rovnici (5.8) zapíšeme jako (R nahradíme $R(\varphi)$)

$$R(\varphi)\,\mathrm{tg}\,\varphi\cdot 2v_0^2\cos^2\varphi - gR^2(\varphi) + h\cdot 2v_0^2\cos^2\varphi = 0.$$

Využitím vztahu

$$2\,\mathrm{tg}\,\varphi\cos^2\varphi = \sin 2\varphi$$

pak (5.8) převedeme do tvaru

ves2dkjwaz (5.9)
$$R(\varphi)v_0^2\sin 2\varphi - gR^2(\varphi) + 2hv_0^2\cos^2\varphi = 0.$$

Derivování podle φ nyní dává

$$R'(\varphi)v_0^2\sin 2\varphi + 2R(\varphi)v_0^2\cos 2\varphi - 2gR(\varphi)R'(\varphi) - \\ 2hv_0^2\,(2\cos\varphi\sin\varphi) = 0,$$

tj.

$$R'(\varphi)\left[v_0^2\sin 2\varphi - 2gR(\varphi)\right] = -2R(\varphi)v_0^2\cos 2\varphi + 2hv_0^2\sin 2\varphi.$$

Vypočítali jsme tak, že

$$R'(\varphi) = \tfrac{2v_0^2[h\sin 2\varphi - R(\varphi)\cos 2\varphi]}{v_0^2\sin 2\varphi - 2gR(\varphi)}, \qquad \varphi \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right).$$

Stačí ověřit, že $v_0^2\sin 2\varphi - 2gR(\varphi) \neq 0$ pro každé $\varphi \in (0, \pi/2)$. Předpokládejme opak a dosaďme

$$R = \tfrac{v_0^2\sin 2\varphi}{2g} = \tfrac{v_0^2\sin\varphi\cos\varphi}{g}$$

do (5.8) se ziskem

$$-h = \tfrac{v_0^2\sin\varphi\cos\varphi}{g}\,\mathrm{tg}\,\varphi - \tfrac{gv_0^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{2g^2v_0^2\cos^2\varphi}.$$

Jednoduchými úpravami odtud obdržíme

$$-h = \tfrac{v_0^2\sin^2\varphi}{2g},$$

což nemůže nastat (výraz na levé straně je záporný, na pravé kladný).

Podařilo se nám tedy určit $R'(\varphi)$ pro všechna $\varphi \in (0, \pi/2)$. Navíc je ihned vidět, že tato derivace je nulová, právě když

$$h\sin 2\varphi = R(\varphi)\cos 2\varphi, \qquad \text{tj.} \qquad R(\varphi) = h\,\mathrm{tg}\,2\varphi.$$

Neboť funkce R zřejmě nabývá na intervalu $(0, \pi/2)$ maximální hodnoty (podle fyzikálního významu úlohy se pro $\varphi \to 0+$ nebo $\varphi \to \pi/2-$ hodnota R zmenšuje) a má derivaci v každém bodě tohoto intervalu, maxima musí nabývat tam, kde je derivace nulová. To znamená, že $R(\varphi)$ může být maximální pouze tehdy, když je

vesddwgtt2 (5.10)
$$R\,(\varphi) = h\,\mathrm{tg}\,2\varphi.$$

Dosaďme proto (5.10) do (5.9). Získáváme

$$h\,\mathrm{tg}\,2\varphi\,v_0^2\sin 2\varphi - gh^2\,\mathrm{tg}^2\,2\varphi + 2hv_0^2\cos^2\varphi = 0.$$

Tuto rovnici postupně upravíme

$$\begin{gathered}
\operatorname{tg} 2\varphi \, v_0^2 \sin 2\varphi + 2v_0^2 \cos^2 \varphi = gh \operatorname{tg}^2 2\varphi, \\
v_0^2 \tfrac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} + v_0^2 (\cos 2\varphi + 1) = gh \tfrac{\sin^2 2\varphi}{\cos^2 2\varphi}, \\
v_0^2 \sin^2 2\varphi + v_0^2 \cos^2 2\varphi + v_0^2 \cos 2\varphi = gh \tfrac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}, \\
v_0^2 + v_0^2 \cos 2\varphi = gh \tfrac{1-\cos^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}, \\
v_0^2 (1 + \cos 2\varphi) = gh \tfrac{(1-\cos 2\varphi)(1+\cos 2\varphi)}{\cos 2\varphi}, \\
v_0^2 \cos 2\varphi = gh (1 - \cos 2\varphi), \\
\left(v_0^2 + gh\right) \cos 2\varphi = gh, \\
\cos 2\varphi = \tfrac{gh}{v_0^2 + gh}.
\end{gathered}$$

Tím jsme však už jednoznačně určili bod

$$\varphi_0 = \tfrac{1}{2} \arccos \tfrac{gh}{v_0^2+gh},$$

ve kterém je R největší. Protože

$$\sin 2\varphi_0 = \sqrt{1 - \cos^2 2\varphi_0} = \sqrt{1 - \tfrac{g^2h^2}{\left(v_0^2+gh\right)^2}} = \tfrac{\sqrt{v_0^4+2ghv_0^2}}{v_0^2+gh},$$

je funkční hodnota

$$R(\varphi_0) = h \operatorname{tg} 2\varphi_0 = h \, \frac{\frac{\sqrt{v_0^4+2ghv_0^2}}{v_0^2+gh}}{\frac{gh}{v_0^2+gh}} = \frac{\sqrt{v_0^4+2ghv_0^2}}{g} = \tfrac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Nechť např. oštěpařka Barbora Špotáková udělí oštěpu ve výši $h = 1,8$ m rychlost $v_0 = 27,778$ m/s $\doteq 100$ km/h (při $g = 9,806\,65$ m $\cdot$ s^{-2}). Potom oštěp může doletět do vzdálenosti

$$R(\varphi_0) = \tfrac{27,778}{9,806\,65} \sqrt{27,778^2 + 2 \cdot 9,806\,65 \cdot 1,8} \text{ m} \doteq 80,46 \text{ m}.$$

Této vzdálenosti by bylo dosaženo pro

$$\varphi_0 = \tfrac{1}{2} \arccos \tfrac{9,806\,65 \cdot 1,8}{27,778^2 + 9,806\,65 \cdot 1,8} \doteq 0,774\,2 \text{ rad} \approx 44,36\,^\circ.$$

Světový rekord Barbory Špotákové se ovšem hranici 80 m ani neblíží, přestože další vlivy (kupř. odpor vzduchu) lze zanedbat. Nesmíme však zapomenout, že IAAF (Mezinárodní asociace atletických federací) rozhodla o posunutí těžiště oštěpu směrem ke špičce k 1. dubnu 1 999 (v ženském oštěpu), čímž se zkrátila vzdálenost hodů zhruba o 10 %. Původní rekord (se „správně vyváženým“ typem oštěpu) byl právě 80, 00 m.

Provedené úvahy a získaný výsledek lze uplatnit také v jiných atletických disciplínách a sportech. Při golfu je třeba h blízké 0, a tudíž právě při úhlu

$$\varphi_0 = \lim_{h \to 0+} \tfrac{1}{2} \arccos \tfrac{gh}{v_0^2+gh} = \tfrac{1}{2} \arccos 0 = \tfrac{\pi}{4} \text{ rad} = 45\,^\circ$$

míček dopadne do největší vzdálenosti

$$R(\varphi_0) = \lim_{h \to 0+} \tfrac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \tfrac{v_0^2}{g}.$$

Uvědomme si, že pro $h = 0$ nelze náš výpočet použít ($\varphi_0 = \pi/4$), neboť bychom pro vzdálenost R dostali nedefinovaný výraz $\operatorname{tg}(\pi/2)$.

My jsme však úlohu vyřešili pro libovolné $h > 0$, a proto jsme si mohli pomoci příslušnou jednostrannou limitou. □

5.48. Proč má duha kruhový tvar?

Řešení. V příkladu nazvaném Snellův zákon jsme si objasnili, co je příčinou vzniku duhy. (Duha vzniká rozkladem slunečního světla na vodních kapkách.) Nyní na tento příklad navážeme. Přesněji, detailně se podíváme, co se děje se světlem při jeho průchodu dešťovou kapkou. Viz obrázek. Paprsek dopadající na povrch kapky v bodě A se „rozdvojí". Část světla se odrazí (pod úhlem φ_i od normály) a část se zlomí dovnitř kapky pod vyznačeným úhlem φ_r. Paprsek uvnitř kapky se odrazí od povrchu kapky v bodě B. Protože je $|\,OA\,| = |\,OB\,|$, úhel odrazu je roven φ_r. Samozřejmě během tohoto odrazu se opět část světla lomí ven z kapky. Paprsek odražený uvnitř kapky však dopadá na povrch kapky v bodě C a láme se směrem k pozorovateli pod úhlem φ_i od normály. Doplňme, že zanedbáváme možnost vzniku tzv. sekundární (vedlejší) duhy, kdy se paprsek v kapce odrazí dvakrát (a pochopitelně i vícečetné odrazy).

Vyjádříme si úhel $\alpha := \measuredangle AIC$. Neboť $\measuredangle OAI = \varphi_i$ a $\measuredangle OAB = \varphi_r$, je $\measuredangle BAI = \varphi_i - \varphi_r$. Platí tak

$$\measuredangle BIA = \pi - (\measuredangle ABI) - (\measuredangle BAI) = \pi - (\pi - \varphi_r) - (\varphi_i - \varphi_r) = 2\varphi_r - \varphi_i$$

a dále

$$\alpha = 2 \cdot \measuredangle BIA = 4\varphi_r - 2\varphi_i.$$

Podle Snellova zákonu lomu je

$$\tfrac{\sin\varphi_i}{\sin\varphi_r} = n,$$

kde n označuje index lomu pro vodu (klademe totiž index lomu pro vzduch roven 1). Máme tedy vztah

$$\varphi_r = \arcsin\tfrac{\sin\varphi_i}{n},$$

z něhož již plyne

ves32ju5b
$$\alpha = 4\arcsin\left(\frac{\sin\varphi_i}{n}\right) - 2\varphi_i. \tag{5.11}$$

Pro paprsky vycházející z kapky je hodnota α odlišná. Konkrétní přípustné hodnoty α však nejsou rozloženy rovnoměrně. Je-li R poloměr kapky a y udává vzdálenost bodu A od horizontální roviny procházející středem kapky, platí

ves32ju5bh
$$\sin\varphi_i = \frac{y}{R} \quad \text{pro} \quad y \in [0, R]. \tag{5.12}$$

Samozřejmě můžeme předpokládat (vzhledem k výrazné vzdálenosti Slunce), že množství sluneční energie pro $y \in [a - \delta, a + \delta]$ nezávisí na $a \in [\delta, R - \delta]$, ale závisí pouze na velikosti uvažovaného rozsahu hodnot y pro dostatečně malá $\delta > 0$. Má tak smysl analyzovat funkci (viz (5.11) a (5.12))

$$\alpha(y) = 4 \arcsin \tfrac{y}{nR} - 2 \arcsin \tfrac{y}{R}, \qquad y \in [0, R].$$

Volbou vhodné jednotky délky (pro kterou je $R = 1$) přejdeme k funkci

$$\alpha(x) = 4 \arcsin \tfrac{x}{n} - 2 \arcsin x, \qquad x \in [0, 1].$$

Po výpočtu derivace

$$\alpha'(x) = \frac{4}{n\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (0, 1)$$

snadno určíme, že rovnice $\alpha'(x) = 0$ má jediné řešení

$$x_0 = \sqrt{\tfrac{4-n^2}{3}} \in (0, 1), \quad \text{pokud} \quad n^2 \in (1, 4).$$

Položme $n = 4/3$ (což je přibližně index lomu pro vodu). Dále je

$$\alpha'(x) > 0, \quad x \in (0, x_0), \qquad \alpha'(x) < 0, \quad x \in (x_0, 1).$$

Zjistili jsme, že v bodě

$$x_0 = \sqrt{\frac{4-\left(\frac{4}{3}\right)^2}{3}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{5}{3}} \doteq 0,86$$

má funkce α globální maximum

$$\alpha(x_0) = 4 \arcsin \tfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} - 2 \arcsin \tfrac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} \doteq 0,734 \text{ rad} \approx 42^\circ.$$

Přestože je zajímavé, že vrchol duhy nemůže být nad úrovní přibližně 42° vůči tomu, kdo ji pozoruje; mnohem důležitější jsou vyčíslení

$$\alpha(0,74) \doteq 39,4^\circ, \qquad \alpha(0,94) \doteq 39,2^\circ,$$
$$\alpha(0,8) \doteq 41,2^\circ, \qquad \alpha(0,9) \doteq 41,5^\circ.$$

Ta totiž implikují (funkce α roste na intervalu $[0, x_0]$ a klesá na intervalu $[x_0, 1]$), že více než 20 % hodnot α leží v úzkém pásu zhruba od 39° do 42° a 10 % v pásu o šířce menší než 1°. Pokud navíc uvážíme např.

$$\alpha(0,84) \doteq 41,9^\circ, \qquad \alpha(0,88) \doteq 41,9^\circ,$$

vidíme, že paprsky, pro které je α blízké hodnotě 42°, mají největší intenzitu. Vyzdvihněme, že se jedná o případ tzv. principu minimální odchylky, kdy platí, že k největší koncentraci rozptýleného světla dochází právě u paprsků s minimální odchylkou. Celková úhlová odchylka paprsku se totiž rovná úhlu $\delta = \pi - \alpha$.

Kapky, ze kterých směřují paprsky k pozorovateli vidícímu duhu, tak leží na povrchu kuželu s centrálním úhlem $2\alpha(x_0)$. Nadzemní část tohoto kuželu se pak jeví pozorovateli právě jako kruhový oblouk duhy (viz obrázek). Při západu Slunce by tedy měla duha tvar půlkružnice. Uvažte také, že duha se realizuje vzhledem k pozorovateli – není nikde v prostoru. Na závěr poznamenejme, že onen kruhový tvar duhy podrobně zdokumentoval již René Descartes, který duhu vědecky zkoumal v letech 1635–1637. □

Další praktické úlohy na hledání extrémů funkcí jedné proměnné viz 277

G. Řady

Řady se přirozeně vyskytují v celé řadě (problémů).

5.49. Sierpińského koberec. Jednotkový čtverec se rozdělí na devět shodných čtverců a odstraní se prostřední čtverec. Každý ze zbývajících čtverců se znovu rozdělí na devět shodných čtverců a odstraní se prostřední čtverec. Určete obsah zbylého obrazce po prodloužení tohoto postupu do nekonečna.

Řešení. V prvním kroku se odstraní 1 čtverec o obsahu $1/9$. Ve druhém kroku se odstraní 8 čtverců o obsahu 9^{-2}, tj. o celkovém obsahu $8 \cdot 9^{-2}$. V každé další iteraci se odstraní osminásobek počtu čtverců z předešlého kroku, přičemž obsah každého z nich je devítinou obsahu 1 čtverce z předchozího kroku. Součet obsahů všech odstraněných čtverců je

$$\frac{1}{9} + \frac{8}{9^2} + \frac{8^2}{9^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{9^{n+1}}.$$

Obsah zbylého obrazce (tzv. Sierpińského koberce) tak činí

$$1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{9^{n+1}} = 1 - \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 1 - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{8}{9}} = 0.$$

□

5.50. Kochova vločka, 1904. Vytvořte „sněhovou vločku“ následujícím postupem. Na začátku uvažujte rovnostranný trojúhelník s jednotkovou délkou strany. Každou z jeho stran rozdělte na třetiny a nad prostředními třetinami sestrojte rovnostranné trojúhelníky, kdy základny (prostřední třetiny stran původního trojúhelníku) odstraníte. Takto z původního trojúhelníku dostanete šesticípou hvězdu. Celý postup opakujte tak, že každou úsečku obdrženou v předchozím kroku rozdělíte na třetiny a prostřední třetinu nahradíte za rovnostranný trojúhelník bez základny. Sněhovou vločku pak získáte nekonečným opakováním tohoto postupu. Dokažte, že vzniklý útvar (vločka) má nekonečný obvod. Poté určete jeho obsah.

Řešení. Obvod původního trojúhelníku je roven 3. V každém kroku konstrukce se prodlouží obvod útvaru o třetinu, neboť ze tří částí každé úsečky vzniknou čtyři stejné délky. Odsud vyplývá, že obvod vločky lze vyjádřit jako limitu

$$\lim_{n\to\infty} 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right)^n = +\infty.$$

Útvar se zřejmě během konstrukce zvětšuje. Ke stanovení jeho obsahu nám tudíž stačí zachytit, o kolik se jeho obsah zvětší v jednotlivých krocích. Počet jeho stran se v libovolném kroku stává čtyřnásobným (usečky se rozdělí na třetiny, kdy místo prostřední třetiny máme dvě úsečky), přičemž délka nových stran je třetinová. V následujícím kroku se obsah útvaru zvětší právě o obsahy stejných rovnostranných trojúhelníků, jejichž počet je stejný jako počet úseček v předchozím kroku a jejichž strany mají délku třetin těchto úseček. Když takto přecházíme od rovnostranného trojúhelníku k šesticípé hvězdě při první realizaci uvedeného postupu, obsah se zvětší o 3 rovnostranné trojúhelníky (jejich počet odpovídá počtu stran původního útvaru) s délkou stran $1/3$ (ta je třetinová). Označme obsah původního trojúhelníku jako S_0. Pokud si uvědomíme, že zmenšením strany rovnostranného trojúhelníku na třetinu se jeho obsah zmenší děvětkrát, dostaneme obsah šesticípé hvězdy ve tvaru

$$S_0 + 3 \cdot \tfrac{S_0}{9}.$$

Podobně v dalším kroku obdržíme obsah útvaru jako

$$S_0 + 3 \cdot \tfrac{S_0}{9} + 4 \cdot 3 \cdot \tfrac{S_0}{9^2}.$$

Počet přidávaných trojúhelníků je čtyřnásobný a délky jejich stran třetinové.

Nyní již není obtížné odvodit, že obsah vločky je roven limitě

$$\lim_{n\to\infty} \left(S_0 + 3 \cdot \tfrac{S_0}{9} + 4 \cdot 3 \cdot \tfrac{S_0}{9^2} + \cdots + 4^n \cdot 3 \cdot \tfrac{S_0}{9^{n+1}}\right) =$$
$$S_0 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{4}{9} + \cdots + \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{4}{9}\right)^n\right) =$$
$$S_0 \left[1 + \tfrac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{4}{9} + \cdots + \left(\tfrac{4}{9}\right)^n\right)\right] = S_0 \left[1 + \tfrac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{4}{9}\right)^k\right] =$$
$$S_0 \left[1 + \tfrac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{4}{9}\right)^k\right] = S_0 \left[1 + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{1-\frac{4}{9}}\right] = \tfrac{8}{5}\, S_0.$$

Obsah vločky je tedy 8/5 obsahu původního trojúhelníka, tj.

$$\tfrac{8}{5}\, S_0 = \tfrac{8}{5} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{4} = \tfrac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Zopakujme, že tato vločka je příkladem toho, jak nekonečně dlouhá křivka může ohraničovat konečnou plochu. □

5.51. Sečtěte řadu

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$;

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^{2n-1}} + \frac{2}{4^{2n}}\right)$;

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$;

(e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$.

Řešení. Případ (a). Podle definice je součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right) =$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1.$$

Případ (b). Zjevně se jedná o pětinásobek konvergentní geometrické řady s kvocientem $q = 1/3$, a tudíž je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 5 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{15}{2}.$$

Případ (c). Platí (při substituci $m = n - 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^{2n-1}} + \frac{2}{4^{2n}}\right) = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^{2n-2}}\right) + \frac{2}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^{2n-2}}\right) =$$
$$\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{16}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2m}} = \frac{14}{16} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^m = \frac{14}{16} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{14}{15}.$$

Řadu lineárních kombinací jsme zde vyjádřili jako lineární kombinaci řad (přesněji řečeno, jako součet řad s vytknutím konstant), což je platná úprava, pokud obdržené řady jsou absolutně konvergentní.

Případ (d). Z částečného součtu

$$s_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{n}{3^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

bezprostředně získáváme

$$\frac{s_n}{3} = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Je tedy

$$s_n - \frac{s_n}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Protože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3^{n+1}} = 0$, dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2} \left(s_n - \frac{s_n}{3}\right) = \frac{3}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} =$$
$$\frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1\right) = \frac{3}{4}.$$

Případ (e). Stačí použít vyjádření (jde o tzv. rozklad na parciální zlomky)

$$\frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3n+4}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

které dává

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+4}\right) = \frac{1}{3}.$$

□

5.52. Ověřte, že platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Řešení. Ihned je vidět, že

$$1 \le 1, \quad \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} < 2 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} < 4 \cdot \frac{1}{4^2} = \frac{1}{4},$$

resp. obecný odhad

$$\frac{1}{(2^n)^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^2} < 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^2} = \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odsud (porovnáním členů obou řad) dostáváme zadanou nerovnost, z níž mj. plyne absolutní konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Ještě upřesněme, že je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

$\square$

5.53. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}.$$

Řešení. Pokusme se uvedenou řadu sečíst. Platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n}\right) =$$
$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdots (n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} = \lim_{n\to\infty} \ln (n+1) = +\infty.$$

Řada tudíž diverguje k $+\infty$. $\square$

5.54. Prokažte, že řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n^2+2n+3\sqrt{n}+4}{n+1}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{n^3+n^2-n}$$

nekonvergují.

Řešení. Protože

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{n^2+2n+3\sqrt{n}+4}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{n^2}{n} = \frac{\pi}{2}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+1}{n^3+n^2-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^3} = +\infty,$$

není splněna nutná podmínka konvergence $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ řady $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

$\square$

5.55. Jaký je součet řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}?$$

Řešení. Z nerovností (uvažte graf přirozeného logaritmu)

$$1 \le \ln n \le n, \quad n \ge 3, \ n \in \mathbb{N}$$

plyne

$$\sqrt[n]{1} \le \sqrt[n]{\ln n} \le \sqrt[n]{n}, \quad n \ge 3, \ n \in \mathbb{N}.$$

Podle Věty o třech limitách je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1, \quad \text{tj.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} = 1.$$

Řada tedy není konvergentní. Neboť má nezáporné členy, musí divergovat k $+\infty$. $\square$

5.56. Zjistěte, zda řada

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\ln n}$

konverguje.

Řešení. Všechny tři uvedené řady mají nezáporné členy, a tak mohou v jednotlivých variantách nastat jen dvě možnosti – součet je konečný, součet je roven $+\infty$. Platí

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot 3^n} \le \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} < +\infty$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3} \ge \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\ln n} \ge \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Odtud plyne, že řada (a) konverguje; (b) diverguje k $+\infty$; (c) diverguje k $+\infty$. $\square$

5.57. Aplikací podílového (tzv. d'Alembertova) kritéria (viz **??**) určete, jestli nekonečná řada

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\cdot(n+1)^3}{3^n}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n^2\cdot n!}$

konverguje.

Řešení. Protože ($a_n \ge 0$ pro všechna n)

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot(n+2)^3\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot 2^n\cdot(n+1)^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2(n+2)^3}{3(n+1)^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3}{3n^3} = \frac{2}{3} < 1$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{6^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{6^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6}{n+1} = 0 < 1$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)^2\cdot(n+1)!} \cdot \frac{n^2\cdot n!}{n^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1\cdot \mathrm{e} > 1$,

řada (a) konverguje; (b) konverguje; (c) nekonverguje (diverguje k $+\infty$). $\square$

5.58. Aplikací odmocninového (tzv. Cauchyova) kritéria určete, jestli nekonečná řada

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{n^3\cdot 3^n}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{2n}{2^n}$

konverguje.

Řešení. Opět máme řady s nezápornými členy, přičemž je

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1;$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\sqrt[n]{n^3}\cdot 3} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{3\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)^3} = \frac{e}{3} < 1;$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \arcsin \frac{2n}{2^n} = \arcsin 0 = 0 < 1.$

To znamená, že všechny zadané řady konvergují. □

5.59. Rozhodněte, zda řada

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right);$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n^2}}{n!};$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(6+(-1)^n)^n}$

konverguje.

Řešení. Případ (a). Podle l'Hospitalova pravidla je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{2^x}\right)}{\frac{1}{2^x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{2^x}}\left(1+\frac{1}{2^x}\right)'}{\left(\frac{1}{2^x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2^x}} = 1,$$

a proto platí

$$0 < \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \le \frac{2}{2^n}$$

pro všechna dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$. Ovšem o řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n}$ víme, že je konvergentní. Musí tak být

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < +\infty,$$

tj. řada v zadání konverguje (absolutně).

Případ (b). Podílové kritérium dává

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(n+1)^2}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 2^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 4^n}{n+1} = +\infty.$$

Řada tedy nekonverguje.

Případ (c). Nyní použijeme obecnou verzi odmocninového kritéria

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\, a_n \,|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{3}{6+(-1)^n} = \frac{3}{5} < 1,$$

z níž plyne (absolutní) konvergence řady. □

5.60. Libovolným způsobem dojděte k rozhodnutí o konvergenci alternující řady

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3n-1}{(3n-2)^2};$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n^4-3n^3+9n-1}{(5n^3-2)\cdot 4^n}.$

Řešení. Případ (a). Z toho, že je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-1}{(3n-2)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{9n^2} = \frac{1}{9} \neq 0,$$

ihned vyplývá neexistence limity

$$\lim_{n\to\infty} \left((-1)^n \frac{n^2+3n-1}{(3n-2)^2}\right).$$

Řada tudíž nekonverguje (není splněna nutná podmínka konvergence).

Případ (b). Viděli jsme, že při použití podílového (nebo odmocninového) kritéria polynomy v čitateli ani jmenovateli členů řady neovlivňují hodnotu počítané limity. Uvažujme tedy řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4^n},$$

pro kterou je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{4} < 1.$$

To ovšem znamená, že rovněž původní řada je (absolutně) konvergentní.

□

5.61. Konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3n}}?$$

Řešení. Posloupnost $\left\{2/\sqrt{3n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ je zřejmě klesající a funkce $y = \operatorname{arctg} x$ rostoucí (na celé reálné ose), a tudíž posloupnost $\left\{\operatorname{arctg}\left(2/\sqrt{3n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ je klesající. Je tedy zadána alternující řada splňující, že posloupnost absolutních hodnot jejích členů je klesající. Taková alternující řada konverguje, právě když posloupnost jejích členů konverguje k 0 (tzv. Leibnizovo kritérium), což je ovšem splněno:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3n}} = \operatorname{arctg} 0 = 0,$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} \left((-1)^{n+1} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3n}}\right) = 0.$$

□

5.62. Zjistěte, jestli řada

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\sqrt[3]{n^2}}$

konverguje absolutně, příp. neabsolutně (relativně), nebo nekonverguje.

Řešení. Případ (a). Ukázat, že tato řada konverguje absolutně, je snadné. Např. je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2,$$

přičemž druhou nerovnost jsme dokázali dříve.

Případ (b). Je vidět, že $\cos(\pi n) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Máme tedy alternující řadu, jejíž posloupnost členů v absolutní hodnotě je klesající. Proto z limity

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0$$

již plyne, že řada konverguje. Zároveň však je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(\pi n)}{\sqrt[3]{n^2}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \ge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Řada tak konverguje neabsolutně. □

5.63. Sečtěte řadu

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$;

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3^n}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^{2n-1}}+\frac{2}{4^{2n}}\right)$;

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$;

(e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$.

Řešení. Případ (a). Podle definice je součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right)=$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1.$$

Případ (b). Zjevně se jedná o pětinásobek konvergentní geometrické řady s kvocientem $q=1/3$, a tudíž je

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3^n}=5\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=5\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{15}{2}.$$

Případ (c). Platí (při substituci $m=n-1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^{2n-1}}+\frac{2}{4^{2n}}\right)=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^{2n-2}}\right)+\frac{2}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^{2n-2}}\right)=$$
$$\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{16}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{4^{2m}}=\frac{14}{16}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^m=\frac{14}{16}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{16}}=\frac{14}{15}.$$

Řadu lineárních kombinací jsme zde vyjádřili jako lineární kombinaci řad (přesněji řečeno, jako součet řad s vytknutím konstant), což je platná úprava, pokud obdržené řady jsou absolutně konvergentní.

Případ (d). Z částečného součtu

$$s_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n},\quad n\in\mathbb{N}$$

bezprostředně získáváme

$$\frac{s_n}{3}=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Je tedy

$$s_n-\frac{s_n}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Protože $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3^{n+1}}=0$, dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\left(s_n-\frac{s_n}{3}\right)=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}=$$
$$\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-1\right)=\frac{3}{4}.$$

Případ (e). Stačí použít vyjádření (jde o tzv. rozklad na parciální zlomky)

$$\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n+4},\quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

které dává

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{(3n+1)(3n+4)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{3}\left(1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{10} + \cdots + \tfrac{1}{3n+1} - \tfrac{1}{3n+4}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{3}\left(1 - \tfrac{1}{3n+4}\right) = \tfrac{1}{3}.$$

□

5.64. Ověřte, že platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^2} < \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2^n}.$$

Řešení. Ihned je vidět, že

$$1 \le 1, \quad \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2} < 2 \cdot \tfrac{1}{2^2} = \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{6^2} + \tfrac{1}{7^2} < 4 \cdot \tfrac{1}{4^2} = \tfrac{1}{4},$$

resp. obecný odhad

$$\tfrac{1}{(2^n)^2} + \cdots + \tfrac{1}{(2^{n+1}-1)^2} < 2^n \cdot \tfrac{1}{(2^n)^2} = \tfrac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odsud (porovnáním členů obou řad) dostáváme zadanou nerovnost, z níž mj. plyne absolutní konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Ještě upřesněme, že je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^2} = \tfrac{\pi^2}{6} < 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2^n}.$$

□

5.65. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \tfrac{n+1}{n}.$$

Řešení. Pokusme se uvedenou řadu sečíst. Platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \tfrac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\ln \tfrac{2}{1} + \ln \tfrac{3}{2} + \ln \tfrac{4}{3} + \cdots + \ln \tfrac{n+1}{n}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln \tfrac{2\cdot 3\cdot 4\cdots(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty.$$

Řada tudíž diverguje k $+\infty$. □

5.66. Prokažte, že řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg} \tfrac{n^2+2n+3\sqrt{n}+4}{n+1}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{3^n+1}{n^3+n^2-n}$$

nekonvergují.

Řešení. Protože

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \tfrac{n^2+2n+3\sqrt{n}+4}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \tfrac{n^2}{n} = \tfrac{\pi}{2}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{3^n+1}{n^3+n^2-n} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{3^n}{n^3} = +\infty,$$

není splněna nutná podmínka konvergence $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ řady $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

□

5.67. Jaký je součet řady
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}?$$

Řešení. Z nerovností (uvažte graf přirozeného logaritmu)
$$1 \le \ln n \le n, \quad n \ge 3,\ n \in \mathbb{N}$$
plyne
$$\sqrt[n]{1} \le \sqrt[n]{\ln n} \le \sqrt[n]{n}, \quad n \ge 3,\ n \in \mathbb{N}.$$
Podle Věty o třech limitách (**??**) je
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1, \quad \text{tj.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} = 1.$$
Řada tedy není konvergentní. Neboť má nezáporné členy, musí divergovat k $+\infty$. □

5.68. Zjistěte, zda řada

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\ln n}$

konverguje.

Řešení. Všechny tři uvedené řady mají nezáporné členy, a tak mohou v jednotlivých variantách nastat jen dvě možnosti – součet je konečný, součet je roven $+\infty$. Platí

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot 3^n} \le \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} < +\infty$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3} \ge \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\ln n} \ge \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Odtud plyne, že řada (a) konverguje; (b) diverguje k $+\infty$; (c) diverguje k $+\infty$. □

5.69. Aplikací podílového (tzv. d'Alembertova) kritéria určete, jestli nekonečná řada

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\cdot(n+1)^3}{3^n}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n^2\cdot n!}$

konverguje.

Řešení. Protože ($a_n \ge 0$ pro všechna n)

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot(n+2)^3\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot 2^n\cdot(n+1)^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2(n+2)^3}{3(n+1)^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3}{3n^3} = \frac{2}{3} < 1$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{6^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{6^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6}{n+1} = 0 < 1$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)^2\cdot(n+1)!} \cdot \frac{n^2\cdot n!}{n^n} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 \cdot \mathrm{e} > 1,$

řada (a) konverguje; (b) konverguje; (c) nekonverguje (diverguje k $+\infty$).

□

5.70. Aplikací odmocninového (tzv. Cauchyova) kritéria určete, jestli nekonečná řada

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{n^3\cdot 3^n}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{2n}{2^n}$

konverguje.

Řešení. Opět máme řady s nezápornými členy, přičemž je

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1;$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\sqrt[n]{n^3}\cdot 3} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{3\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)^3} = \frac{\mathrm{e}}{3} < 1;$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \arcsin \frac{2n}{2^n} = \arcsin 0 = 0 < 1.$

To znamená, že všechny zadané řady konvergují. □

5.71. Rozhodněte, zda řada

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n^2}}{n!}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(6+(-1)^n)^n}$

konverguje.

Řešení. Případ (a). Podle l'Hospitalova pravidla je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{2^x}\right)}{\frac{1}{2^x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{2^x}}\left(1+\frac{1}{2^x}\right)'}{\left(\frac{1}{2^x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2^x}} = 1,$$

a proto platí

$$0 < \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \le \frac{2}{2^n}$$

pro všechna dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$. Ovšem o řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n}$ víme, že je konvergentní. Musí tak být

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < +\infty,$$

tj. řada v zadání konverguje (absolutně).

Případ (b). Podílové kritérium dává

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(n+1)^2}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 2^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 4^n}{n+1} = +\infty.$$

Řada tedy nekonverguje.

Případ (c). Nyní použijeme obecnou verzi odmocninového kritéria

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\, a_n \,|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{3}{6+(-1)^n} = \frac{3}{5} < 1,$$

z níž plyne (absolutní) konvergence řady. □

5.72. Libovolným způsobem dojděte k rozhodnutí o konvergenci alternující řady

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \,\frac{n^2+3n-1}{(3n-2)^2}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \,\frac{3n^4-3n^3+9n-1}{(5n^3-2)\cdot 4^n}$.

Řešení. Případ (a). Z toho, že je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-1}{(3n-2)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{9n^2} = \frac{1}{9} \neq 0,$$

ihned vyplývá neexistence limity

$$\lim_{n\to\infty} \left((-1)^n \,\frac{n^2+3n-1}{(3n-2)^2} \right).$$

Řada tudíž nekonverguje (není splněna nutná podmínka konvergence).

Případ (b). Viděli jsme, že při použití podílového (nebo odmocninového) kritéria polynomy v čitateli ani jmenovateli členů řady neovlivňují hodnotu počítané limity. Uvažujme tedy řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \,\frac{1}{4^n},$$

pro kterou je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{4} < 1.$$

To ovšem znamená, že rovněž původní řada je (absolutně) konvergentní.

□

5.73. Konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3n}}?$$

Řešení. Posloupnost $\left\{2/\sqrt{3n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ je zřejmě klesající a funkce $y = \operatorname{arctg} x$ rostoucí (na celé reálné ose), a tudíž posloupnost $\left\{\operatorname{arctg}\left(2/\sqrt{3n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ je klesající. Je tedy zadána alternující řada splňující, že posloupnost absolutních hodnot jejích členů je klesající. Taková alternující řada konverguje, právě když posloupnost jejích členů konverguje k 0 (tzv. Leibnizovo kritérium), což je ovšem splněno:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3n}} = \operatorname{arctg} 0 = 0,$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} \left((-1)^{n+1} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3n}} \right) = 0.$$

□

5.74. Zjistěte, jestli řada

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\sqrt[3]{n^2}}$

konverguje absolutně, příp. neabsolutně (relativně), nebo nekonverguje.

Řešení. Případ (a). Ukázat, že tato řada konverguje absolutně, je snadné. Např. je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2,$$

přičemž druhou nerovnost jsme dokázali dříve.

Případ (b). Je vidět, že $\cos(\pi n) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Máme tedy alternující řadu, jejíž posloupnost členů v absolutní hodnotě je klesající. Proto z limity

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0$$

již plyne, že řada konverguje. Zároveň však je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(\pi n)}{\sqrt[3]{n^2}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Řada tak konverguje neabsolutně. □

5.75. Ukažte, že tzv. *harmonická řada*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$$

diverguje.

Řešení. Pro libovolné přirozené k je součet prvních 2^k členů řady větší než $k/2$:

$$\underbrace{1+\frac{1}{2}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \dots,$$

součet členů od 2^l+1 do 2^{l+1} je totiž vždy větší než 2^l-krát (jejich počet) číslo $1/2^l$ (nejmenší z nich), což je dohromady $1/2$. □

p5.26

5.76. Rozhodněte o následujících řadách, jestli konvergují či divergují:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^{100000}}$

iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}$

Řešení.

i) Budeme zkoumat konvergenci podílovým kritériem:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{n} = 2 > 1,$$

řada tedy diverguje.

ii) Odhadneme řadu ze spodu: víme, že pro libovolné přirozené n platí $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Pro posloupnost částečných součtů s_n zkoumané řady a posloupnost částečných součtů harmonické řady s_n' tedy platí:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = s_n'.$$

A protože harmonická řada diverguje (viz předchozí příklad), diverguje i její posloupnost částečných součtů $\{s_n'\}_{n=1}^{\infty}$, tedy diverguje i posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, tedy diverguje i zadaná posloupnost.

iii) Diverguje, jedná se o násobek harmonické řady.

iv) Jedná se o geometrickou řadu s koeficientem $\frac{1}{1+i}$, ta bude konvergovat, bude-li absolutní hodnota koeficientu menší než 1. Víme, že

$$|\frac{1}{1+i}| = |\frac{1-i}{2}| = |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1,$$

řada tedy konverguje a umíme ji dokonce sečíst:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+i}} = \frac{1+i}{i} = 1 - i.$$

□

Další příklady k číselným řadám naleznete na straně 285

H. Mocninné řady

V předchozí podkapitole jsme zkoumali, jestli lze přiřadit smysl součtu nekonečně mnoha čísel. Nyní se budeme zajímat o to, jaký může mít význam součet nekonečně mnoha funkcí. Pokud se omezíme

5.77. Určete poloměr konvergence následujících mocninných řad:

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$

ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} x^n$

Řešení.

i)

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{2},$$

viz úloha **??**. Daná mocniná řada tedy konverguje pro reálná $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, případně pro komplexní $|x| < \frac{1}{2}$. Všimněme si, že řada je divergentní pro $x = \frac{1}{2}$ (jde o harmonickou řadu) a naopak konverguje pro $x = -\frac{1}{2}$ (alternující harmonická řada). Rozhodnout o konvergenci pro libovoné x ležící v komplexní rovině na kružnici o poloměru $\frac{1}{2}$ je těžší otázka a přesahuje rámec našeho kurzu.

ii) Opět díky přechozímu příkladu víme, že

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{\frac{1}{(1+i)^n}}\right| = \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1+i}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

je tedy poloměr konvergence dané mocninné řady $r = \sqrt{2}$.

□

5.78. Určete poloměr konvergence r mocninné řady

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 8^n}\, x^n$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-4n)^n\, x^n$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$;

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(2+(-1)^n)^n}\, x^n$.

Řešení. Platí

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,a_n\,|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\cdot 8} = \frac{1}{8}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,a_n\,|} = \lim\limits_{n\to\infty} 4n = +\infty$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,a_n\,|} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$;

(d) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,a_n\,|} = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^5}}{2+(-1)^n} = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n}\,)^5}{2+(-1)^n} = 1$.

Proto je poloměr konvergence (a) $r = 8$, (b) $r = 0$, (c) $r = 1/\mathrm{e}$, (d) $r = 1$. □

5.79. Stanovte poloměr konvergence r mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{in}\, \frac{\sqrt[3]{n^3+n}\cdot 3^n}{\sqrt[3]{n^4+2n^3+1}\cdot\pi^n}\,(x-2)^n.$$

Řešení. Poloměr konvergence libovolné mocninné řady se nezmění, pokud posuneme její střed nebo nahradíme koeficienty členů tak, že se nezmění jejich absolutní hodnota. Určeme tedy poloměr konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n}\cdot 3^n}{\sqrt[3]{n^4+2n^3+1}\cdot\pi^n}\, x^n.$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^a} = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^a = 1 \quad \text{pro } a > 0,$$

můžeme dále přejít k řadě

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\pi^n}\, x^n$$

se stejným poloměrem konvergence $r = \pi/3$. □

5.80. Nalezněte přibližnou hodnotu čísla $\sin 1°$ s chybou ostře menší než 10^{-10}.

Řešení. Víme, že je

$$\sin x = x - \tfrac{1}{3!}\,x^3 + \tfrac{1}{5!}\,x^5 - \tfrac{1}{7!}\,x^7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li $x = \pi/180$, pak částečné součty řady vpravo budou aproximacemi $\sin 1°$. Zbývá určit počet členů, které je třeba sečíst, aby chyba byla prokazatelně menší než 10^{-10}. Číselná řada

$$\tfrac{\pi}{180} - \tfrac{1}{3!}\left(\tfrac{\pi}{180}\right)^3 + \tfrac{1}{5!}\left(\tfrac{\pi}{180}\right)^5 - \tfrac{1}{7!}\left(\tfrac{\pi}{180}\right)^7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\tfrac{\pi}{180}\right)^{2n+1}$$

je alternující s vlastností, že posloupnost absolutních hodnot jejích členů je klesající. Pokud libovolnou takovou konvergentní řadu nahradíme jejím částečným součtem, chyba, jíž se tím dopustíme, bude menší než absolutní hodnota prvního členu uvažované řady nezahrnutého do částečného součtu. (Důkaz tohoto tvrzení uvádět nebudeme.) Chyba aproximace

$$\sin 1° \approx \tfrac{\pi}{180} - \tfrac{\pi^3}{180^3 \cdot 3!}$$

je tak menší než

$$\tfrac{\pi^5}{180^5 \cdot 5!} < 10^{-10}.$$

□

5.81. Sečtěte:

$$2 + 1 + \frac{2}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{2}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{2}{6!} + \cdots$$

Řešení. Porovnáme-li tvar součtu s rozvojem funkcí sinh a cosh do mocninných řad, dostáváme výsledek

$$\sinh(1) + 2\cosh(1).$$

□

Polynomy

I. Doplňující příklady k celé kapitole

5.82. Určete polynom $P(x)$ co nejmenšího stupně splňující podmínky $P(1) = 1$, $P(2) = 28$, $P(0) = 2$, $P'(0) = 1$, $P'(1) = 9$.

5.83. Určete polynom $P(x)$ co nejmenšího stupně splňující podmínky $P(0) = 0$, $P(1) = 4$, $P(-1) = -2$, $P'(0) = 1$, $P'(1) = 7$.

5.84. Určete polynom $P(x)$ co nejmenšího stupně splňující podmínky $P(0) = -1$, $P(1) = -1$, $P'(-1) = 10$, $P'(0) = -1$, $P'(1) = 6$.

Topologie

5.85. Určete suprema a infima množin

$$A = (-3, 0] \cup (1, \pi) \cup \{6\}; \quad B = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2};\ n \in \mathbb{N} \right\}; \quad C = (-9, 9) \cap \mathbb{Q}$$

v $\mathbb{R}$.

5.86. Nalezněte sup A a inf A pro

$$A = \left\{ \frac{n + (-1)^n}{n};\ n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

5.87. Je-li

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}, \quad \mathcal{M} = \left\{ -\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \mathcal{J} = (0, 2] \cup [3, 5] \setminus \{4\},$$

stanovte $\inf \mathbb{N}$, $\sup \mathcal{M}$, $\inf \mathcal{J}$ a $\sup \mathcal{J}$ v $\mathbb{R}$.

5.88. Napište příklad množiny $M \subset \mathbb{R}$, která nemá v $\mathbb{R}$ infimum, ale má zde supremum; a udejte příklad množiny $N \subset \mathbb{R}$, která nemá v $\mathbb{R}$ supremum, ale má zde infimum.

5.89. Uveďte podmnožinu X množiny $\mathbb{R}$, pro kterou je $\sup X \le \inf X$.

5.90. Udejte příklad množin $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ takových, aby platilo

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad B \cap C = \emptyset, \quad \sup A = \inf B = \inf C = \sup C.$$

Limity

5.91. Vypočtěte limity

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \sin x}; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Řešení. Využijeme faktu, že

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Snadno získáváme

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \sin x} &= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 - \cos^2 x\right) + \sin^2 x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} 2 \frac{\sin x}{x} = 2; \end{aligned}$$

resp.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2\,(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2\,(1+\cos x)}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

Dodejme, že jsme také mohli hned použít vyjádření

$$1-\cos(2x)=2\sin^2 x,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

□

5.92. Z definice limity dokažte, že je

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3-2\right)=-2.$$

5.93. Z definice limity určete

$$\lim_{x\to -1}\frac{(1+x)^2-3}{2},$$

tj. mj. napište $\delta(\varepsilon)$-předpis jako v minulém příkladu.

5.94. Ukažte z definice limity, že

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{3\,(x-2)^4}{2}=+\infty.$$

5.95. Stanovte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-2}{n^2}+\frac{n-1}{n^2}\right).$$

5.96. Vypočítejte

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3-11n^2+2}+\sqrt[5]{n^7-2n^5-n^3}-n+\sin^2 n}{2-\sqrt[3]{5n^4+2n^3+5}}.$$

5.97. Určete limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!+(n-2)!-(n-4)!}{n^{50}+n!-(n-1)!}.$$

5.98. Udejte příklad posloupností majících nevlastní limity se členy x_n, y_n, $n\in\mathbb{N}$, pro které je

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\left(x_n\,y_n^2\right)=+\infty.$$

5.99. Napište všechny hromadné body posloupnosti dané členy

$$a_n=\frac{(-1)^n\,2n}{\sqrt{4n^2+5n+3}},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

5.100. Spočtěte

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \quad \text{a} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n,$$

je-li

$$a_n = \frac{n^2+4n-5}{n^2+9}\,\sin^2\frac{n\pi}{4}, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

5.101. Určete

$$\liminf_{n\to\infty}\left((-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

5.102. Určete obě jednostranné limity

$$\lim_{x\to 0+}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, \qquad \lim_{x\to 0-}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$$

Na základě výsledku rozhodněte o existenci limity

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$$

5.103. Existuje některá z limit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{5x^4+1}{x}?$$

5.104. Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}.$$

5.105. Určete

$$\lim_{x\to\pi/6}\frac{2\sin^3 x+7\sin^2 x+2\sin x-3}{2\sin^3 x+3\sin^2 x-8\sin x+3}.$$

5.106. Pro libovolné $m, n\in\mathbb{N}$ určete

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}.$$

5.107. Určete

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right).$$

5.108. Stanovte

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1+x^2}-x^2\right).$$

5.109. Vypočítejte

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}.$$

5.110. Určete
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{\sqrt{x+1}-1}.$$

5.111. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1-\operatorname{tg}x}}{\sin x}.$$

5.112. Stanovte
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2^x+\sqrt{1+x^2-x^9}-7x^5+44x^2}{3^x+\sqrt[5]{6x^6+x^2}-18x^5-592x^4}.$$

5.113. Nechť $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$. Je pravda, že $\lim_{x\to-\infty}(f(x)\cdot g(x))=0$ pro každou rostoucí funkci $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$?

5.114. V jakých bodech $x\in\mathbb{R}$ je funkce
$$y=\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\left|\,12x^{21}+11\,\right|\cdot\frac{\mathrm{e}^{\cos(x+2)-x^3}}{-11-x^{12}}\right)\right)+\sin(\sin(\sin(\sin x)))$$
s maximálním definičním oborem spojitá?

5.115. Rozhodněte, zda je funkce
$$f(x)=\begin{cases} x, & x<0;\\ 0, & 0\le x<1;\\ x, & x=1;\\ 0, & 1<x<2;\\ x, & 2\le x\le 3;\\ \frac{1}{x-3}, & x>3\end{cases}$$
spojitá; spojitá zleva; spojitá zprava v bodech $-\pi, 0, 1, 2, 3, \pi$.

5.116. Dodefinujte funkci
$$f(x)=\operatorname{arctg}\left(1+\frac{5}{x^2}\right)\cdot\sin^2 x^5,\qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$
pro $x=0$ tak, aby byla v tomto bodě spojitá.

5.117. Uveďte $p\in\mathbb{R}$, pro které je funkce
$$f(x)=\frac{\sin(6x)}{3x},\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\};\qquad f(0)=p$$
spojitá v počátku.

5.118. Zvolte reálnou hodnotu a tak, aby funkce
$$h(x)=\frac{x^4-1}{x-1},\quad x>1;\qquad h(x)=a,\quad x\le 1$$
byla spojitá v $\mathbb{R}$.

5.119. Libovolným způsobem ověřte, že je
$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1.$$

5.120. Vypočtěte

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin^8 x}{x^3};\qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{\sin^8 x}{x^3}.$$

5.121. Určete limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+5}\right)^{2n-1}.$$

5.122. Spočítejte

$$\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x - x}{x^3}.$$

Derivace

5.123. Nechť je pohyb tělesa (dráha hmotného bodu) popsán(a) funkcí

$$s(t) = -(t-3)^2 + 16,\qquad t\in[0,7]$$

v jednotkách m, s. Stanovte

(a) počáteční (tj. v čase $t = 0\,\mathrm{s}$) rychlost tělesa;

(b) čas a polohu, ve kterých má těleso nulovou rychlost;

(c) rychlost a zrychlení tělesa v čase $t = 4\,\mathrm{s}$.

L'Hospital

Doplňme, že rychlost je derivace dráhy a zrychlení je derivace rychlosti.

5.124. Určete limitu

$$\lim_{x\to 1-}\left((1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right).$$

5.125. Stanovte

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x\right).$$

5.126. Pomocí l'Hospitalova pravidla určete

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(3^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}}\right)x\right).$$

5.127. Vypočtěte

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2\ln x}-\frac{1}{x^2-1}\right).$$

5.128. Užitím l'Hospitalova pravidla spočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{2}{x}\right)^{x^2}.$$

5.129. Doplňte

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{\sin x} = \dots$$

5.130. Určete následující dvě limity

$$\lim_{x\to 0+} x^{\frac{\alpha}{\ln x}}, \qquad \lim_{x\to +\infty} x^{\frac{\alpha}{\ln x}},$$

Extremy

přičemž $\alpha \in \mathbb{R}$ je libovolné.

5.131. V čase $t = 0$ vyjelo auto z bodu $A = [5, 0]$ rychlostí 4 jednotky za sekundu směrem $(-1, 0)$. Ve stejném čase vyjelo druhé auto z bodu $B = [-2, -1]$ rychlostí 2 jednotky za sekundu směrem $(0, 1)$. Kdy si budou auta nejblíže a jaká bude tato vzdálenost?

Řešení. $t = 1,5s$, vzdálenost $\sqrt{5}$ jednotek. □

5.132. Vrtulník dálniční hlídky letí 3 km nad rovnou silnicí rychlostí 120 km/h. Pilot zaměří radarem auto jedoucí proti směru letu vrtulníku a naměří, že auto se při vzdušné vzdálenosti 5 km od vrtulníku k němu přibližuje rychlostí 160 km/h. Spočítejte rychlost auta (vůči předmětu pohozenému na vozovce).

Řešení. Pro jednoduchost budeme v celém příkladu vynechávat fyzikální jednotky, a to kilometry pro dráhu a hodiny pro čas (rychlost tedy bude v km/h). Pozici vrtulníku v čase t vyjádřeme bodem $[y(t), 3]$ a auta potom bodem $[x(t), 0]$; tj. 1 jednotka na osách odpovídá 1 km a současně osy volíme tak, aby „auto jelo po ose x“. Jako $s(t)$ označme vzdušnou vzdálenost vrtulníku od auta a jako t_0 ten časový okamžik, ze kterého jsou údaje v zadání. Spočtěme rychlost auta vzhledem k předmětu umístěnému do počátku soustavy souřadnic. Můžeme předpokládat, že $x(t) > y(t) > 0$. Za tohoto předpokladu je $x'(t) \le 0$, $y'(t) \ge 0$ pro uvažovaná t. Auto se totiž blíží k bodu $[0, 0]$ zprava – hodnota $x(t)$ se zmenšuje pro zvětšující se t, a tudíž $x'(t) \le 0$. Podobně dostáváme $y'(t) \ge 0$ a také $s'(t) \le 0$. Ještě dodejme, že např. $y'(t)$ udává, jak rychle se mění funkce y v čase t, tedy rychlost vrtulníku.

Víme, že je

$$s(t_0) = 5, \quad s'(t_0) = -160, \quad y'(t_0) = 120$$

a že platí ($s(t)$ je přepona pravoúhlého trojúhelníku)

ves7863k

$$(x(t) - y(t))^2 + 3^2 = s^2(t). \tag{5.13}$$

Odtud plyne ($x(t) > y(t) > 0$)

$$(x(t_0) - y(t_0))^2 + 3^2 = 5^2, \quad \text{tj.} \quad x(t_0) - y(t_0) = 4.$$

Derivováním identity (6.1) získáváme

$$2(x(t) - y(t))\left(x'(t) - y'(t)\right) = 2s(t)s'(t)$$

a následně pro $t = t_0$

$$2 \cdot 4\left(x'(t_0) - 120\right) = 2 \cdot 5 \cdot (-160), \quad \text{tj.} \quad x'(t_0) = -80.$$

Vypočítali jsme, že auto se blíží k předmětu na vozovce rychlostí 80 km/h. Stačí si uvědomit, s jakými jednotkami jsme pracovali. To, že jsme jako výsledek obdrželi zápornou hodnotu, je pak zapříčiněno naší volbou souřadnicového umístění. □

5.133. Rozlehlý vojenský prostor (nadále zkráceno na VP) s půdorysem čtverce o rozloze 100 km^2 je kolem dokola ohraničený úzkou cestou. Z výchozího místa v jednom rohu VP se lze dostat do cílového místa uvnitř VP tak, že se jde 5 km po cestě a poté 2 km kolmo k ní. Ovšem můžete jít libovolnou dobu po cestě rychlostí 5 km za hodinu a potom šikmo přes VP rychlostí 3 km za hodinu. Kolik (kilo)metrů musíte jít po cestě, abyste došli na místo určení co nejdříve?

Řešení. K tomu, abychom po cestě ušli x km, přičemž $x \in [0,5]$, potřebujeme $x/5$ hodin. Naše cesta přes VP pak bude měřit

$$\sqrt{2^2 + (5-x)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 29}$$

kilometrů a ujdeme ji za $\sqrt{x^2 - 10x + 29}/3$ hodin. Celkem bude naše cesta trvat

$$f(x) = \tfrac{1}{5}x + \tfrac{1}{3}\sqrt{x^2 - 10x + 29}$$

hodin (připomeňme, že $x \in [0,5]$). Jediný nulový bod funkce

$$f'(x) = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3}\,\tfrac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+29}}$$

je $x = 7/2$. Protože derivace f' existuje v každém bodě intervalu $[0,5]$ a protože

$$f\left(\tfrac{7}{2}\right) = \tfrac{23}{15} < f(5) = \tfrac{5}{3} < f(0) = \tfrac{\sqrt{29}}{3},$$

funkce f má v bodě $x = 7/2$ absolutní minimum. Po cestě bychom tudíž měli jít 3, 5 km. □

5.134. L'Hospitalova kladka. Ke stropu je v bobě A uvázáno lano délky r. Na jeho druhém konci je připevněna kladka. Ve vzdálenosti d (v bodě B) od bodu A je ke stropu přivázáno druhé lano délky $l > \sqrt{d^2 + r^2}$, které prochází kladkou. Na tomto druhém laně je zavěšeno závaží. V jaké pozici se závaží ustálí (systém přejde do stacionární polohy)? Při řešení úlohy zanedbejte hmotnost i velikost lan a kladky. Viz obrázek.

Řešení. Systém bude ve stacionární poloze, pokud bude minimalizována jeho potenciální energie, tj. vzdálenost závaží od stropu $f(x)$ bude maximální. To však znamená, že pro $r \geq d$ se kladka pouze přesune pod bod B. Nadále proto budeme předpokládat, že $r < d$. Podle Pythagorovy věty je vzdálenost kladky od stropu $\sqrt{r^2 - x^2}$ a vzdálenost kladky a závaží je $l - \sqrt{(d-x)^2 + r^2 - x^2}$, což dává

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + l - \sqrt{(d-x)^2 + r^2 - x^2}.$$

Poloha systému je zcela popsána hodnotou $x \in [0,r]$ (viz obrázek), a tudíž stačí najít globální maximum funkce f na intervalu $[0,r]$.

Nejprve spočítáme derivaci

$$f'(x) = \tfrac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}} - \tfrac{-(d-x)-x}{\sqrt{(d-x)^2+r^2-x^2}} = \tfrac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}} + \tfrac{d}{\sqrt{(d-x)^2+r^2-x^2}}, \qquad x \in (0,r).$$

Umocnění rovnice $f'(x) = 0$ pro $x \in (0,r)$ vede na

$$\tfrac{x^2}{r^2-x^2} = \tfrac{d^2}{(d-x)^2+r^2-x^2}.$$

Vynásobením obou stran výrazem $\left(r^2 - x^2\right)\left((d-x)^2 + r^2 - x^2\right)$ pak (po úpravě) dostaneme

$$2dx^3 - \left(2d^2 + r^2\right)x^2 + d^2r^2 = 0, \qquad x \in (0,r).$$

Všimneme-li si, že jedním z kořenů polynomu na levé straně je zřejmě $x = d$, snadno převedeme poslední rovnici do tvaru

$$(x-d)\left(2dx^2 - r^2x - dr^2\right) = 0, \qquad x \in (0,r),$$

resp. (pro kvadratickou rovnici máme vzorec)

$$2d\,(x-d)\left(x - \tfrac{r^2+r\sqrt{r^2+8d^2}}{4d}\right)\left(x - \tfrac{r^2-r\sqrt{r^2+8d^2}}{4d}\right) = 0, \qquad x \in (0,r).$$

Odsud vidíme, že rovnice $f'(x) = 0$ má v intervalu $(0,r)$ nejvýše jedno řešení. (Neboť je $r < d$ a $\sqrt{r^2 + 8d^2} > r$, dva kořeny uvažovaného polynomu v proměnné x určitě v intervalu $(0,r)$ neleží.) Zbývá rozhodnout, zda

$$x_0 = \tfrac{r^2+r\sqrt{r^2+8d^2}}{4d} = \tfrac{1}{4}\,r\left[\tfrac{r}{d} + \sqrt{\left(\tfrac{r}{d}\right)^2 + 8}\right] \in (0,r).$$

Když však uvážíme, že $r, d > 0$ a $r < d$, snadno získáme

$$0 < x_0 < \tfrac{1}{4}\, r \left[1 + \sqrt{1^2 + 8} \right] = r.$$

Vzhledem ke spojistosti funkce f' na intervalu $(0, r)$ může dojít ke změně jejího znaménka pouze v bodě x_0. Z limit

$$\lim_{x \to 0+} f'(x) = \tfrac{d}{\sqrt{d^2 + r^2}}, \qquad \lim_{x \to r-} f'(x) = -\infty$$

tak již vyplývá, že

$$f'(x) > 0, \quad x \in (0, x_0), \qquad f'(x) < 0, \quad x \in (x_0, r).$$

Funkce f má proto globální maximum na intervalu $[0, r]$ v bodě x_0. □

5.135. Nejmenovaná poštovní společnost má ve svých podmínkách uvedeno, že délka jí přepravovaného balíku nesmí být větší než 108 palců a že součet jeho délky a maximálního obvodu nesmí přesáhnout hodnotu 165 palců. Nalezněte balík největšího objemu, který podle svých podmínek společnost může doručit.

Řešení. Nechť M označuje hodnotu 165 in (tj. palců) a x délku balíku (v palcích). Hledaný balík bude mít zřejmě takový tvar, že jeho průřez pro libovolné $t \in (0, x)$ bude mít stejný (ten maximální) obvod, který (rovněž vyjádřen v palcích) budeme značit jako o. Chceme, aby balík měl maximální objem, a tudíž aby průřez daného obvodu měl maximální obsah. Není obtížné si uvědomit, že rovinný útvar, který má při daném obvodu maximální obsah, je kruh. Tím jsme dospěli k závěru, že hledaný balík největšího objemu má tvar válce o výšce x a poloměru podstavy $r = o/2\pi$.

Jeho objem je

$$V = \pi r^2 x = \tfrac{o^2\, x}{4\pi},$$

přičemž musí být $o + x \le M$ a také $x \le 108$ in. Uvažujme proto balík, pro který je právě $o + x = M$. Ten má objem

$$V(x) = \tfrac{(M-x)^2\, x}{4\pi} = \tfrac{x^3 - 2Mx^2 + M^2 x}{4\pi}, \quad \text{kde} \quad x \in (0, 108]\,.$$

Spočítáme-li derivaci

$$V'(x) = \tfrac{3x^2 - 4Mx + M^2}{4\pi} = \tfrac{3(x-M)\left(x - \frac{M}{3}\right)}{4\pi}, \qquad x \in (0, 108)\,,$$

snadno zjistíme, že funkce V roste na intervalu $(0, 55] = (0, M/3]$ a klesá na intervalu $[55, 108] = [M/3, \min\{108, M\}]$. Největší objem tak dostáváme pro $x = M/3$, přičemž

$$V\left(\tfrac{M}{3}\right) = \tfrac{M^3}{27\pi} \doteq 0,011\,789\, M^3 \approx 0,867\,8 \text{ m}^3.$$

Pokud by společnost v přepravních podmínkách požadovala, aby měl balík tvar kvádru, příp. jistého hranolu, můžeme předchozí úvahy zopakovat pro daný průřez o obsahu S, aniž bychom specifikovali, jak tento průřez vypadá. Stačí si uvědomit, že nutně $S = ko^2$ pro jisté $k > 0$, které je právě určeno tvarem průřezu. (Když se pouze změní velikost mnohoúhelníku, jenž je průřezem, tak se změní ve stejném poměru také jeho obvod. Obsah se však např. zdevítinásobí při trojnásobné velikosti – trojnásobném obvodu.) Objem balíku je tedy funkcí

$$V(x) = Sx = ko^2 x = k\,(M - x)^2\, x, \qquad x \in (0, 108]\,.$$

Konstanta k neovlivňuje bod, kde je globální maximum funkce V, a proto toto maximum nastává opět pro $x = M/3$. Např. pro nejobjemnější kvádr s podstavou čtverce je $o = M - x = 2M/3$, tj. délka strany jeho podstavy je $a = M/6$ a objem potom

$$V = a^2 x = \tfrac{M^3}{6^2 \cdot 3} \doteq 0,009\,259\, M^3 \approx 0,681\,6 \text{ m}^3.$$

Pro balík ve tvaru koule, kdy je x průměrem, podmínku $o + x \leq M$ můžeme ihned přepsat do tvaru $\pi x + x \leq M$, tj. $x \leq M/(\pi + 1) < 108$ in. Pro $x = M/(\pi + 1)$ tak získáváme maximální objem

$$V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{\pi M^3}{6(\pi+1)^3} \doteq 0,007\,370\, M^3 \approx 0,542\,6 \text{ m}^3.$$

Podobně pro balík ve tvaru krychle, kdy x udává délku hrany, podmínka $o + x \leq M$ znamená, že $x \leq M/5 < 108$ in. Takže pro $x = M/5$ dostáváme maximální objem

$$V = x^3 = \left(\frac{M}{5}\right)^3 = 0,008\, M^3 \approx 0,588\,9 \text{ m}^3.$$

Ještě doplňme, že krychle, která má stejný objem jako nalezený válec, má délku hrany

$$a = \frac{M}{3\sqrt[3]{\pi}} \doteq 0,227\,595\, M \approx 0,953\,849 \text{ m}.$$

Uvědomme si, že pro ni je součet její délky a obvodu roven $5a \doteq 1,138\, M$, tj. o bezmála 14 % překračuje hodnotu stanovenou společností. □

5.136. Jste ve člunu na jezeře ve vzdálenosti d km od pobřeží. Chcete se dostat co nejrychleji do určeného místa na pobřeží ve vzdušné vzdálenosti $\sqrt{d^2 + l^2}$ km od Vás (viz obrázek). Jak si budete počínat, pokud dokážete veslovat rychlostí v_1 km/h a po břehu běžet rychlostí v_2 km/h? Jak dlouho Vám bude cesta trvat?

Řešení. Optimální strategie je zřejmě dána tím, že dorazíte ke břehu v jistém bodě $[0, x]$ pro $x \in [0, l]$ a poté budete běžet podél břehu do cílového místa $[0, l]$ (viz obrázek), kdy je tedy trajektorie složena ze dvou úseček (příp. z jedné pro $x = l$). Doplout ke břehu v bodě $[0, x]$ Vám bude trvat

$$\frac{\sqrt{d^2+x^2}}{v_1} \text{ hodin}$$

a běh po pobřeží pak

$$\frac{l-x}{v_2} \text{ hodin.}$$

Jde o to, aby celkový čas byl minimální, tj. je potřeba minimalizovat funkci

$$t(x) = \frac{\sqrt{d^2+x^2}}{v_1} + \frac{l-x}{v_2}$$

na intervalu $[0, l]$. Navíc lze předpokládat, že $v_1 < v_2$. (Pro $v_1 \geq v_2$ je nepochybně nejrychlejší veslovat přímo k cílovému místu, čemuž odpovídá $x = l$.)

Nejprve vypočítáme první derivaci

$$t'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{d^2+x^2}} - \frac{1}{v_2}, \qquad x \in (0, l)$$

a poté druhou

$$t''(x) = \frac{d^2}{v_1\sqrt{\left(d^2+x^2\right)^3}}, \qquad x \in (0, l).$$

Dále vyřešíme rovnici

$$t'(x) = 0, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{x}{\sqrt{d^2+x^2}} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Jejím umocněním obdržíme

$$x^2 = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 \left(d^2 + x^2\right).$$

Jednoduchá úprava tak již dává

$$x^2 = \frac{\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 d^2}{1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}, \qquad \text{tj.} \qquad x = \frac{\frac{v_1}{v_2}\, d}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}}.$$

Uvědomme si, že uvažujeme pouze $x \in (0, l)$. Zajímá nás proto, zda je

$$\frac{\frac{v_1}{v_2}\, d}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}} < l.$$

Tuto nerovnici můžeme umocnit a upravovat podobně jako rovnici $t'(x) = 0$ se ziskem

vesfrdq3 (5.14)
$$\frac{v_1}{v_2} < \frac{l}{\sqrt{l^2 + d^2}}.$$

Pokud je tato nerovnost splněna, je rovněž $v_1 < v_2$ a funkce t' mění znaménko pouze v bodě

$$x_0 = \frac{\frac{v_1}{v_2}\, d}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}} \in (0, l),$$

a to ze záporného na kladné (uvažte $\lim_{x\to 0+} t'(x) < 0$ a $t''(x) > 0$, $x \in (0, l)$). To znamená, že v tomto případě je v bodě x_0 globální minimum funkce t na intervalu $[0, l]$. Jestliže nerovnost (5.14) splněna není, pak je $t'(x) < 0$ pro všechna $x \in (0, l)$, odkud plyne, že globální minimum funkce t na $[0, l]$ je v pravém krajním bodě (funkce t je na svém definičním oboru klesající). Nejrychlejší cesta tedy bude trvat

$$t\,(x_0) = \frac{\sqrt{d^2+x_0^2}}{v_1} + \frac{l-x_0}{v_2} = \frac{1}{v_1}\sqrt{d^2 + \frac{\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 d^2}{1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}} + \frac{1}{v_2}\left(l - \frac{\frac{v_1}{v_2}\, d}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}}\right) = \frac{d}{v_1\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}} + \frac{l\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2} - \frac{v_1}{v_2}\, d}{v_2\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}} =$$

$$\frac{d v_2 + l v_1\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2} - \frac{v_1^2}{v_2}\, d}{v_1 v_2\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}} = \frac{d v_2\left(1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2\right) + l v_1\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}}{v_1 v_2\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}} = \frac{d v_2\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2} + l v_1}{v_1 v_2} = \frac{d\sqrt{v_2^2-v_1^2}}{v_1 v_2} + \frac{l}{v_2}\ \text{hodin},$$

platí-li (5.14), a

$$t\,(l) = \frac{\sqrt{d^2+l^2}}{v_1}\ \text{hodin},$$

když (5.14) neplatí. □

5.137. Aplikace Jensenovy nerovnosti. Dokažte, že mezi všemi (konvexními) n-úhelníky vepsanými do kružnice má největší obsah právě pravidelný n-úhelník (pro libovolné $n \geq 3$).

Řešení. Připomeňme nejprve **Jensenovu nerovnost**: Pro ostře konvexní funkci f na intervalu I a pro libovolné body $x_1, \dots, x_n \in I$ a reálná čísla $c_1, \dots, c_n > 0$ taková, že $c_1 + \dots + c_n = 1$, platí

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i\, f\,(x_i)\,,$$

přičemž rovnost nastane, právě když je $x_1 = \dots = x_n$.

Očividně stačí uvažovat n-úhelníky, uvnitř kterých leží střed kružnice. Každý takový n-úhelník vepsaný do dané kružnice o poloměru r rozdělíme podle obrázku na n trojúhelníků s obsahy S_i, $i \in \{1, \dots, n\}$. Vzhledem k tomu, že

$$\sin\frac{\varphi_i}{2} = \frac{x_i}{r}, \quad \cos\frac{\varphi_i}{2} = \frac{h_i}{r}, \qquad i \in \{1, \dots, n\},$$

platí

$$S_i = x_i\, h_i = r^2 \sin\frac{\varphi_i}{2}\cos\frac{\varphi_i}{2} = \frac{1}{2}\, r^2 \sin\varphi_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Odsud plyne, že obsah celého n-úhelníku je

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i = \frac{1}{2}\, r^2 \sum_{i=1}^{n} \sin\varphi_i.$$

Chceme tedy maximalizovat součet $\sum_{i=1}^{n} \sin\varphi_i$, přičemž pro hodnoty $\varphi_i \in (0, \pi)$ musí zjevně být

vesd194gtv (5.15)
$$\varphi_1 + \dots + \varphi_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 2\pi.$$

Funkce $y = \sin x$ je ostře konkávní na intervalu $(0, \pi)$, což znamená, že funkce $y = -\sin x$ je na tomto intervalu ostře konvexní. Podle Jensenovy nerovnosti pro $c_i = 1/n$ a $x_i = \varphi_i$ je proto

$$-\sin\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\,\varphi_i\right) \leq -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\,\sin\varphi_i, \quad \text{tj.} \quad \sin\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\,\varphi_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\,\sin\varphi_i.$$

Navíc víme, že rovnost nastává právě pro $\varphi_1 = \cdots = \varphi_n$. Když tak vyjádříme (s pomocí (5.15))

$$S = \frac{r^2 n}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \sin\varphi_i \le \frac{r^2 n}{2} \sin\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \varphi_i\right) = \frac{r^2 n}{2} \sin\frac{2\pi}{n},$$

vidíme, že S může nabývat nejvýše hodnoty na pravé straně. Ovšem to nastane tehdy a jenom tehdy, když je $\varphi_1 = \cdots = \varphi_n$ (volili jsme $x_i = \varphi_i$). Maximální obsah má tudíž pravidelný n-úhelník, neboť právě pro něj je $\varphi_1 = \cdots = \varphi_n = 2\pi/n$. □

5.138. Izoperimetrický podíl. Pro uzavřenou rovinnou křivku ohraničující jistý obrazec se definuje její izoperimetrický podíl jako číslo

$$IP := \frac{S}{\pi\left(\frac{o}{2\pi}\right)^2} = \frac{4\pi S}{o^2},$$

kde S udává obsah uvažovaného obrazce a o jeho obvod (tj. délku křivky). Určete IP pro pravidelný mnohoúhelník a kružnici a najděte kruhovou výseč, pro niž je IP její hranice největší.

Řešení. Nejdříve si uvědomme, že hodnota IP se nemění při změně měřítka na osách. Když se totiž rozměry obrazce a-krát zvětší (pro libovolné $a > 0$), obvod se také zvětší a-krát a obsah a^2-krát (jde o plošnou míru). Takže IP nezávisí na velikosti obrazce, nýbrž pouze na jeho tvaru. Uvažujme proto pravidelný n-úhelník vepsaný do jednotkové kružnice. Podle obrázku je

$$h = \cos\varphi = \cos\frac{\pi}{n}, \qquad \frac{x}{2} = \sin\varphi = \sin\frac{\pi}{n},$$

což dává vyjádření pro jeho obvod

$$o_n = n \cdot x = 2n \sin\frac{\pi}{n}$$

i obsah

$$S_n = n \cdot \frac{1}{2} hx = n \cos\frac{\pi}{n} \sin\frac{\pi}{n}.$$

Pro pravidelný n-úhelník tak je

$$IP = \frac{4\pi n \cos\frac{\pi}{n} \sin\frac{\pi}{n}}{4n^2 \sin^2\frac{\pi}{n}} = \frac{\pi}{n} \operatorname{cotg}\frac{\pi}{n},$$

což můžeme ověřit kupř. pro čtverec ($n = 4$) s délkou strany a, kdy máme

$$IP = \frac{4\pi a^2}{(4a)^2} = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}.$$

Provedeme-li zlimitnění pro $n \to \infty$ s použitím limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

dostaneme izoperimetrický podíl pro kružnici

$$IP = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \operatorname{cotg}\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$$

Pochopitelně jsme také mohli pro kružnici o poloměru r přímo vypočítat

$$IP = \frac{4\pi S}{o^2} = \frac{4\pi\left(\pi r^2\right)}{(2\pi r)^2} = 1.$$

Pro hranici kruhové výseče o poloměru r a středovém úhlu $\varphi \in (0, 2\pi)$ je

$$IP = \frac{4\pi S}{o^2} = \frac{4\pi\,\frac{\varphi r^2}{2}}{(2r + r\varphi)^2} = \frac{2\pi\varphi}{(2+\varphi)^2}.$$

Potřebuje najít maximum funkce

$$f(\varphi) := \frac{2\pi\varphi}{(2+\varphi)^2}, \qquad \varphi \in (0, 2\pi).$$

Výpočtem

$$f'(\varphi) = 2\pi\,\frac{(2+\varphi)^2 - 2\varphi(2+\varphi)}{(2+\varphi)^4} = 2\pi\,\frac{2-\varphi}{(2+\varphi)^3}, \quad \varphi \in (0, 2\pi)$$

však snadno získáváme, že

$$f'(\varphi) > 0, \quad \varphi \in (0, 2), \qquad f'(\varphi) < 0, \quad \varphi \in (2, 2\pi).$$

Funkce f tedy nabývá maximální hodnoty pro $\varphi_0 = 2$ a při středovém úhlu $\varphi_0 = 2$ dostáváme největší

$$IP = \frac{2\pi\varphi_0}{(2+\varphi_0)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Doplňme tzv. izoperimetrickou větu, která říká, že pro každou uzavřenou křivku je její $IP \leq 1$, přičemž rovnost nastává jedině pro kružnici. Dále doplňme, že pro těleso v trojrozměrném prostoru (přesněji řečeno, pro uzavřenou plochu, která je jeho hranicí) se klade

$$IP := \frac{V}{\frac{4\pi}{3}\left(\frac{S}{4\pi}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

kde V je objem a S povrch tělesa. □

5.139. Je dán provázek délky l. Máte jej rozstříhat na n částí tak, aby ze vzniklých n menších provázků bylo možné vytvořit hranice předem daných geometrických obrazců (kupř. čtverce, trojúhelníku, kruhu, půlkruhu) s nejmenším součtem ploch.

Řešení. K vyřešení příkladu použijeme izoperimetrický podíl křivek a Jensenovu nerovnost (uvedené v předchozích příkladech). Pro předem určené geometrické obrazce označujme hodnoty jejich izoperimetrických podílů jako

$$\frac{1}{\lambda_i} := \frac{4\pi S_i}{o_i^2}, \qquad i \in \{1, \dots, n\},$$

přičemž S_i je obsah a o_i obvod i-tého obrazce. Ještě budeme používat označení

$$\Lambda := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Připomeňme, že izoperimetrický podíl je dán pouze tvarem obrazce a nezávisí na jeho velikosti. Zvláště hodnota Λ je konstantní (je určena tvarem zadaných obrazců).

Naším úkolem je minimalizovat součet $\sum_{i=1}^{n} S_i$ při dodržení podmínky $\sum_{i=1}^{n} o_i = l$. Protože je však

$$S_i = \frac{o_i^2}{4\pi\lambda_i}, \qquad i \in \{1, \dots, n\},$$

jde nám o minimalizaci výrazu

$$S := \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{n} \frac{o_i^2}{\lambda_i}.$$

Použijeme-li Jensenovu nerovnost pro ostře konvexní funkci $y = x^2$ (na celé reálné ose), obdržíme

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i^2$$

pro $x_i \in \mathbb{R}$ a $c_i > 0$ s vlastností $c_1 + \cdots + c_n = 1$. Dále víme, že v této nerovnosti nastane rovnost právě tehdy, když je $x_1 = \cdots = x_n$. Volbou

$$c_i = \frac{\lambda_i}{\Lambda}, \quad x_i = \frac{o_i}{\lambda_i}, \qquad i \in \{1, \dots, n\}$$

pak dostaneme

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\Lambda}\, \frac{o_i}{\lambda_i}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \left(\frac{o_i}{\lambda_i}\right)^2.$$

Jednoduchými úpravami přejdeme k nerovnici

$$\frac{1}{\Lambda^2}\left(\sum_{i=1}^{n} o_i\right)^2 \leq \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{o_i^2}{\lambda_i}$$

a poté (uvažte, že $\sum_{i=1}^{n} o_i = l$)

$$\frac{l^2}{\Lambda} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{o_i^2}{\lambda_i},$$

přičemž opět rovnost nastává právě pro

vesc36849k (5.16) $$x_1 = \cdots = x_n, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{o_1}{\lambda_1} = \cdots = \frac{o_n}{\lambda_n}.$$

Odsud vyplývá, že S je nejmenší, právě když platí (5.16). Tato nejmenší hodnota S je $l^2/(4\pi\Lambda)$. Zbývá stanovit délky nastříhaných částí o_i. Pokud je (5.16) splněno, musí zjevně být $o_i = k\lambda_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a jistou konstantu $k > 0$. Z

$$\sum_{i=1}^{n} o_i = l \quad \text{a současně} \quad \sum_{i=1}^{n} o_i = k \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = k\Lambda$$

ihned plyne, že $k = l/\Lambda$, tj.

$$o_i = \tfrac{\lambda_i}{\Lambda}\, l, \qquad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Podívejme se na konkrétní situaci, kdy máme provázek o délce 1 m rozříznout na dva menší a z nich potom vytvořit čtverec a kruh tak, aby součet jejich obsahů byl co nejmenší. Pro čtverec a kruh je po řadě (viz příklad nazvaný Izoperimetrický podíl)

$$\lambda_1 = \tfrac{4}{\pi}, \quad \lambda_2 = 1, \qquad \text{tj.} \qquad \Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \tfrac{4+\pi}{\pi}.$$

Délky příslušných částí tak jsou

$$o_1 = \tfrac{\frac{4}{\pi}}{\frac{4+\pi}{\pi}} \cdot 1\ \text{m} = \tfrac{4}{4+\pi}\ \text{m} \doteq 0,56\ \text{m}, \qquad o_2 = \tfrac{1}{\frac{4+\pi}{\pi}} \cdot 1\ \text{m} = \tfrac{\pi}{4+\pi}\ \text{m} \doteq 0,44\ \text{m}.$$

Obsah čtverce o obvodu 0, 56 m (s délkou strany $a = 0,14$ m) je $0,019\,6\ \text{m}^2$ a obsah kruhu s obvodem 0, 44 m (a poloměrem $r \doteq 0,07$ m) pak činí přibližně $0,015\,4\ \text{m}^2$. Můžeme ověřit, že

$$\tfrac{l^2}{4\pi\Lambda} = \tfrac{1}{4(4+\pi)}\ \text{m}^2 \doteq 0,035\ \text{m}^2 = 0,019\,6\ \text{m}^2 + 0,015\,4\ \text{m}^2.$$

□

5.140. O dům je opřený žebřík dlouhý 13 stop. Náhle základna žebříku podklouzne a žebřík začne sjíždět k zemi (stále zůstává opřený o dům). Když je základna žebříku 12 stop od domu, klouže od něj rychlostí 5 ft/s. Jak rychle v tomto okamžiku

(a) klesá vršek žebříku po zdi;
(b) se mění obsah trojúhelníku vymezeného žebříkem, domem a zemí;
(c) se mění úhel, který svírá žebřík se zemí?

5.141. Předpokládejte, že vlastníte dostatek finančních prostředků bez možnosti investovat mimo svou továrnu s působností na cenově regulovaném trhu s takřka neomezenou poptávkou a omezeným přístupem k některým klíčovým surovinám, což Vám umožňuje produkovat nejvýše 10 000 výrobků denně. Víte, že pro hrubé výnosy v a náklady n jako funkce proměnné x, udávající v tisících průměrný počet výrobků vyrobených za den, platí

$$v(x) = 9x, \quad n(x) = x^3 - 6x^2 + 15x, \quad x \in [0, 10].$$

Při jakém objemu výroby budete mít z Vaší továrny největší zisky?

5.142. Zvolte rozměry otevřeného bazénu se čtvercovým dnem o objemu 32 m^3 tak, aby na natření jeho stěn a dna bylo potřeba nejmenší množství barvy.

5.143. Číslo 28 rozložte na 2 nezáporné sčítance tak, aby součet druhé mocniny prvního sčítance a třetí mocniny druhého sčítance byl minimální.

5.144. Pomocí první derivace nalezněte reálné číslo $a > 0$, pro které je součet $a + 1/a$ minimální. Poté tuto úlohu řešte bez použití diferenciálního počtu.

5.145. Vepište do půlkruhu o poloměru r obdélník s největším možným obvodem. Uveďte jeho obvod.

5.146. Existuje-li mezi obdélníky o obvodu $4c$ obdélník s maximálním obsahem, stanovte délky jeho stran.

5.147. Zjistěte výšku v a poloměr podstavy r nejobjemnějšího kužele, který se vejde do koule o poloměru R.

5.148. Ze všech trojúhelníků s konstantním obvodem $o > 0$ vyberte ten, jenž má největší obsah.

5.149. Na parabole $2x^2 - 2y = 9$ najděte body s minimální vzdáleností od počátku soustavy souřadnic.

5.150. Vaším úkolem je vyrobit jednolitrovou plechovou konzervu „obvyklého" tvaru rotačního válce tak, aby na její výrobu bylo potřeba co nejméně plechu. Určete správný poměr mezi její výškou v
Rady a poloměrem podstavy r.

5.151. Do čtverce o délce strany $a > 0$ je vepsán čtverec, jehož strany jsou spojnicemi středů stran zadaného čtverce. Do vepsaného čtverce je stejným způsobem vepsán další čtverec atd. Stanovte součet obsahů a součet obvodů všech těchto (nekonečně mnoha) čtverců.

5.152. Nechť je dána posloupnost řádků půlkruhů, přičemž v n-tém řádku je 2^n půlkruhů o poloměru 2^{-n} pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jaký bude obsah libovolného obrazce složeného ze všech těchto půlkruhů, když nebudou umístěny přes sebe?

5.153. Vyřešte rovnici

$$1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^5 x + \cdots = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 2x + 1}.$$

5.154. Určete

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2}{3^{n-1}} \right).$$

5.155. Sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[5n]{n^2 + 2n + 1}.$$

5.156. Dokažte konvergenci a nalezněte součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}.$$

5.157. Stanovte součet řady

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$;

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$.

5.158. Sečtěte

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

5.159. Pomocí rozkladu na parciální zlomky vyčíslete

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n^2+2n}$.

5.160. Sečtěte konvergentní řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}.$$

5.161. Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}.$$

5.162. V závislosti na

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

vyjádřete součty řad

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots ;$$
$$\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \cdots ,$$

které z výše uvedené řady vznikly přerovnáním (tj. změnou pořadí členů).

5.163. Zjistěte, zda řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+(-2)^n}{5^n}$$

konverguje.

5.164. Dokažte následující tvrzení: Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, pak je $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(3a_n + \pi\right) = 0$.

5.165. Pro jaké hodnoty

$$\alpha \in \mathbb{R}; \quad \beta \in \mathbb{Z}; \quad \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

řady

$$\sum_{n=120}^{\infty} \frac{e^{-\alpha n}}{n}; \qquad \sum_{n=240}^{\infty} \frac{\beta^n \cdot n!}{n^n}; \qquad \sum_{n=360}^{\infty} \frac{n}{\gamma^n}$$

konvergují?

5.166. Rozhodněte, zda řada

$$\sum_{n=21}^{\infty} (-1)^n \frac{n^8-5n^6+2n}{2^n}$$

konverguje absolutně, konverguje neabsolutně (relativně), nebo nekonverguje.

5.167. Zjistěte, jestli je limita

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}\right)$$

vlastní. Upozorněme, že k tomu nelze využít součtů

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n^2} = +\infty.$$

5.168. Najděte všechna reálná čísla $A \geq 0$, pro která řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + A^{2n}\right)$$

konverguje.

5.169. Zopakujme, že harmonická řada diverguje; tj. platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Rozhodněte, zda také řada

$$\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \cdots + \frac{1}{29} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{91} + \cdots + \frac{1}{99} + \frac{1}{111} + \cdots + \frac{1}{119} + \frac{1}{121} + \cdots$$

diverguje.

5.170. Udejte příklad divergentních číselných řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ s kladnými členy, pro které řada $\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2b_n)$ absolutně konverguje.

5.171. Zjistěte, zda jednotlivé řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tfrac{(n!)^2}{(2n)!}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tfrac{n^7 - n^4 + n}{n^8 + 2n^6 + n}$$

konvergují absolutně, konvergují neabsolutně, či nekonvergují.

5.172. Konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \tfrac{\sqrt[3]{n} + \sqrt[5]{n} + 1}{n + \sqrt[5]{n}}?$$

5.173. Nalezněte hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$, pro které řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^n \tfrac{p}{n}$$

konverguje.

5.174. Určete poloměr konvergence r mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{2^{2n} \cdot n!}{(2n)!} \, x^n.$$

5.175. Stanovte poloměr konvergence pro $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\sqrt{n}} \, x^n$.

5.176. Bez počítání uveďte poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{5}{n \cdot 3^{n-1}} \, x^{n-1}.$$

5.177. Nalezněte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{\sqrt{n+1}}{3^{\sqrt{n}}} \, x^n.$$

5.178. Určete, pro jaká $x \in \mathbb{R}$ řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-3)^n}{\sqrt{n^4 + 2n^3 + 111}} \, (x-2)^n$$

konverguje.

5.179. Je pro libovolnou posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ poloměr konvergence mocninných řad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{a_{n-1}}{n} \, x^n$$

stejný?

5.180. Rozhodněte o platnosti implikací:

(a) Pokud existuje vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3n]{a_n^2}$, pak mocninná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

konverguje absolutně alespoň ve dvou různých bodech x.

(b) Z neabsolutní konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ plyne, že rovněž řada $\sum_{n=1}^{\infty} (6a_n - 5b_n)$ konverguje.

(c) Jestliže pro číselnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0,$$

pak tato řada konverguje.

(d) Pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konverguje, potom řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

konverguje absolutně.

5.181. Určete $\cos\frac{\pi}{10}$ s chybou menší než 10^{-5}.

5.182. Pro konvergentní řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+100}}$$

odhadněte chybu aproximace jejího součtu částečným součtem $s_{9\,999}$.

5.183. Bez počítání derivací uveďte Taylorův polynom 4. stupně se středem v bodě $x_0 = 0$ funkce

$$f(x) = \cos x - 2\sin x - \ln(1+x), \quad x \in (-1, 1).$$

Poté rozhodněte, zda je graf funkce f v okolí bodu $[0, 1]$ nad tečnou, pod tečnou.

5.184. Rozviňte funkci

$$y = \frac{1}{3-2x}, \quad x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

v Taylorovu řadu se středem v počátku.

5.185. Funkci $y = \mathrm{e}^x$ definovanou na celé reálné přímce vyjádřete jako nekonečný polynom se členy tvaru $a_n(x-1)^n$ a funkci $y = 2^x$ definovanou na $\mathbb{R}$ vyjádřete jako nekonečný polynom se členy $a_n x^n$.

5.186. Nalezněte funkci f, k níž pro $x \in \mathbb{R}$ konverguje posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{n^2x^3}{n^2x^2+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Je tato konvergence stejnoměrná na $\mathbb{R}$?

5.187. Konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x}{n^4+x^2}, \quad \text{kde} \quad x \in \mathbb{R},$$

stejnoměrně na celé reálné ose?

5.188. Z Taylorova rozvoje se středem v počátku funkce $y = \sin x$ získejte pomocí derivace Taylorův rozvoj funkce $y = \cos x$.

5.189. Odhadněte

(a) kosinus deseti stupňů s přesností alespoň 10^{-5};

(b) určitý integrál $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^4+1}$ s přesností alespoň 10^{-3}.

5.190. Určete mocninný rozvoj se středem v bodě $x_0 = 0$ funkce

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5.191. Najděte analytickou funkci, jejíž Taylorova řada je

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots,$$

přičemž $x \in [-1, 1]$.

5.192. Ze znalosti součtu geometrické řady odvoďte Taylorovu řadu funkce

$$y = \frac{1}{5+2x}$$

se středem v počátku. Poté určete její poloměr konvergence.

5.193. Užitím integrálního kritéria nalezněte hodnoty $a > 0$, pro které řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

konverguje.

5.194. Pro jaká $x \in \mathbb{R}$ řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^x}$$

konverguje?

5.195. Rozhodněte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \mathrm{tg}\, \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

konverguje absolutně, příp. relativně, nebo zda diverguje k $+\infty$, resp. k $-\infty$, či nic z toho (říkáme, že osciluje).

5.196. Stanovte součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$$

pomocí součtu vhodné mocninné řady.

5.197. Pro $x \in (-1, 1)$ sečtěte

$$x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \cdots$$

5.198. Je-li $|\, x \,| < 1$, určete součet řady

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\, x^{2n-1}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$.

5.199. Spočtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(-2)^{n-1}}$$

pomocí součtu mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \,(2n+1)\, x^{2n}$$

pro jisté $x \in (-1, 1)$.

5.200. Pro $x \in \mathbb{R}$ sečtěte řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!}\, x^{3n+1}.$$

Řešení cvičení

5.2. $P(x) = (-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i)x^2 + (2+3i)x - \frac{3}{5} - \frac{14}{5}i.$

5.82. $x^4 + 2x^3 - x^2 + x - 2.$

5.83. $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x + 2.$

5.84. $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - x - 1.$

5.85.

$$\sup A = 6, \qquad \inf A = -3;$$
$$\sup B = \frac{1}{4}, \qquad \inf B = -1;$$
$$\sup C = 9, \qquad \inf C = -9.$$

5.86. Lehce lze ukázat, že

$$\sup A = \frac{3}{2}, \qquad \inf A = 0.$$

5.87. Zřejmě je

$$\inf \mathbb{N} = 1, \quad \sup \mathcal{M} = 0, \quad \inf \mathcal{J} = 0, \quad \sup \mathcal{J} = 5.$$

5.88. Lze položit kupř.

$$M := \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}; \qquad N := \mathbb{N}.$$

5.89. Uvažte jakoukoli jednoprvkovou množinu $X \subset \mathbb{R}$.

5.90. Množina C musí být jednoprvková. Nechť je tedy např. $C = \{0\}$. Nyní můžeme zvolit $A = (-1, 0)$, $B = (0, 1)$.

5.92. Pro každé $\varepsilon > 0$ stačí ε-okolí bodu -2 přiřadit δ-okolí bodu 0 předpisem

$$\varepsilon \mapsto \delta, \qquad \delta = \varepsilon,$$

přičemž bez újmy na obecnosti lze požadovat, aby $\varepsilon \le 1$. Pokud by totiž bylo $\varepsilon > 1$, lze položit $\delta = 1$.

5.93. Existence limity a rovnost

$$\lim_{x\to -1} \frac{(1+x)^2 - 3}{2} = -\frac{3}{2}$$

např. opět plyne z volby $\delta := \varepsilon$ pro $\varepsilon \in (0, 1)$.

5.94. Neboť $-(x-2)^4 < x$ pro $x < 0$, dostáváme $3\,(x-2)^4/2 > -x$ pro $x < 0$.

5.95. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-2}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+n-1}{n^2} \cdot \frac{n-1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

5.96. Snadno lze ukázat, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3 - 11n^2 + 2} + \sqrt[5]{n^7 - 2n^5 - n^3} - n + \sin^2 n}{2 - \sqrt[3]{5n^4 + 2n^3 + 5}} = -\infty.$$

5.97. Limita je rovna 1.

5.98. Kupř. lze položit

$$x_n := n, \quad y_n := -n + 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

5.99. Správná odpověď je ± 1.

5.100. Výsledek je

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = 0.$$

5.101. Platí

$$\liminf_{n\to\infty} \left((-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \sin\frac{n\pi}{4} \right) = -\mathrm{e} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5.102. Neboť

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to 0-} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2},$$

uvažovaná oboustranná limita neexistuje.

5.103. První z limit je rovna $+\infty$, druhá neexistuje.

5.104. Limitu lze spočítat více způsoby. Nabízí se např.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} \cdot \frac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cotg} x} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x \cdot \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x \left(1-\cos^2 x\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x\,(1+\cos x)} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

5.105. Platí

$$\lim_{x\to\pi/6} \frac{2\sin^3 x + 7\sin^2 x + 2\sin x - 3}{2\sin^3 x + 3\sin^2 x - 8\sin x + 3} = \lim_{x\to\pi/6} \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} = -3.$$

5.106. Je

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{m}{n}.$$

5.107. Po rozšíření výrazem

$$\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

lze lehce dostat

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \frac{1}{2}.$$

5.108. Platí

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x\sqrt{1+x^2} - x^2\right) = \frac{1}{2}.$$

5.109. Je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

5.110. Rozšířením zlomku ze zadání je možné obdržet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{\sqrt{x+1}-1} = 8.$$

5.111. Platí

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x} = 1.$$

5.112. Zřejmě je

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x+\sqrt{1+x^2-x^9}-7x^5+44x^2}{3^x+\sqrt[5]{6x^6+x^2}-18x^5-592x^4}=\frac{7}{18}.$$

5.113. Výrok není pravdivý. Uvažte kupř.

$$f(x):=\frac{1}{x},\quad x\in(-\infty,0);\qquad g(x):=x,\quad x\in\mathbb{R}.$$

5.114. Uvedená funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$.

5.115. V bodech $-\pi$, 0, π je spojitá; v bodě 2 je spojitá pouze zprava a v bodě 3 pouze zleva; v bodě 1 není spojitá ani z jedné strany.

5.116. Je nutné položit $f(0):=0$.

5.117. Funkce je spojitá právě pro $p=2$.

5.118. Správná odpověď je $a=4$.

5.119. Limitu lze snadno určit např. pomocí l'Hospitalova pravidla.

5.120. Je

$$\lim_{x\to0+}\frac{\sin^8 x}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin^8 x}{x^3}=0.$$

5.121.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+5}\right)^{2n-1}=\mathrm{e}^{-10}.$$

5.123. (a) $v(0)=6\,\mathrm{m/s}$; (b) $t=3\,\mathrm{s}$, $s(3)=16\,\mathrm{m}$; (c) $v(4)=-2\,\mathrm{m/s}$, $a(4)=-2\,\mathrm{m/s^2}$.

5.123. Trojnásobné použití l'Hospitalova pravidla dává

$$\lim_{x\to0-}\frac{\sin x-x}{x^3}=-\frac{1}{6}.$$

5.124. $2/\pi$.

5.125.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x\right)=1.$$

5.126.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(3^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}}\right)x\right)=\ln\frac{3}{2}.$$

5.127. $1/2$.

5.128. Platí

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{2}{x}\right)^{x^2}=\mathrm{e}^{-2}.$$

5.129. Dvojnásobnou aplikací l'Hospitalova pravidla lze obdržet

$$\lim_{x\to0}(1-\cos x)^{\sin x}=\mathrm{e}^0=1.$$

5.130. V obou případech je výsledek e^{α}.

5.140. (a) $12\,\mathrm{ft/s}$; (b) $-59,5\,\mathrm{ft^2/s}$; (c) $-1\,\mathrm{rad/s}$.

5.141. Při produkci zhruba 3 414 výrobků denně.

5.142. $4\,\mathrm{m}\times4\,\mathrm{m}\times2\,\mathrm{m}$.

5.143. $28=24+4$.

5.144. $a=1$.

5.145. $2\sqrt{5}\,r$.

5.146. Jedná se o čtverec (s délkou strany c).

5.147. $v = \frac{4}{3}R$, $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$.

5.148. Největší obsah $\sqrt{3}\,o^2/36$ má rovnostranný trojúhelník.

5.149. $[2, -1/2]$, $[-2, -1/2]$.

5.150. $v = 2r$.

5.151. $2a^2$; $4a\left(2 + \sqrt{2}\right)$.

5.152. $\pi/2$.

5.153. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5.154. 5.

5.155. $+\infty$.

5.156. $3/2$.

5.157. (a) 3; (b) $9/4$.

5.158. $1/2$.

5.159. (a) $3/4$; (b) $1/4$.

5.160. $-1/2$.

5.161. $11/18$.

5.162. $s/2$; $3s/2$ ($s = \ln 2$).

5.163. Konverguje.

5.164. Postačuje uvážit nutnou podmínku konvergence $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

5.165. $\alpha > 0$; $\beta \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; $\gamma \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

5.166. Konverguje absolutně.

5.167. Limita je rovna 1/2.

5.168. $A \in [0, 1)$.

5.169. Součet uvedené řady je konečný – řada konverguje.

5.170. Např. $a_n = n/3$, $b_n = n/2$, $n \in \mathbb{N}$.

5.171. První řada konverguje absolutně; druhá neabsolutně.

5.172. Ano.

5.173. $p \in \mathbb{R}$.

5.174. $r = +\infty$.

5.175. 1.

5.176. 3.

5.177. $[-1, 1]$.

5.178. $x \in \left[2 - \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}\right]$.

5.179. Ano.

5.180.

(a) Platí.
(b) Neplatí.
(c) Neplatí.
(d) Platí.

5.181. $1 - \frac{\pi^2}{10^2 \cdot 2} + \frac{\pi^4}{10^4 \cdot 4!}$.

5.182. Chyba náleží do intervalu (0, 1/200).

5.183. $1 - 3x + \frac{7}{24}x^4$; nad tečnou.

5.184. $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} x^n$.

5.185. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}}{n!}(x-1)^n$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 2}{n!} x^n$.

5.186. $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$; ano.

5.187. Nikoli.

5.188. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}$.

5.189. (a) $1 - \frac{\pi^2}{18^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{18^4 \cdot 4!}$; (b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5 \cdot 2^5}$.

5.190. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\, n!}\, x^{2n+1}$.

5.191. $y = \operatorname{arctg} x$.

5.192. Právě pro $x \in \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ je

$$\frac{1}{5+2x} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n x^n.$$

5.193. $a > 1$.

5.194. $x > 2$.

5.195. Konverguje absolutně.

5.196. $\ln(3/2)$.

5.197. $\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$.

5.198. (a) $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$; (b) $\frac{1+x}{(1-x)^3}$.

5.199. $2/9$.

5.200. $x\, \mathrm{e}^{\frac{x^3}{2}}$.

A. Derivování

6.1. Určete Taylorovy rozvoje T_x^k (k-tého řádu v bodě x) z následujících funkcí:

i) T_0^3 z funkce $\sin x$,

ii) T_1^3 z funkce $\frac{e^x}{x}$.

Řešení.

i) Spočítáme hodnoty první až třetí derivace funkce $f = \sin$ v bodě 0: $f'(0) = \cos(0) = 1$, $f^{(2)}(0) = -\sin(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$, dále $f(0) = 0$ Taylorův rozvoj 3-tího řádu funkce $\sin(x)$ v bodě 0 je tedy

$$T_0^3(\sin(x)) = x - \frac{1}{6}x^3.$$

ii) Opět $f(1) = e$,

$$\begin{aligned}
f'(1) &= \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}\big(1\big) = 0 \\
f^{(2)} &= \frac{e^x}{x} - 2\frac{e^x}{x}^2 + \frac{2e^x}{x^3}\big(1\big) = e \\
f^{(3)} &= \frac{e^x}{x} - 3\frac{e^x}{x}^2 + \frac{6e^x}{x^3} - \frac{6e^x}{x^4}\big(1\big) = -2e
\end{aligned}$$

Dostáváme tedy Taylorův rozvoj třetího řádu funkce $\frac{e^x}{x}$ v bodě 1:

$$T_1^3(\frac{e^x}{x}) = e + \frac{e}{2}(x-1)^2 - \frac{e}{3}(x-1)^3 = e(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + \frac{5}{6}).$$

$\square$

6.2. Určete Taylorův polynom T_0^6 funkce sin a pomocí věty (**??**) odhadněte chybu polynomu v bodě $\pi/4$.

Řešení. Podobně jako v předchozím příkladu určíme

$$T_0^6(\sin(x)) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5.$$

Dle věty **??** pak odhadneme velikost zbytku (chyby) R. Podle věty existuje $c \in (0, \frac{\pi}{4})$ takové, že

$$R(\pi/4) = \left| \frac{-\cos(c)\pi^7}{7!4^7} \right| < \frac{1}{7!} \doteq 0,0002.$$

$\square$

6.3. Rozviňte funkci $\ln(1+x)$ do mocninné řady v bodech 0 a 1 a určete **všechna** $x \in \mathbb{R}$, pro která tyto řady konvergují.

Řešení. Nejprve určeme rozvoj v bodě 0. Rozvinout funkci do mocninné řady v daném bodě je to stejné, jako určit její Taylorův rovoj v daném bodě. Snadno nahlédneme, že

$$\ln(x+1)^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n},$$

takže vyčíslením derivací v nule máme $\ln(x) = ln(0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, kde

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \ln x &= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n. \end{aligned}$$

Pro poloměr konvergence potom použijeme limitu podílu následujících koeficientů členů mocninné řady

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} \\ &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}} = 1. \end{aligned}$$

Řada tedy konverguje pro libovolné $x \in (-1, 1)$. Pro $x = -1$ dostáváme harmonickou řadu (se znaménkem minus), pro $x = 1$ dostáváme aternující harmonickou řadu, která podle Leibnizova kriteria konverguje. Daná řada proto konverguje právě pro $x \in (-1, 1\rangle$.

Pro rozvoj v bodě 1 dostáváme podobně vyčíslením výše uvedených derivací z 6.3

$$\begin{aligned}\ln(x+1) &= \ln(2) + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{3\cdot 2^3}(x-1)^3 - \frac{1}{4\cdot 2^4}(x-1)^4 + \dots \\ &= \ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}(x-1)^n,\end{aligned}$$

pro poloměr konvergence této řady pak dostáváme

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \\ &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}}{\frac{1}{2^n n}}} = 1.\end{aligned}$$

První řada konverguje pro $-1 < x \leq 1$, druhá pro $-1 < x \leq 3$. □

6.4. Rozviňte funkci

(a) $y = \ln\frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (-1, 1);$
(b) $y = \mathrm{e}^{x^2} + x^2\mathrm{e}^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}$

do Taylorovy řady se středem v počátku.

Řešení. Pokud lze funkci vyjádřit jako součet mocninné řady (s kladným poloměrem konvergence) na jejím oboru konvergence, pak je tato řada nutně Taylorovou řadou uvažované funkce (svého součtu). To nám umožní snadno najít příslušné Taylorovy řady.

Případ (a). Víme, že je

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n, \quad x \in (-1,1),$$

tj.

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n+1}}{n}\,(-x)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n}\, x^n, \quad x \in (-1,1).$$

Celkem máme

$$\ln\tfrac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n+1}+1}{n}\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{2}{2n-1}\, x^{2n-1}$$

pro $x \in (-1, 1)$.

Případ (b). Podobně ze známé identity

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!}\, x^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

plyne

$$\mathrm{e}^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!}\left(x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!}\, x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

a

$$x^2\,\mathrm{e}^{-2x} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!}\,(-2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-2)^n}{n!}\, x^{n+2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Platí tudíž

$$\mathrm{e}^{x^2} + x^2\mathrm{e}^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{x^{2n}+(-2)^n x^{n+2}}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

□

6.5. Vyčíslete $\cos \frac{\pi}{10}$ s chybou menší než 10^{-5}.

6.6. Pro konvergentní řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+100}$$

odhadněte chybu aproximace jejího součtu částečným součtem $s_{9\,999}$.

6.7. Bez počítání derivací uveďte Taylorův polynom 4. stupně se středem v bodě $x_0 = 0$ funkce

$$f(x) = \cos x - 2 \sin x - \ln(1+x), \quad x \in (-1, 1).$$

Poté rozhodněte, zda je graf funkce f v okolí bodu $[0, 1]$ nad tečnou, pod tečnou.

6.8. Rozviňte funkci

$$y = \frac{1}{3-2x}, \quad x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

v Taylorovu řadu se středem v počátku.

6.9. Funkci $y = \mathrm{e}^x$ definovanou na celé reálné přímce vyjádřete jako nekonečný polynom se členy tvaru $a_n(x-1)^n$ a funkci $y = 2^x$ definovanou na $\mathbb{R}$ vyjádřete jako nekonečný polynom se členy $a_n x^n$.

6.10. Nalezněte funkci f, k níž pro $x \in \mathbb{R}$ konverguje posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{n^2 x^3}{n^2 x^2 + 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Je tato konvergence stejnoměrná na $\mathbb{R}$?

6.11. Konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x}{n^4 + x^2}, \quad \text{kde} \quad x \in \mathbb{R},$$

stejnoměrně na celé reálné ose?

6.12. Z Taylorova rozvoje se středem v počátku funkce $y = \sin x$ získejte pomocí derivace Taylorův rozvoj funkce $y = \cos x$.

6.13. Odhadněte

(a) kosinus deseti stupňů s přesností alespoň 10^{-5};

(b) určitý integrál $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^4+1}$ s přesností alespoň 10^{-3}.

6.14. Určete mocninný rozvoj se středem v bodě $x_0 = 0$ funkce

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6.15. Najděte analytickou funkci, jejíž Taylorova řada je

$$x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + \cdots,$$

přičemž $x \in [-1, 1]$.

6.16. Ze znalosti součtu geometrické řady odvoďte Taylorovu řadu funkce

$$y = \tfrac{1}{5+2x}$$

se středem v počátku. Poté určete její poloměr konvergence.

6.17. Konverguje posloupnost funkcí

$$y_n = \mathrm{e}^{\frac{x^4}{4n^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

stejnoměrně na $\mathbb{R}$?

Řešení. Posloupnost $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bodově konverguje ke konstantní funkci $y = 1$ na $\mathbb{R}$, neboť

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{x^4}{4n^2}} = \mathrm{e}^0 = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Z vyčíslení

$$y_n\left(\sqrt{2n}\right) = \mathrm{e} > 2 \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}$$

však vyplývá, že se nejedná o stejnoměrnou konvergenci. (V definici stejnoměrné konvergence postačuje uvážit $\varepsilon \in (0, 1)$.) □

6.18. Určete, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{\sqrt{x}\cdot n}{n^4+x^2}$$

stejnoměrně konverguje na intervalu $(0, +\infty)$.

Řešení. Při označení

$$f_n(x) = \tfrac{\sqrt{x}\cdot n}{n^4+x^2}, \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

je

$$f_n'(x) = \tfrac{n\left(n^4-3x^2\right)}{2\sqrt{x}\left(n^4+x^2\right)^2}, \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je nadále libovolné. Nerovnosti $f_n'(x) > 0$ pro $x \in \left(0, n^2/\sqrt{3}\right)$ a $f_n'(x) < 0$ pro $x \in \left(n^2/\sqrt{3}, +\infty\right)$ implikují, že maximum funkce f_n nastává právě v bodě $x = n^2/\sqrt{3}$. Protože

$$f_n\left(\tfrac{n^2}{\sqrt{3}}\right) = \tfrac{\sqrt[4]{27}}{4n^2} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{\sqrt[4]{27}}{4n^2} = \tfrac{\sqrt[4]{27}}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^2} < +\infty,$$

podle Weierstrassova kritéria řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu $(0, +\infty)$. □

6.19. Určete Taylorovu řadu se středem v počátku funkce

(a) $y = \tfrac{1}{(1+x)^2}, \quad x \in (-1, 1)$;
(b) $y = \operatorname{arctg} x, \quad x \in (-1, 1)$.

Řešení. Případ (a). Využijeme vzorec

$$\tfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

o součtu geometrické řady. Jeho derivováním dostáváme

$$-\tfrac{1}{(1+x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, n\, x^{n-1}, \quad x \in (-1, 1),$$

přičemž $\left(x^0\right)' = 0$, a tak je dolní index $n = 1$. Vidíme, že

$$\tfrac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, n\, x^{n-1}, \quad x \in (-1, 1).$$

Případ (b). Derivaci funkce $y = \operatorname{arctg} t$ umíme vyjádřit jako

$$(\operatorname{arctg} t)' = \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-t^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}, \quad t \in (-1, 1)\,.$$

Protože pro $x \in (-1, 1)$ je

$$\int_0^x (\operatorname{arctg} t)' \, dt = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arctg} x$$

a

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \int_0^x t^{2n} \, dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \, x^{2n+1},$$

máme již výsledek

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \, x^{2n+1}, \quad x \in (-1, 1)\,.$$

□

6.20. Najděte Taylorovu řadu se středem $x_0 = 0$ funkce

$$f(x) = \int_0^x u \cos u^2 \, du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Z vyjádření

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \, t^{2n}, \quad t \in \mathbb{R}$$

plyne

$$u \cos u^2 = u \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \, \left(u^2\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \, u^{4n+1}, \quad u \in \mathbb{R}$$

a následně (pro $x \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x u \cos u^2 \, du = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \, u^{4n+1} \right) du \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^x u^{4n+1} \, du \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,(4n+2)} \, x^{4n+2}. \end{aligned}$$

□

6.21. Na intervalu konvergence $(-1, 1)$ stanovte součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(n+1)\,x^n.$$

Řešení. Platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(n+1)\,x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(x^{n+1}\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n+1} \right)' =$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}\, x^2 \right)' = \left[x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' \right]' = \left[x^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' \right]' =$$

$$\left[x^2 \left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' \right]' = \left[x^2 \left(-1 + \frac{1}{1-x} \right)' \right]' = \left[x^2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \right]' =$$

$$\frac{2x}{(1-x)^3}$$

pro všechna $x \in (-1, 1)$. □

6.22. Pro $x \in (-1, 1)$ sečtěte
$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\, x^{n+1}.$$

Řešení. Nejprve upozorněme, že symbolem pro neurčitý integrál budeme označovat jednu konkrétní primitivní funkci (při zachování proměnné), kterou je vhodné chápat jako tzv. funkci horní meze, přičemž dolní mez je nula. Užitím věty o integraci mocninné řady pro $x \in (-1, 1)$ obdržíme
$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\, x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} \int x^n\, dx \right) =$$
$$\boxed{\int \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n \right) dx} = \textstyle\int \sum_{n=1}^{\infty} \big((-1)^{n+1} \int x^{n-1}\, dx \big) dx =$$
$$\textstyle\int \big(\int \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1}\, dx \big) dx = \int \big(\int 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\, dx \big) dx =$$
$$\textstyle\int \big(\int \frac{1}{1+x}\, dx \big) dx = \boxed{\displaystyle\int \ln(1+x) + C_1\, dx}.$$

Jelikož
$$\int \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n \right) dx = \int \ln(1+x) + C_1\, dx,$$
ze spojitosti uvažovaných funkcí víme, že
$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n = \ln(1+x) + C_1, \qquad x \in (-1, 1).$$
Volba $x = 0$ potom dává $0 = \ln 1 + C_1$, tj. $C_1 = 0$. Dále je
$$\textstyle\int \ln(1+x)\; dx = \Big|\ \text{per partes}\ \Big| =$$
$$\left| \begin{array}{ll} u = \ln(1+x) & u' = \frac{1}{1+x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = x \ln(1+x) - \textstyle\int \frac{x}{1+x}\; dx =$$
$$x \ln(1+x) - \textstyle\int 1 - \frac{1}{1+x}\; dx = x \ln(1+x) - x + \ln(1+x) + C_2 =$$
$$(x+1)\ln(x+1) - x + C_2.$$
Protože zadaná řada konverguje v bodě $x = 0$ se součtem 0, analogicky jako pro C_1 z
$$0 = 1 \cdot \ln 1 - 0 + C_2$$
vyplývá, že $C_2 = 0$. Celkem tedy získáváme
$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\, x^{n+1} = (x+1)\ \ln(x+1) - x, \qquad x \in (-1, 1).$$

□

6.23. Napište mocninnou řadu se středem v počátku, jejíž součet je na intervalu $(-3, 3)$ funkce
$$\tfrac{1}{x^2-x-12}.$$

Řešení. Neboť
$$\tfrac{1}{x^2-x-12} = \tfrac{1}{(x-4)(x+3)} = \tfrac{1}{7}\left(\tfrac{1}{x-4} - \tfrac{1}{x+3} \right)$$
a

$$\frac{1}{x-4} = -\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{x}{4}} = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4^2} + \cdots + \frac{x^n}{4^n} + \cdots\right),$$
$$\frac{1}{x+3} = \frac{\frac{1}{3}}{1-(-\frac{x}{3})} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \cdots + \frac{(-x)^n}{3^n} + \cdots\right),$$
dostáváme
$$\frac{1}{x^2-x-12} = -\frac{1}{28}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4^n} - \frac{1}{21}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{21\cdot 3^n} - \frac{1}{28\cdot 4^n}\right)x^n.$$

□

6.24. Rozviňte do mocninné řady funkci $\cos^2(x)$ (tj. určete Taylorův rozvoj funkce) v bodě 0 a určete pro která reálná čísla tato řada konverguje.

6.25. Rozviňte do mocninné řady funkci $\sin^2(x)$ v bodě 0 a určete pro která reálná čísla tato řada konverguje.

6.26. Rozviňte do mocninné řady funkci $\ln(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$ v bodě 0 a určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje.

Mnoho praktických úloh lze převést na hledání extrémů funkce jedné proměnné.

6.27. Vrtulník dálniční hlídky letí 3 km nad rovnou silnicí rychlostí 120 km/h. Pilot zaměří radarem auto jedoucí proti směru letu vrtulníku a naměří, že auto se při vzdušné vzdálenosti 5 km od vrtulníku k němu přibližuje rychlostí 160 km/h. Spočítejte rychlost auta (vůči předmětu pohozenému na vozovce).

Řešení. Pro jednoduchost budeme v celém příkladu vynechávat fyzikální jednotky, a to kilometry pro dráhu a hodiny pro čas (rychlost tedy bude v km/h). Pozici vrtulníku v čase t vyjádřeme bodem $[y(t), 3]$ a auta potom bodem $[x(t), 0]$; tj. 1 jednotka na osách odpovídá 1 km a současně osy volíme tak, aby „auto jelo po ose x“. Jako $s(t)$ označme vzdušnou vzdálenost vrtulníku od auta a jako t_0 ten časový okamžik, ze kterého jsou údaje v zadání. Spočtěme rychlost auta vzhledem k předmětu umístěnému do počátku soustavy souřadnic. Můžeme předpokládat, že $x(t) > y(t) > 0$. Za tohoto předpokladu je $x'(t) \le 0$, $y'(t) \ge 0$ pro uvažovaná t. Auto se totiž blíží k bodu $[0, 0]$ zprava – hodnota $x(t)$ se zmenšuje pro zvětšující se t, a tudíž $x'(t) \le 0$. Podobně dostáváme $y'(t) \ge 0$ a také $s'(t) \le 0$. Ještě dodejme, že např. $y'(t)$ udává, jak rychle se mění funkce y v čase t, tedy rychlost vrtulníku.

Víme, že je
$$s(t_0) = 5, \quad s'(t_0) = -160, \quad y'(t_0) = 120$$
a že platí ($s(t)$ je přepona pravoúhlého trojúhelníku)

ves7863k

$$(x(t) - y(t))^2 + 3^2 = s^2(t). \tag{6.1}$$

Odtud plyne ($x(t) > y(t) > 0$)
$$(x(t_0) - y(t_0))^2 + 3^2 = 5^2, \quad \text{tj.} \quad x(t_0) - y(t_0) = 4.$$

Derivováním identity (6.1) získáváme

$$2\,(x(t)-y(t))\left(x'(t)-y'(t)\right)=2s(t)s'(t)$$

a následně pro $t=t_0$

$$2\cdot 4\left(x'\,(t_0)-120\right)=2\cdot 5\cdot(-160),\qquad \text{tj.}\quad x'\,(t_0)=-80.$$

Vypočítali jsme, že auto se blíží k předmětu na vozovce rychlostí 80 km/h. Stačí si uvědomit, s jakými jednotkami jsme pracovali. To, že jsme jako výsledek obdrželi zápornou hodnotu, je pak zapříčiněno naší volbou souřadnicového umístění. □

6.28. Rozlehlý vojenský prostor (nadále zkráceno na VP) s půdorysem čtverce o rozloze 100 km^2 je kolem dokola ohraničený úzkou cestou. Z výchozího místa v jednom rohu VP se lze dostat do cílového místa uvnitř VP tak, že se jde 5 km po cestě a poté 2 km kolmo k ní. Ovšem můžete jít libovolnou dobu po cestě rychlostí 5 km za hodinu a potom šikmo přes VP rychlostí 3 km za hodinu. Kolik (kilo)metrů musíte jít po cestě, abyste došli na místo určení co nejdříve?

Řešení. K tomu, abychom po cestě ušli x km, přičemž $x\in[0,5]$, potřebujeme $x/5$ hodin. Naše cesta přes VP pak bude měřit

$$\sqrt{2^2+(5-x)^2}=\sqrt{x^2-10x+29}$$

kilometrů a ujdeme ji za $\sqrt{x^2-10x+29}/3$ hodin. Celkem bude naše cesta trvat

$$f(x)=\tfrac{1}{5}x+\tfrac{1}{3}\sqrt{x^2-10x+29}$$

hodin (připomeňme, že $x\in[0,5]$). Jediný nulový bod funkce

$$f'(x)=\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{3}\,\tfrac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+29}}$$

je $x=7/2$. Protože derivace f' existuje v každém bodě intervalu $[0,5]$ a protože

$$f\left(\tfrac{7}{2}\right)=\tfrac{23}{15}<f(5)=\tfrac{5}{3}<f(0)=\tfrac{\sqrt{29}}{3},$$

funkce f má v bodě $x=7/2$ absolutní minimum. Po cestě bychom tudíž měli jít 3, 5 km. □

6.29. Určete x-ovou souřadnici x_A bodu paraboly $y=x^2$, který je nejblíže bodu $A=[1,2]$.

Řešení. Není obtížné uvědomit si, že příklad má právě jedno řešení a že úkolem je vlastně najít absolutní minimum funkce

$$f(x)=\sqrt{(x-1)^2+(x^2-2)^2},\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Funkce f má zjevně nejmenší hodnotu ve stejném bodě jako funkce

$$g(x)=(x-1)^2+(x^2-2)^2,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Neboť

$$g'(x)=4x^3-6x-2,\qquad x\in\mathbb{R},$$

řešením rovnice $0 = 2x^3 - 3x - 1$ dostáváme nejprve stacionární bod $x = -1$ a po vydělení polynomu $2x^3 - 3x - 1$ polynomem $x + 1$ také zbývající dva stacionární body

$$\tfrac{1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{a} \quad \tfrac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Protože funkce g je polynomem (má derivaci na celé reálné ose), z geometrického významu úlohy již získáváme

$$x_A = \tfrac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

□

6.30. Do rovnoramenného trojúhelníku o základně z a výšce v (nad základnou) vepište obdélník (jedna jeho strana bude částí základny trojúhelníku) s největším obsahem. Stanovte obsah S tohoto obdélníku.

Řešení. Pro vyřešení příkladu postačuje uvažovat úlohu, kdy se snažíme vepsat do pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami délek $z/2$ a v obdélník s maximálním možným obsahem, přičemž dvě jeho strany musí být částmi odvěsen tohoto trojúhelníku. Úlohu takto převedeme na otázku maximalizace funkce

$$f(x) = x\left(v - \tfrac{2vx}{z}\right)$$

na intervalu $I = [0, z/2]$. Neboť je

$$f'(x) = v - \tfrac{4vx}{z} \qquad \text{pro všechna } x \in I$$

a dále

$$f(0) = f\left(\tfrac{z}{2}\right) = 0, \qquad f(x) \geq 0, \quad x \in I,$$

v jediném svém stacionárním bodě $x_0 = z/4$ nutně nabývá funkce f maxima na I. Proto jsou strany hledaného obdélníku dlouhé $z/2$ (dvojnásobek x_0: uvažujeme původní úlohu) a $v/2$ (to lze získat dosazením $z/4$ za x do výrazu $v - 2vx/z$). Odsud dostáváme, že $S = vz/4$. □

6.31. Firma hledá obdélníkovou parcelu o rozměrech $5a \times b$ se záměrem ji po obvodu celou oplotit a pak ještě ploty kolmými na první stranu rozdělit na 5 stejně velkých parcel o rozměrech $a \times b$. Pro jaké hodnoty a, b bude rozloha parcely $S = 5ab$ maximální, má-li být celková délka plotů 2 400 m?

Řešení. Přeformulujme zadání: Chceme maximalizovat součin $5ab$ při splnění podmínky

ves7863k2 (6.2) $$6b + 10a = 2\,400, \quad a, b > 0.$$

Lehce lze ukázat, že funkce

$$a \mapsto 5a\,\tfrac{2\,400-10a}{6}$$

definovaná pro $a \in [0, 240]$ nabývá maximální hodnoty v bodě $a = 120$. Proto je výsledek

$$a = 120 \text{ m}, \quad b = 200 \text{ m}.$$

Doplňme, že uvedená hodnota b bezprostředně plyne z (6.2). □

6.32. Mezi obdélníky, jejichž dva vrcholy leží na ose x a další dva s kladnými druhými souřadnicemi na parabole $y = 8 - 2x^2$, najděte obdélník s maximálním obsahem.

Řešení. Základna obdélníku s maximálním obsahem měří $4/\sqrt{3}$, jeho výška pak $16/3$. Tento výsledek lze obdržet nalezením absolutního maxima funkce

$$S(x) = 2x\left(8 - 2x^2\right)$$

na intervalu $I = [0, 2]$. Neboť tato funkce je na I nezáporná, v krajních bodech I nulová a má derivaci na celém I, přičemž její derivace je nulová pouze v jednom bodě intervalu I, a to v bodě $x = 2/\sqrt{3}$, nabývá zde maximální hodnoty. □

6.33. V čase $t = 0$ vyjelo auto z bodu $A = [5, 0]$ rychlostí 4 jednotky za sekundu směrem $(-1, 0)$. Ve stejném čase vyjelo druhé auto z bodu $B = [-2, -1]$ rychlostí 2 jednotky za sekundu směrem $(0, 1)$. Kdy si budou auta nejblíže a jaká bude tato vzdálenost?

Řešení. $t = 1,5s$, vzdálenost $\sqrt{5}$ jednotek. □

6.34. Do rovnostranného trojúhelníka o straně a je vepsán pravoúhelník (jedna jeho strana leží na straně trojúhelníka, zbylé dva vrcholy leží na zbylých stranách trojúhelníka). Jaký může mít maximálně obsah?

Řešení. Vepsaný pravoúhelník má strany x, $\sqrt{3}/2(a - x)$, tedy obsah $\sqrt{3}/2(a - x)x$. Maximum pro $x = a/2$, tedy maximální obsah je $(\sqrt{3}/8)a^2$. □

6.35. Ve čase $t = 0$ se začaly pohybovat tři body P, Q, R v rovině a to bod P z bodu $[-2, 1]$ směrem $(3, 1)$, rovnoměrnou rychlostí $\sqrt{10}\,m/s$, bod Q z bodu $[0, 0]$ směrem $(-1, 1)$ rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením $2\sqrt{2}\,m/s^2$ a bod R z bodu $[0, 1]$ směrem $(1, 0)$ rovnoměrnou rychlostí $2\,m/s$. V jakém čase bude obsah trojúhelníku PQR minimální?

Řešení. Rovnice bodů P, Q, R v čase jsou

$$\begin{aligned} P &: [-2, 1] + (3, 1)t \\ Q &: [0, 0] + (-1, 1)t^2 \\ R &: [0, 1] + (2, 0)t \end{aligned}$$

Obsah trojúhelníka PQR je určený např. polovinou absolutní hodnoty determinantu, jehož řádky jsou souřadnice vektorů PQ a QR (viz Matematika I). Minimalizujeme tedy determinant:

$$\begin{vmatrix} -2 + t & t \\ -t^2 - 2t & -1 + t^2 \end{vmatrix} = 2t^3 - t + 2.$$

Derivace je $6t^2 - 1$, extrémy tedy nastávají pro $t = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$, vzhledem k tomu, že uvažujeme pouze nezáporný čas, vyšetřujeme pouze $t = \frac{1}{\sqrt{6}}$, jde o minimum, navíc je hodnota determinantu v tomto bodě kladná a menší, než hodnota v bodě 0 (krajní bod intervalu, na kterém hledáme extrém), je tedy o globální minimum obsahu v čase. $\square$

6.36. V devět hodin ráno vylezl starý vlk z nory N a v rámci ranní rozcvičky začal běhat proti směru hodinových ručiček po kružnici o poloměru 1km, kolem svého oblíbeného pařezu P a to rovnoměrnou rychlostí 4 km/h. Ve stejnou dobu vyrazila Karkulka z domu D k babičce sídlící v chaloupce C rychlostí 4 km/h (po přímce). Kdy si budou nejblíž a jaká tato vzdálenost bude? Souřadnice (v kilometrech): $N = [2, 3]$, $P = [3, 3]$, $D = [0, 0]$, $C = [5, 5]$.

Řešení. Vlk se pohybuje po jednotkové kružnici, jeho úhlová rychlost je tedy stejná jako jeho absolutní rychlost a jeho dráhu můžeme v závislosti na čase popsat následujícími parametrickými rovnicemi:

$$x(t) = 2 - \cos(4t),\ \ y(t) = 2 - \sin(4t),$$

Karkulka se pak pohybuje po dráze

$$x(t) = 2\sqrt{2}t,\ \ y(t) = 2\sqrt{2}t.$$

Nalezněme extrémy (čtverce) vzdálenosti ρ jejich drah v čase:

$$\begin{aligned}\rho(t) =& (2 - \cos(4t) - 2\sqrt{2}t)^2 + (2 - \sin(4t) - 2\sqrt{2}t)^2\\ \rho'(t) =& 16(\cos(4t) - \sin(4t))(\sqrt{2}t - 1) + 32t+\\ &+ 4\sqrt{2}(\cos(4t) + \sin(4t)) - 16\sqrt{2}\end{aligned}$$

Řešit algebraicky rovnici $\rho'(t) = 0$ se nám nepodaří (ani to nelze), zbývá pouze najít řešení numericky (pomocí výpočetního softwaru). Zjistíme, že lokální minima nastávají pro $t \doteq 0,31$ a poté pro $t \doteq 0,97$, kdy bude vzdálenost vlka a Karkulky asi 5 metrů. Je zřejmé, že půjde i o globální minimum.

Situace, kdy neumíme explicitně vyřešit daný problém je v praxi velmi častá a použití numerických metod výpočtu tedy má velký význam. $\square$

6.37. Pro jaká $a \in \mathbb{R}$ je kubický polynom P vyhovující vztahům $P(0) = 1$, $P'(0) = 1$, $P(1) = 2a + 2$, $P'(1) = 5a + 1$, monotónní funkcí na celém $\mathbb{R}$?

Řešení. Z podmínek $P(0) = 1$ a $P'(0) = 1$ plyne, že $P(x) = bx^3 + cx^2 + x + 1$, kde $b, c \in \mathbb{R}$, zbylé dvě podmínky určují dvě rovnice pro neznámé b a c: $b + c + 2 = 2a + 2$, $3b + 2c + 1 = 5a + 1$ s jediným řešením $b = c = a$, polynom vyhovující zadaným podmínkám je tedy $P(x) = ax^3 + ax^2 + x + 1$. Podmínka na to, aby byl monotónní funkcí na celém $\mathbb{R}$, je ekvivalentní tomu, že polynom nemá lokální extrém.

Extrémy mohou nastat v kritických bodech, tedy v nulových bodech derivace. Pokud tedy derivace nebude mít nulových bodů, fukce bude monotónní. Derivace je

$$P'(x) = 3ax^2 + 2ax + 1$$

a nebude mít nulových bodů, bude-li její diskriminant záporný. Navíc inflexní body $P(x)$ odpovídají bodům, kde je nulová první i druhá derivace (a nenulová třetí, což je v případě kubického polynomu automatické), tedy násobným kořenům $P'(x)$. $P'(x)$ má násobné kořeny, právě když je její diskriminant nulový. Celkem je podmínka monotónnosti $P(x)$ ekvivalentní nekladnosti diskriminantu $P'(x)$, tedy

$$\begin{aligned} 4a^2 - 12a &\leq 0 \\ 4a(a-3) &\leq 0, \end{aligned}$$

což odpovídá $a \in \langle 0, 3\rangle$. Pro $a = 0$ však P sice je monotónní funkcí, nikoliv však kubickým polynomem. Dané podmínky splňují právě $a \in (0, 3\rangle$. $\square$

6.38. Určete parametr $c \in \mathbb{R}$ tak, aby tečna ke grafu funkce $\frac{ln(c \cdot x)}{\sqrt{x}}$ v bodě $[1, 0]$ procházela bodem $[2, 2]$.

Řešení. Podle zadání má mít tečna směrnici 2 ($\frac{2-0}{2-1}$). Směrnice je určena derivací funkce v daném bodě, dostáváme tedy podmínku

$$\frac{2 - \ln(cx)}{2\sqrt{x}}(1) = 2, \text{ neboli } 2 - \ln(c) = 4,$$

tedy $c = \frac{1}{e^2}$. Pro $c = \frac{1}{e^2}$ je však hodnota fce $\frac{ln(c \cdot x)}{\sqrt{x}}$ v bodě 1 rovna -2. Tedy žádné takové c neexistuje. $\square$

Nyní několik „klasických“ příkladů, ve kterých budeme vyšetřovat průběh různých funkcí.

6.39. Vyšetřete průběh funkce

$$\frac{x}{\ln(x)},$$

a načrtněte její graf.

Řešení.

i) Nejprve určíme definiční obor funkce: $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

ii) Nalezneme intervaly monotónnosti funkce: nejprve nalezneme nulové body derivace:

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} = 0$$

Tato rovnice má kořen e. Dále vidíme, že $f'(x)$ je na intervalu $(0, 1)$ i $(1, e)$ záporná, tedy je $f(x)$ na intervalu $(0, 1)$ i na $(1, e)$ klesající, dále je $f'(x)$ na intervalu (e, ∞) kladná a tedy $f(x)$ rostoucí. Má tedy funkce f jediný extrém v bodě e a to minimum. (také bychom o tom mohli rozhodnout pomocí znaménka druhé derivace funkce f v bodě e, je totiž $f^{(2)}(e) > 0$)

iii) Určíme inflexní body:

$$f^{(2)}(x) = \frac{\ln(x) - 2}{x \ln^3(x)} = 0$$

Tato rovnice má kořen e^2, který musí být inflexním bodem (extrém to již být nemůže vzhledem k předchozímu bodu).

iv) Asymptoty. Funkce má asymptotu přímku $x = 1$. Dále hledejme asymptoty s konečnou směrnicí k:

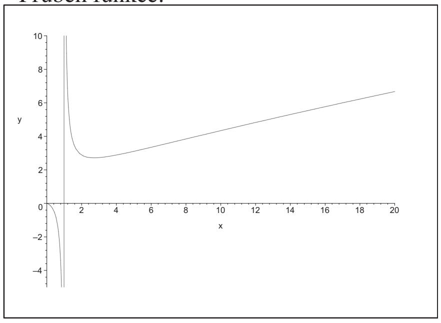
$$k = lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\ln(x)}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0.$$

Pokud asymptota existuje, má tedy směrnici 0. Pokračujme tedy ve výpočtu

$$\lim_{\times\to\infty} \frac{x}{\ln(x)} - 0 \cdot x = \lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty,$$

a protože limita není konečná, asymptota s konečnou směrnicí neexistuje.

Průběh funkce:



□

6.40. Vyšetřete průběh funkce $\frac{\ln(x)}{x}$ (tj. **mimo jiné** najít extrémy, inflexní body, asymptoty) a načrtněte její graf.

Řešení. Def. obor $\mathbb{R}^+$, globální maximum $x = e$, infl. bod $x = \sqrt{e^3}$, rostoucí na int $(0, e)$, klesající na (e, ∞), konkávní $(0, \sqrt{e^3}$, konvexní $(\sqrt{e^3}, \infty)$, asymptoty $x = 0$ a $y = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. □

6.41. Vyšetřete průběh funkce (**mimo jiné** najít extrémy, inflexní body, asymptoty).

$$\ln(x^2 - 3x + 2) + x.$$

Řešení. Def. obor $\mathbb{R} \setminus \langle 1, 2\rangle$. Lokální maximum $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, na celém def. oboru konkávní, asymptoty $x = 1$, $x = 2$. □

6.42. Vyšetřete průběh funkce (**mimo jiné** najít extrémy, inflexní body, asymptoty).

$$\ln(x^2 - 3x + 2) + x.$$

Řešení. Def. obor $\mathbb{R} \setminus \langle 1, 2\rangle$. Lokální maximum $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, na celém def. oboru konkávní, asymptoty $x = 1$, $x = 2$. □

6.43. Vyšetřete průběh funkce (**mimo jiné** nalezněte extrémy, inflexní body a asymptoty):

$$(x^2 - 2)e^{x^2-1}.$$

Řešení. Def. obor $\mathbb{R}$. Lokální minima v -1, 1, maximum v 0. Funkce sudá. Inflexní body $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, bez asymptot. □

6.44. Vyšetřete průběh funkce (**mimo jiné** nalezněte extrémy, inflexní body a asymptoty):

$$ln(2x^2 - x - 1).$$

Řešení. Def. obor $\mathbb{R} \setminus \langle -\frac{1}{2}, 1\rangle$. Glob. extrémy nemá. Bez inflexních bodů, asymptoty $x = -\frac{1}{2}$, $x = 1$. □

6.45. Vyšetřete průběh funkce (**mimo jiné** nalezněte extrémy, inflexní body a asymptoty):

$$\frac{x^2 - 2}{x - 1}.$$

Řešení. Def. obor $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Bez extrémů. Bez infl. bodů, na int. $(-\infty, 1)$ konvexní, $(1, \infty)$ konkávní, Asymptota bez směrnice $x = 1$. Asymptota se směrnicí $y = x + 1$. □

B. Integrování

6.46. Vypočtěte:

i) $\int x \cos x \, \mathrm{d}x$
ii) $\int \ln x \, \mathrm{d}x$

Řešení. V obou případech řešíme metodou per partes.

i)

$$\begin{aligned}\int x \cos x \, \mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{vmatrix} = x \sin x - \int \sin x \, \mathrm{d}x = \\ &= x \sin x + \cos x + C.\end{aligned}$$

ii)

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{vmatrix} = x \ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + C.$$

□

6.47. Určete integrály

- $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(x) - \cos^2(x)}.$$
- $$\int x^2\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$$

Řešení.

- V tomto příkladu zvolíme substituci $t = \operatorname{tg} x$, kterou lze často s výhodou uplatnit.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(x) - \cos^2(x)} &= \left| \begin{array}{l} \text{substituce} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = (1+\operatorname{tg}^2(x))\,\mathrm{d}x = (1+t^2)\,\mathrm{d}x \\ \sin^2(x) = \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{1+\operatorname{tg}^2(x)} = \frac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2(x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(x)} = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right| = \\
&= \int \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1} = \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\operatorname{tg}(x)-1}{\operatorname{tg}+1}\right) + C
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & u = 2x \\ v' = \sqrt{2x+1} & v = \frac{1}{3}(2x+1) \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{3}x^2(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}\int x^2\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{2}{9}(2x+1)^{\frac{3}{2}},
\end{aligned}$$

  což můžeme chápat jako rovnici, kde neznámou je hledaný integrál. Převedením na jednu stranu pak

$$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{7}x^2(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7}\int x\sqrt{2x+1} = \\
& \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sqrt{2x+1} & v = \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{7}x^2(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7}\left(\frac{1}{3}x\sqrt{2x+1} - \frac{1}{3}\int (2x+1)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= \frac{1}{7}x^2(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{21}x\sqrt{2x+1} + \frac{2}{105}(2x+1)^{\frac{5}{2}} = \\
&= \frac{1}{7}x^2(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{35}x(2x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{105}(2x+1)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

□

6.48. Vypočtěte:

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x\,\mathrm{d}x$
ii) $\int \sin^2 x \sin 2x\,\mathrm{d}x$

Řešení.

i) $\frac{2}{3}$
ii) $\frac{1}{2}\sin^4 x$

□

6.49. Dokažte, že

$$\frac{1}{2}\sin^4 x = -\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{16}\cos(4x) + \frac{3}{16}.$$

Řešení. Funkce na pravé a levé straně rovnosti mají shodné derivace, tudíž se liší o reálnou konstantu. Tuto konstantu určíme porovnáním funkčních hodnot v jednom bodě, například bodě 0. Hodnota obou funkcí je v nule nulová, jsou si tedy rovny. □

C. Integrace racionálních lomených funkcí

6.50. Spočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 2}\,\mathrm{d}x.$$

6.51. Vypočtěte integrál

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{1 - \cos^2 x}\,\mathrm{d}t.$$

Řešení. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\ln(2)}{2-\ln(2)}\right)$. □

6.52. Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{d}x}{e^{2x} - 3e^x}.$$

Řešení. $-\frac{1}{6} - \frac{2}{9}\ln(2)$. □

D. Délky, obsahy, povrchy, objemy

6.53. Odvoďte vzorec pro výpočet povrchu a objemu kužele.

6.54. Určete délku křivky dané parametricky

$$x = \sin^2(t), \quad y = \cos^2(t),$$

pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$.

Řešení. Možno počítat i přímo (jedná se o část přímky $y = 1 - x$). $\sqrt{2}$. □

6.55. Určete délku křivky dané parametricky

$$x = t^2, \quad y = t^3$$

pro $t \in \langle 0, \sqrt{5}\rangle$.

Řešení. $\frac{335}{27}$ □

6.56. Určete plochu ležící napravo od přímky $x = 3$ a dále ohraničenou grafem funkce $y = \frac{1}{x^3-1}$ a osou x.

Řešení. Plocha je dána nevlastním integrálem $\int_1^\infty \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$. Vypočteme jej metodou rozkladu na parciální zlomky:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3-1} &= \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{C}{x-1} \\
1 &= (Ax+B)(x-1) + C(x^2+x+1) \\
x = 1 &\implies C = \frac{1}{3} \\
x^0 : \ 1 = C - B &\implies B = -\frac{2}{3} \\
x^2 : \ 0 = A + C &\implies A = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

a můžeme psát

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^\infty \left(\frac{1}{(x-1)} - \frac{x+2}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x$$

Nyní určíme zvlášť neurčitý integrál $\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int \frac{x+\frac{1}{2}}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} \text{substituce u prvního integrálu} \\ t = x^2+x+1 \\ \mathrm{d}t = 2(x+\frac{1}{2})\,\mathrm{d}x \end{array}\right| \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \left|\begin{array}{l} \text{substituce u prvního integrálu} \\ s = x+\frac{1}{2} \\ \mathrm{d}s = \mathrm{d}x \end{array}\right| \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{3}{2}\int \frac{1}{s^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}s = \\
&= \frac{1}{2}\ln((x^2+x+1) + \frac{3}{2}\frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}s\right)^2+1}\,\mathrm{d}s = \left|\begin{array}{l} \text{substituce u druhého integrálu} \\ u = \frac{2}{\sqrt{3}}s \\ \mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{3}}s\,\mathrm{d}s \end{array}\right| \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + 2\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan(u) = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

Celkem pak pro nevlastní integrál můžeme psát:

$$\begin{aligned}
&\int_1^\infty \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\lim_{\delta\to\infty}\left[\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_3^\delta = \\
&= \frac{1}{3}\lim_{\delta\to\infty}\left(\frac{1}{3}\ln|\delta-1| - \frac{1}{2}\ln(\delta^2+\delta+1) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\delta+1}{\sqrt{3}}\right)\right) - \\
&\quad -\frac{1}{3}\ln(2) + \frac{1}{6}\ln(13) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right) = \\
&= \frac{1}{6}\ln(13) - \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right) -
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{3}\lim_{\delta\to\infty} ln\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right| - \frac{1}{3}\lim_{\delta\to\infty}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\delta+1}{\sqrt{3}}\right) =$$
$$= \frac{1}{6}\ln(13) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{3}\ln(2) - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

□

6.57. Určete povrch a objem rotačního paraboloidu, který vznikne rotací části paraboly $y = 2x^2$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$ kolem osy y.

Řešení. Vzorce uvedené v textech platí pro rotaci křivek kolem osy x! Je tedy nutno buď integrovat podle danou křivku neznámé y, nebo transformovat.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \pi \\ S &= 2\pi\int_0^2 \sqrt{\frac{x}{2}}(\sqrt{1+\frac{1}{8x}})\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^2 \sqrt{\frac{x}{2}+\frac{1}{16}}\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\frac{17\sqrt{17}-1}{24}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

□

6.58. Vypočtěte obsah S obrazce složeného ze dvou částí roviny vymezených přímkami $x = 0$, $x = 1$, $x = 4$, osou x a grafem funkce

$$y = \tfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

Řešení. Nejprve si uvědomme, že

$$\tfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}} < 0, \quad x \in [0,1), \qquad \tfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}} > 0, \quad x \in (1,4]$$

a že

$$\lim_{x\to 1-} \tfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1+} \tfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = +\infty.$$

První část obrazce (ležící pod osou x) je proto ohraničena křivkami

$$y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad y = \tfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$$

s obsahem daným nevlastním integrálem

$$S_1 = -\int_0^1 \tfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx;$$

zatímco druhá část (nad osou x) vymezená křivkami

$$y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4, \quad y = \tfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$$

má obsah

$$S_2 = \int_1^4 \tfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx.$$

Neboť

$$\int \tfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x-1)^2} + C,$$

jako součet $S_1 + S_2$ získáváme

$$S = -\lim_{x\to 1-}\left(\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x-1)^2} - \tfrac{3}{2}\right) + \lim_{x\to 1+}\left(\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{9} - \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x-1)^2}\right) =$$
$$\tfrac{3}{2}\left(1 + \sqrt[3]{9}\right).$$

Ukázali jsme mj. to, že uvedený obrazec má konečný obsah, přestože není (shora ani zdola) ohraničený. (Blížíme-li se k $x = 1$ zprava, příp. zleva, jeho výška roste nade všechny meze.) Připomeňme zde neurčitý výraz typu $0 \cdot \infty$. Obrazec je totiž ohraničený, když se omezíme na $x \in [0, 1-\delta] \cup [1+\delta, 4]$ při libovolně malém $\delta > 0$. □

6.59. Určete průměrnou rychlost v_p tělesa v časovém intervalu $[1, 2]$, pokud je jeho rychlost

$$v(t) = \tfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t \in [1, 2].$$

Jednotky neuvažujte.

Řešení. K vyřešení příkladu si stačí uvědomit, že hledaná průměrná rychlost je střední hodnota funkce v na intervalu $[1, 2]$. Platí tak

$$v_p = \tfrac{1}{2-1} \int\limits_1^2 \tfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \int\limits_2^5 \tfrac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{5} - \sqrt{2},$$

přičemž $1 + t^2 = x$, $t\, dt = dx/2$. □

6.60. Vypočítejte délku s části křivky označované jako traktrix dané parametrickým popisem

$$f(t) = r\cos t + r\ln\left(\operatorname{tg}\tfrac{t}{2}\right), \quad g(t) = r\sin t, \quad t \in [\pi/2, a],$$

kde $r > 0$, $a \in (\pi/2, \pi)$.

Řešení. Protože

$$f'(t) = -r\sin t + \tfrac{r}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}\cdot\cos^2\frac{t}{2}} = -r\sin t + \tfrac{r}{\sin t} = \tfrac{r\cos^2 t}{\sin t}, \quad g'(t) = r\cos t$$

na intervalu $[\pi/2, a]$, pro délku s dostáváme

$$s = \int\limits_{\pi/2}^{a} \sqrt{\tfrac{r^2\cos^4 t}{\sin^2 t} + r^2\cos^2 t}\, dt = \int\limits_{\pi/2}^{a} \sqrt{\tfrac{r^2\cos^2 t}{\sin^2 t}}\, dt =$$

$$-\, r \int\limits_{\pi/2}^{a} \tfrac{\cos t}{\sin t}\, dt = -r\left[\ln(\sin t)\right]_{\pi/2}^{a} = -r\ln(\sin a).$$

□

6.61. Spočtěte objem tělesa vzniklého otáčením omezené plochy, jejíž hranicí je křivka $x^4 - 9x^2 + y^4 = 0$, kolem osy x.

Řešení. Pokud je $[x, y]$ bodem křivky $x^4 - 9x^2 + y^4 = 0$, zřejmě tato křivka prochází rovněž body $[-x, y]$, $[x, -y]$, $[-x, -y]$. Je tedy souměrná vzhledem k oběma osám x, y. Pro $y = 0$ dostáváme $x^2(x-3)(x+3) = 0$, tj. osu x protíná hraniční křivka v bodech $[-3, 0]$, $[0, 0]$, $[3, 0]$. V prvním kvadrantu ji pak můžeme vyjádřit jako graf funkce

$$f(x) = \sqrt[4]{9x^2 - x^4}, \quad x \in [0, 3].$$

Hledaný objem je proto dvojnásobkem (zde uvažujeme $x > 0$) integrálu

$$\int\limits_0^3 \pi f^2(x)\, dx = \pi \int\limits_0^3 \sqrt{9x^2 - x^4}\, dx.$$

Pomocí substituce $t = \sqrt{9 - x^2}$ $(x dx = -t dt)$ pak snadno spočítáme

$$\int\limits_0^3 \sqrt{9x^2 - x^4}\, dx = \int\limits_0^3 x \cdot \sqrt{9 - x^2}\, dx = -\int\limits_3^0 t^2\, dt = 9,$$

a tak obdržíme výsledek 18π. □

E. Aplikace integrálního kriteria konvergence

Nyní se opět vraťme k (číselným) řadám. Díky intergrálnímu kriteriu konvergence (viz **??**) umíme rozhodnout o konvergenci širší třídy řad:

6.62. Rozhodněte, zda následující sumy konvergují či divergují:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Řešení. Všimněme si nejprve, že ani u jedné z uvažovaných řad neumíme o její konvergenci rozhodnout na základě podílového či odmocninového kriteria (všechny limity $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ jsou rovny 1). Pomocí integrálního kriteria pro konvergenci řad pak dostáváme:

a)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)}\, \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t = \lim_{\delta\to\infty} [\ln(t)]_0^{\delta} = \infty,$$

daná řada tedy diverguje.

b)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x = \lim_{\delta\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\delta} = 1,$$

a daná řada tedy konverguje.

□

6.63. Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}.$$

Řešení. Funkce

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}, \quad x \in [1, +\infty)$$

je zjevně na svém definičním oboru kladná a nerostoucí, a proto řada v zadání konverguje, právě když konverguje integrál $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$. Užitím substituce $y = \ln(x+1)$ (kdy je $dy = dx/(x+1)$) můžeme vyčíslit

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}\, dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{y^2}\, dy = \frac{1}{\ln 2}.$$

Řada tedy konverguje. □

Pomocí věty **??** „o záměně limity a integrálu posloupnosti stejnoměrně konvergentních funkcí“ nyní sečteme číselnou řadu

6.64. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

Nápověda: $\int\limits_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{n+1}} = \frac{1}{n2^n}$.

Řešení. Na intervalu $(2, \infty)$ konverguje řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}}$ stejnoměrně. To plyne například z Weierstrasova kriteria: každá z funkcí $\frac{1}{x^{n+1}}$ je klesající na intervalu $(2, \infty)$, její hodnota tedy nepřevyšuje $\frac{1}{2^{n+1}}$; řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ je ovšem konvergentní (jedná se o geometrickou řadu s koeficientem $\frac{1}{2}$. Podle Weierstrasova kriteria tedy řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}}$ tedy konverguje stejnoměrně. Dokonce umíme výslednou funkci explicitně vyjádřit. Její hodnota v libovolném $x \in (2, \infty)$ je hodnotou geometrické řady s koeficientem $\frac{1}{x}$, označíme-li tedy limitu jako $f(x)$, je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}} = \frac{1}{x^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{x(x-1)}$$

Použitím (**??**) (3) dostáváme

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{n+1}} \\
&= \int_2^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_2^{\infty} \frac{1}{x(x-1)} \, \mathrm{d}x = \\
&= \lim_{\delta \to \infty} \int_2^{\delta} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \\
&= \lim_{\delta \to \infty} [(\ln(\delta - 1) - \ln(\delta) - \ln(1) + \ln(2)] = \\
&= \lim_{\delta \to \infty} \left[\ln \left(\frac{\delta - 1}{\delta} \right) \right] + \ln(2) = \ln \left(\lim_{\delta \to \infty} \frac{\delta - 1}{\delta} \right) + \ln(2) = \\
&= \ln(2)
\end{aligned}$$

□

6.65. Uvažme funkci $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$. Určete

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Řešení. Obdobně jako v předchozím případě z Weierstrasova kriteria pro stejnoměrnou konvergenci vypývá, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $(\ln 2, \ln 3)$, neboť každá z funkcí ne^{-nx} je menší než $\frac{n}{2^n}$ na $(\ln 2, \ln 3)$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ konverguje, což plyne třeba z podílového kriteria pro konvergenci řad:

$$\lim_{n \to \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)2^{-(n+1}}{n2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}.$$

Celkem podle (**??**) (3) platí

$$\begin{aligned}
\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) \, \mathrm{d}x &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\ln 2}^{\ln 3} ne^{-nx} \, \mathrm{d}x = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} [-e^{-nx}]_{\ln 2}^{\ln 3} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

6.66. Určete následující limitu (postup výpočtu zdůvodněte):

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\cos\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Určeme nejprve $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos(\frac{x}{n})}{(1+\frac{x}{n})^n}$. Posloupnost těchto funkcí limituje bodově a máme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(\frac{x}{n})}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\overset{(??)}{=}\frac{1}{e^x}$$

Předpokládejme, že daná posloupnost, konverguje stejnoměrně. Potom podle (**??**)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\cos\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\right]\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{e^x}=1\end{aligned}$$

Ověření stejnoměrné konvergence dané posloupnosti necháváme na čtenáři (podotýkáme jenom, že diskuze je složitější než v předchozích příkladech).

□

F. Doplňující příklady k celé kapitole

6.67. Vyšetřete průběh funkce $\frac{\ln(x)}{x}$ (tj. **mimo jiné** najít extrémy, inflexní body, asymptoty) a načrtněte její graf.

Řešení. Def. obor $\mathbb{R}^+$, globální maximum $x = e$, infl. bod $x = \sqrt{e^3}$, rostoucí na int $(0, e)$, klesající na (e, ∞), konkávní $(0, \sqrt{e^3}$, konvexní $(\sqrt{e^3}, \infty)$, asymptoty $x = 0$ a $y = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. $\square$

6.68. Vyšetřete průběh funkce (**mimo jiné** najít extrémy, inflexní body, asymptoty).

$$\ln(x^2 - 3x + 2) + x.$$

Řešení. Def. obor $\mathbb{R} \setminus \langle 1, 2\rangle$. Lokální maximum $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, na celém def. oboru konkávní, asymptoty $x = 1$, $x = 2$. $\square$

6.69. Vyšetřete průběh funkce (**mimo jiné** najít extrémy, inflexní body, asymptoty).

$$\ln(x^2 - 3x + 2) + x.$$

Řešení. Def. obor $\mathbb{R} \setminus \langle 1, 2\rangle$. Lokální maximum $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, na celém def. oboru konkávní, asymptoty $x = 1$, $x = 2$. $\square$

6.70. Vyšetřete průběh funkce (**mimo jiné** nalezněte extrémy, inflexní body a asymptoty):

$$(x^2 - 2)e^{x^2-1}.$$

Řešení. Def. obor $\mathbb{R}$. Lokální minima v -1, 1, maximum v 0. Funkce sudá. Inflexní body $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, bez asymptot. $\square$

6.71. Vyšetřete průběh funkce (**mimo jiné** nalezněte extrémy, inflexní body a asymptoty):

$$ln(2x^2 - x - 1).$$

Řešení. Def. obor $\mathbb{R} \setminus \langle -\frac{1}{2}, 1\rangle$. Glob. extrémy nemá. Bez inflexních bodů, asymptoty $x = -\frac{1}{2}$, $x = 1$. $\square$

6.72. Vyšetřete průběh funkce (**mimo jiné** nalezněte extrémy, inflexní body a asymptoty):

$$\frac{x^2 - 2}{x - 1}.$$

Řešení. Def. obor $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Bez extrémů. Bez infl. bodů, na int. $(-\infty, 1)$ konvexní, $(1, \infty)$ konkávní, Asymptota bez směrnice $x = 1$. Asymptota se směrnicí $y = x + 1$. $\square$

Integrovani

6.73. Spočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 2}\, \mathrm{d}x.$$

6.74. *6.75.* Vypočtěte integrál

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{1-\cos^2 x}\, \mathrm{d}t.$$

6.76. Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{d}x}{e^{2x}-3e^x}.$$

6.77. Vypočtěte:

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \,\mathrm{d}x$
ii) $\int \sin^2 x \sin 2x \,\mathrm{d}x$

Řešení.

i) $\frac{2}{3}$
ii) $\frac{1}{2}\sin^4 x$

cninne rady $\square$

6.78. Vyčíslete $\cos\frac{\pi}{10}$ s chybou menší než 10^{-5}.

6.79. Pro konvergentní řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+100}}$$

odhadněte chybu aproximace jejího součtu částečným součtem $s_{9\,999}$.

6.80. Bez počítání derivací uveďte Taylorův polynom 4. stupně se středem v bodě $x_0 = 0$ funkce

$$f(x) = \cos x - 2\sin x - \ln(1+x), \quad x \in (-1, 1).$$

Poté rozhodněte, zda je graf funkce f v okolí bodu $[0, 1]$ nad tečnou, pod tečnou.

6.81. Rozviňte funkci

$$y = \tfrac{1}{3-2x}, \quad x \in \left(-\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right)$$

v Taylorovu řadu se středem v počátku.

6.82. Funkci $y = \mathrm{e}^x$ definovanou na celé reálné přímce vyjádřete jako nekonečný polynom se členy tvaru $a_n(x-1)^n$ a funkci $y = 2^x$ definovanou na $\mathbb{R}$ vyjádřete jako nekonečný polynom se členy $a_n x^n$.

6.83. Nalezněte funkci f, k níž pro $x \in \mathbb{R}$ konverguje posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \tfrac{n^2x^3}{n^2x^2+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Je tato konvergence stejnoměrná na $\mathbb{R}$?

6.84. Konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{n\,x}{n^4+x^2}, \quad \text{kde} \quad x \in \mathbb{R},$$

stejnoměrně na celé reálné ose?

6.85. Z Taylorova rozvoje se středem v počátku funkce $y = \sin x$ získejte pomocí derivace Taylorův rozvoj funkce $y = \cos x$.

6.86. Odhadněte

(a) kosinus deseti stupňů s přesností alespoň 10^{-5};
(b) určitý integrál $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^4+1}$ s přesností alespoň 10^{-3}.

6.87. Určete mocninný rozvoj se středem v bodě $x_0 = 0$ funkce

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6.88. Najděte analytickou funkci, jejíž Taylorova řada je

$$x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \cdots,$$

přičemž $x \in [-1, 1]$.

6.89. Ze znalosti součtu geometrické řady odvoďte Taylorovu řadu funkce

$$y = \tfrac{1}{5+2x}$$

DOO se středem v počátku. Poté určete její poloměr konvergence.

6.90. Nechť je pohyb tělesa (dráha hmotného bodu) popsán(a) funkcí

$$s(t) = -(t-3)^2 + 16, \quad t \in [0, 7]$$

v jednotkách m, s. Stanovte

(a) počáteční (tj. v čase $t = 0$ s) rychlost tělesa;
(b) čas a polohu, ve kterých má těleso nulovou rychlost;
(c) rychlost a zrychlení tělesa v čase $t = 4$ s.

Doplňme, že rychlost je derivace dráhy a zrychlení je derivace rychlosti.

6.91. Zvolte rozměry otevřeného bazénu se čtvercovým dnem o objemu 32 m^3 tak, aby na natření jeho stěn a dna bylo potřeba nejmenší množství barvy.

6.92. Číslo 28 rozložte na 2 nezáporné sčítance tak, aby součet druhé mocniny prvního sčítance a třetí mocniny druhého sčítance byl minimální.

6.93. Pomocí první derivace nalezněte reálné číslo $a > 0$, pro které je součet $a + 1/a$ minimální. Poté tuto úlohu řešte bez použití diferenciálního počtu.

6.94. Vepište do půlkruhu o poloměru r obdélník s největším možným obvodem. Uveďte jeho obvod.

6.95. Existuje-li mezi obdélníky o obvodu $4c$ obdélník s maximálním obsahem, stanovte délky jeho stran.

6.96. Zjistěte výšku v a poloměr podstavy r nejobjemnějšího kužele, který se vejde do koule o poloměru R.

6.97. Ze všech trojúhelníků s konstantním obvodem $o > 0$ vyberte ten, jenž má největší obsah.

6.98. Na parabole $2x^2 - 2y = 9$ najděte body s minimální vzdáleností od počátku soustavy souřadnic.

6.99. Vaším úkolem je vyrobit jednolitrovou plechovou konzervu „obvyklého“ tvaru rotačního válce tak, aby na její výrobu bylo potřeba co nejméně plechu. Určete správný poměr mezi její výškou v a poloměrem podstavy r.

6.100. Stanovte obsah rovinného obrazce vymezeného grafem funkce

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

a přímkami

$$y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2.$$

6.101. Zjistěte, jaký obsah má omezený obrazec s hranicí tvořenou parabolou $y = x^2 + 2x - 3$ a osou x.

6.102. Určete obsah S oblasti ohraničené křivkami

$$y = \mathrm{e}^{-2x} - 1, \quad y = \mathrm{e}^{-x} + 1, \quad x = 0.$$

6.103. Vypočtěte obsah ohraničeného rovinného obrazce vymezeného křivkami $y^2 = x^3$, $y^2 = 8(6-x)^3$.

6.104. V jakém poměru jsou obsahy 2 částí kruhu $x^2 + y^2 \le 8$ oddělené parabolou $y^2 = 2x$?

6.105. Hmotný bod se pohybuje po přímce v jednom směru, a to rychlostí

$$v(t) = \tfrac{1+t^2}{1+t^4}, \quad t \in [-1, 1].$$

Jakou dráhu urazí mezi časovými okamžiky $t_1 = -1$, $t_2 = 1$?

6.106. Nechť je dána válcová nádrž na dešťovou vodu s průměrem podstavy 1 m a výškou 2 m, která je naplněna po okraj. Vznikne-li v jejím dně kruhový otvor o průměru 1 cm, přibližně určete, za jak dlouho z ní veškerá voda vyteče. Je znám vztah pro rychlost vytékání $v = c\sqrt{h}$, kde h je výška hladiny kapaliny a c je konstantní s experimentálně zjištěným rozsahem hodnot $2,65 < c < 2,7$.

6.107. Stanovte obsah S neomezené oblasti s hranicí tvořenou grafem funkce

$$y = \tfrac{1}{x^2+x-2}, \quad x \in [2, +\infty)$$

a přímkami $x = 2$, $y = 0$.

6.108. Spočítejte délku jedné větve prosté cykloidy při poloměru zadávající kružnice $r > 0$, tj. délku křivky

$$f(t) = r(t - \sin t), \quad g(t) = r(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

6.109. Určete délku grafu funkce $f(x) = \ln(\cos x)$ na intervalu $[0, a]$, přičemž $0 < a < \pi/2$.

6.110. Vypočtěte délku grafu funkce

$$\cosh x = \tfrac{e^x+e^{-x}}{2}$$

na intervalu $[-1, 2]$.

6.111. Spočtěte délku s grafu funkce $y = \ln\left(1 - x^2\right)$ pro $x \in [0, 1/2]$.

6.112. Stanovte objem V tělesa vzniklého otáčením plochy ohraničené grafy funkcí $f(x) = 2x - x^2$ a $g(x) = 0$ kolem osy x.

6.113. Vypočítejte objem tělesa vymezeného eliptickým paraboloidem

$$z = \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{4}$$

a rovinou $z = 1$.

6.114. Určete objem tělesa ohraničeného plochou, která vznikne rotací křivky $xy + 1 = x^2 + y^2$ okolo x-ové osy.

6.115. Pomocí určitého integrálu odvoďte vzorce pro objem V a obsah pláště S rotačního komolého kužele s podstavami o poloměrech r_1 a r_2 a výškou v.

6.116. Vypočtěte obsah pláště rotačního tělesa vzniklého rotací kolem osy x plochy ohraničené grafem funkce $y = \frac{x^3}{6}$, osou x a přímkou $x = 2$.

6.117. Stanovte obsah plochy, která vznikne otáčením části křivky $y^2 = 2x$ vyťaté přímkou $2x = 3$ okolo x-ové osy.

6.118. Stanovte obsah rovinného obrazce vymezeného grafem funkce

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$$

a přímkami

$$y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2.$$

6.119. Zjistěte, jaký obsah má omezený obrazec s hranicí tvořenou parabolou $y = x^2 + 2x - 3$ a osou x.

6.120. Určete obsah S oblasti ohraničené křivkami

$$y = e^{-2x} - 1, \quad y = e^{-x} + 1, \quad x = 0.$$

6.121. Vypočtěte obsah ohraničeného rovinného obrazce vymezeného křivkami $y^2 = x^3$, $y^2 = 8(6 - x)^3$.

6.122. V jakém poměru jsou obsahy 2 částí kruhu $x^2 + y^2 \leq 8$ oddělené parabolou $y^2 = 2x$?

6.123. Hmotný bod se pohybuje po přímce v jednom směru, a to rychlostí

$$v(t) = \tfrac{1+t^2}{1+t^4}, \quad t \in [-1, 1].$$

Jakou dráhu urazí mezi časovými okamžiky $t_1 = -1$, $t_2 = 1$?

6.124. Nechť je dána válcová nádrž na dešťovou vodu s průměrem podstavy 1 m a výškou 2 m, která je naplněna po okraj. Vznikne-li v jejím dně kruhový otvor o průměru 1 cm, přibližně určete, za jak dlouho z ní veškerá voda vyteče. Je znám vztah pro rychlost vytékání $v = c\sqrt{h}$, kde h je výška hladiny kapaliny a c je konstantní s experimentálně zjištěným rozsahem hodnot $2,65 < c < 2,7$.

6.125. Stanovte obsah S neomezené oblasti s hranicí tvořenou grafem funkce

$$y = \frac{1}{x^2+x-2}, \quad x \in [2, +\infty)$$

a přímkami $x = 2$, $y = 0$.

6.126. Spočítejte délku jedné větve prosté cykloidy při poloměru zadávající kružnice $r > 0$, tj. délku křivky

$$f(t) = r(t - \sin t), \quad g(t) = r(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

6.127. Určete délku grafu funkce $f(x) = \ln(\cos x)$ na intervalu $[0, a]$, přičemž $0 < a < \pi/2$.

6.128. Vypočtěte délku grafu funkce

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

na intervalu $[-1, 2]$.

6.129. Spočtěte délku s grafu funkce $y = \ln\left(1 - x^2\right)$ pro $x \in [0, 1/2]$.

6.130. Stanovte objem V tělesa vzniklého otáčením plochy ohraničené grafy funkcí $f(x) = 2x - x^2$ a $g(x) = 0$ kolem osy x.

6.131. Vypočítejte objem tělesa vymezeného eliptickým paraboloidem

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$$

a rovinou $z = 1$.

6.132. Určete objem tělesa ohraničeného plochou, která vznikne rotací křivky $xy + 1 = x^2 + y^2$ okolo x-ové osy.

6.133. Pomocí určitého integrálu odvoďte vzorce pro objem V a obsah pláště S rotačního komolého kužele s podstavami o poloměrech r_1 a r_2 a výškou v.

6.134. Vypočtěte obsah pláště rotačního tělesa vzniklého rotací kolem osy x plochy ohraničené grafem funkce $y = \frac{x^3}{6}$, osou x a přímkou $x = 2$.

6.135. Stanovte obsah plochy, která vznikne otáčením části křivky $y^2 = 2x$ vyťaté přímkou $2x = 3$ okolo x-ové osy.

6.136. Nechť je pohyb tělesa (dráha hmotného bodu) popsán(a) funkcí

$$s(t) = -(t - 3)^2 + 16, \quad t \in [0, 7]$$

v jednotkách m, s. Stanovte

(a) počáteční (tj. v čase $t = 0$ s) rychlost tělesa;
(b) čas a polohu, ve kterých má těleso nulovou rychlost;
(c) rychlost a zrychlení tělesa v čase $t = 4$ s.

Doplňme, že rychlost je derivace dráhy a zrychlení je derivace rychlosti.

6.137. Stanovte obsah rovinného obrazce vymezeného grafem funkce

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$$

a přímkami

$$y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2.$$

6.138. Zjistěte, jaký obsah má omezený obrazec s hranicí tvořenou parabolou $y = x^2 + 2x - 3$ a osou x.

6.139. Určete obsah S oblasti ohraničené křivkami

$$y = e^{-2x} - 1, \quad y = e^{-x} + 1, \quad x = 0.$$

6.140. Vypočtěte obsah ohraničeného rovinného obrazce vymezeného křivkami $y^2 = x^3$, $y^2 = 8(6-x)^3$.

6.141. V jakém poměru jsou obsahy 2 částí kruhu $x^2 + y^2 \leq 8$ oddělené parabolou $y^2 = 2x$?

6.142. Hmotný bod se pohybuje po přímce v jednom směru, a to rychlostí

$$v(t) = \tfrac{1+t^2}{1+t^4}, \quad t \in [-1, 1].$$

Jakou dráhu urazí mezi časovými okamžiky $t_1 = -1$, $t_2 = 1$?

6.143. Nechť je dána válcová nádrž na dešťovou vodu s průměrem podstavy 1 m a výškou 2 m, která je naplněna po okraj. Vznikne-li v jejím dně kruhový otvor o průměru 1 cm, přibližně určete, za jak dlouho z ní veškerá voda vyteče. Je znám vztah pro rychlost vytékání $v = c\sqrt{h}$, kde h je výška hladiny kapaliny a c je konstantní s experimentálně zjištěným rozsahem hodnot $2,65 < c < 2,7$.

6.144. Stanovte obsah S neomezené oblasti s hranicí tvořenou grafem funkce

$$y = \tfrac{1}{x^2+x-2}, \quad x \in [2, +\infty)$$

a přímkami $x = 2$, $y = 0$.

6.145. Spočítejte délku jedné větve prosté cykloidy při poloměru zadávající kružnice $r > 0$, tj. délku křivky

$$f(t) = r(t - \sin t), \quad g(t) = r(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

6.146. Určete délku grafu funkce $f(x) = \ln(\cos x)$ na intervalu $[0, a]$, přičemž $0 < a < \pi/2$.

6.147. Vypočtěte délku grafu funkce

$$\cosh x = \tfrac{e^x + e^{-x}}{2}$$

na intervalu $[-1, 2]$.

6.148. Spočtěte délku s grafu funkce $y = \ln\left(1 - x^2\right)$ pro $x \in [0, 1/2]$.

6.149. Stanovte objem V tělesa vzniklého otáčením plochy ohraničené grafy funkcí $f(x) = 2x - x^2$ a $g(x) = 0$ kolem osy x.

6.150. Vypočítejte objem tělesa vymezeného eliptickým paraboloidem

$$z = \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{4}$$

a rovinou $z = 1$.

6.151. Určete objem tělesa ohraničeného plochou, která vznikne rotací křivky $xy + 1 = x^2 + y^2$ okolo x-ové osy.

6.152. Pomocí určitého integrálu odvoďte vzorce pro objem V a obsah pláště S rotačního komolého kužele s podstavami o poloměrech r_1 a r_2 a výškou v.

6.153. Vypočtěte obsah pláště rotačního tělesa vzniklého rotací kolem osy x plochy ohraničené grafem funkce $y = \frac{x^3}{6}$, osou x a přímkou $x = 2$.

6.154. Stanovte obsah plochy, která vznikne otáčením části křivky $y^2 = 2x$ vyťaté přímkou $2x = 3$ okolo x-ové osy.

Řešení cvičení

6.5. $1 - \frac{\pi^2}{10^2 \cdot 2} + \frac{\pi^4}{10^4 \cdot 4!}$.

6.6. Chyba náleží do intervalu $(0, 1/200)$.

6.7. $1 - 3x + \frac{7}{24}x^4$; nad tečnou.

6.8. $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} x^n$.

6.9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}}{n!}\,(x-1)^n$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 2}{n!}\,x^n$.

6.10. $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$; ano.

6.11. Nikoli.

6.12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n}$.

6.13. (a) $1 - \frac{\pi^2}{18^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{18^4 \cdot 4!}$; (b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5 \cdot 2^5}$.

6.14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\,n!}\,x^{2n+1}$.

6.15. $y = \operatorname{arctg} x$.

6.16. Právě pro $x \in \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ je

$$\frac{1}{5+2x} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n x^n.$$

6.24.

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n},$$

konverguje pro libovolné reálné x.

6.25.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n},$$

konverguje pro libovolné reálné x.

6.26.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^{n+1}}{n} x^n,$$

konverguje pro $x \in (-1, 1\rangle$.

6.50. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 2) - \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{3}\sqrt{3} \arctan\left(\frac{(2x+1)\sqrt{3}}{3}\right) + C$.

6.73. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 2) - \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{3}\sqrt{3} \arctan\left(\frac{(2x+1)\sqrt{3}}{3}\right) + C$.

6.75. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\ln(2)}{2-\ln(2)}\right)$.

6.76. $-\frac{1}{6} - \frac{2}{9}\ln(2)$.

6.78. $1 - \frac{\pi^2}{10^2 \cdot 2} + \frac{\pi^4}{10^4 \cdot 4!}$.

6.79. Chyba náleží do intervalu $(0, 1/200)$.

6.80. $1 - 3x + \frac{7}{24}x^4$; nad tečnou.

6.81. $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} x^n$.

6.82. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}}{n!}\,(x-1)^n$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 2}{n!}\,x^n$.

6.83. $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$; ano.

6.84. Nikoli.

6.85. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n}$.

6.86. (a) $1 - \frac{\pi^2}{18^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{18^4 \cdot 4!}$; (b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5 \cdot 2^5}$.

6.87. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\, n!}\, x^{2n+1}$.

6.88. $y = \operatorname{arctg} x$.

6.89. Právě pro $x \in \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ je

$$\frac{1}{5+2x} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n x^n.$$

6.90. (a) $v(0) = 6\,\mathrm{m/s}$; (b) $t = 3\,\mathrm{s}$, $s(3) = 16\,\mathrm{m}$; (c) $v(4) = -2\,\mathrm{m/s}$, $a(4) = -2\,\mathrm{m/s^2}$.

6.91. $4\,\mathrm{m} \times 4\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$.

6.92. $28 = 24 + 4$.

6.93. $a = 1$.

6.94. $2\sqrt{5}\, r$.

6.95. Jedná se o čtverec (s délkou strany c).

6.96. $v = \frac{4}{3} R$, $r = \frac{2\sqrt{2}}{3} R$.

6.97. Největší obsah $\sqrt{3}\, o^2/36$ má rovnostranný trojúhelník.

6.98. $[2, -1/2]$, $[-2, -1/2]$.

6.99. $v = 2r$.

6.100. $4\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right)$.

6.101. $32/3$.

6.102. $S = \ln 4 - 1/2$.

6.103. $192/5$.

6.104. $(\pi + 2/3)$ ku $(3\pi - 2/3)$.

6.105. $\pi/2$.

6.106. Přibližně za 3 hodiny.

6.107. $S = \frac{2}{3} \ln 2$.

6.108. $8r$.

6.109. $\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin a}{1-\sin a} = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

6.110. $\left(\mathrm{e}^2 + \mathrm{e} - \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-1}\right)/2$.

6.111. $s = \ln 3 - 1/2$.

6.112. $V = 16\pi/15$.

6.113. 2π.

6.114. $8\pi/3$.

6.115. $V = \frac{1}{3}\pi v\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$; $S = \pi(r_1 + r_2)\sqrt{v^2 + (r_2 - r_1)^2}$.

6.116. $2\pi(\sqrt{5^3} - 1)/9$.

6.117. $14\pi/3$.

6.118. $4\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right)$.

6.119. $32/3$.

6.120. $S = \ln 4 - 1/2$.

6.121. $192/5$.

6.122. $(\pi + 2/3)$ ku $(3\pi - 2/3)$.

6.123. $\pi/2$.

6.124. Přibližně za 3 hodiny.

6.125. $S = \frac{2}{3} \ln 2$.

6.126. $8r$.

6.127. $\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin a}{1-\sin a} = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

6.128. $\left(\mathrm{e}^2 + \mathrm{e} - \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-1}\right)/2$.

6.129. $s = \ln 3 - 1/2$.
6.130. $V = 16\pi/15$.
6.131. 2π.
6.132. $8\pi/3$.
6.133. $V = \frac{1}{3}\,\pi v\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$; $S = \pi(r_1 + r_2)\sqrt{v^2 + (r_2 - r_1)^2}$.
6.134. $2\pi(\sqrt{5^3} - 1)/9$.
6.135. $14\pi/3$.
6.136. (a) $v(0) = 6\,\mathrm{m/s}$; (b) $t = 3\,\mathrm{s}$, $s(3) = 16\,\mathrm{m}$; (c) $v(4) = -2\,\mathrm{m/s}$, $a(4) = -2\,\mathrm{m/s^2}$.
6.137. $4\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right)$.
6.138. $32/3$.
6.139. $S = \ln 4 - 1/2$.
6.140. $192/5$.
6.141. $(\pi + 2/3)$ ku $(3\pi - 2/3)$.
6.142. $\pi/2$.
6.143. Přibližně za 3 hodiny.
6.144. $S = \frac{2}{3}\ln 2$.
6.145. $8r$.
6.146. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin a}{1-\sin a} = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.
6.147. $\left(\mathrm{e}^2 + \mathrm{e} - \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-1}\right)/2$.
6.148. $s = \ln 3 - 1/2$.
6.149. $V = 16\pi/15$.
6.150. 2π.
6.151. $8\pi/3$.
6.152. $V = \frac{1}{3}\,\pi v\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$; $S = \pi(r_1 + r_2)\sqrt{v^2 + (r_2 - r_1)^2}$.
6.153. $2\pi(\sqrt{5^3} - 1)/9$.
6.154. $14\pi/3$.

7.1. V prostoru reálných funkcí na intervalu $\langle 1, 2\rangle$, je dán vektorový podprostor $\langle x^2, 1/x\rangle$. Doplňte funkci $1/x$ na jeho ortogonální bázi (tzn. funkce $\frac{1}{x}$ bude jedním z prvků dané báze) a určete kolmou projekci funkce x na tento podprostor (ve skalárním součinu uvažovaném na přednášce).

7.2. **2.** Určete konvoluci $f_1 * f_2$ funkcí

$$\begin{aligned} f_1 &= \begin{cases} 1 - x & \text{pro } x \in \langle -2, 1\rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \\ f_2 &= \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \langle 0, 1\rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \end{aligned}$$

7.3. Nalezněte Fourierovu transformaci $\mathcal{F}(f) = \tilde{f}$ funkce

$$f(t) = \operatorname{sgn} t, \quad t \in (-1, 1)\,; \qquad f(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)\,,$$

tj. $f(0) = 0$, $f(t) = 1$ pro $t \in (0, 1)$ a $f(t) = -1$ pro $t \in (-1, 0)$.

Řešení. Fourierova transformace uvedené funkce je

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} t\ (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t))\ dt.$$

Protože součin dvou lichých funkcí je sudá funkce, součin sudé a liché je lichá funkce a protože integrál liché funkce přes interval $[-1, 1]$ je 0 (pokud tento integrál existuje) a integrál sudé funkce přes interval $[-1, 1]$ je roven dvojnásobku integrálu přes $[0, 1]$, dostáváme dále

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} -i \sin(\omega t)\ dt = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\cos(\omega t)}{\omega}\right]_0^1 = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\cos\omega - 1}{\omega}.$$

Kdybychom přímo využili známé vyjádření Fourierovy transformace liché funkce f, snadněji bychom obdrželi

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\ \sin(\omega t)\ dt = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} \sin(\omega t)\ dt = \cdots =$$
$$i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\cos\omega - 1}{\omega}.$$

□

7.4. Popište Fourierovu transformaci $\mathcal{F}(f)$ funkce

$$f(t) = \mathrm{e}^{-at^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

kde $a > 0$.

Řešení. Naším úkolem je vypočítat

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt.$$

Derivování (podle ω) a poté užití metody per partes (pro $F' = -it\, \mathrm{e}^{-at^2}$, $G = \mathrm{e}^{-i\omega t}$) dává

$$(\mathcal{F}(f)(\omega))' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -it\, \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\lim_{t\to\infty} \frac{i}{2a}\, \mathrm{e}^{-at^2 - i\omega t} - \lim_{t\to-\infty} \frac{i}{2a}\, \mathrm{e}^{-at^2 - i\omega t} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(-i\omega)}{2a}\, \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{i}{2a}\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-at^2}-\frac{i}{2a}\lim_{t\to-\infty}\mathrm{e}^{-at^2}-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{2a}\,\mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt\right)=$$
$$-\frac{\omega}{2a}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt\right)=-\frac{\omega}{2a}\,\mathcal{F}(f)(\omega).$$

Hledejme proto funkce $y(\omega)=\mathcal{F}(f)(\omega)$, které vyhovují diferenciální rovnici

vesrfuu6 (7.1)
$$y'=-\frac{\omega}{2a}\,y.$$

Při zápisu $y'=dy/d\omega$ je
$$\frac{dy}{d\omega}=-\frac{\omega}{2a}\,y,\quad \text{tj.}\quad \frac{1}{y}\,dy=-\frac{\omega}{2a}\,d\omega,$$
není-li funkce y rovna nule (zjevně $y\equiv 0$ je řešením (7.1)). Integrováním dostáváme
$$\ln|\,y\,|=-\frac{\omega^2}{4a}-\ln|\,C\,|,\quad \text{tj.}\quad y=\pm\frac{1}{C}\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}},$$
přičemž $C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Zahrnutím nulového řešení tak můžeme vyjádřit všechna řešení diferenciální rovnice (7.1) jako funkce
$$y(\omega)=K\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}},\quad K\in\mathbb{R}.$$

Doplňme určení konstanty K, pro niž získáváme právě $\mathcal{F}(f)(\omega)$. Později (v souvislosti s tzv. normálním rozdělením ve statistických metodách) se dozvíme, že
$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi},$$
z čehož plyne
$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-at^2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$
Platí proto
$$\mathcal{F}(f)(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}\quad\text{a současně}\quad \mathcal{F}(f)(0)=K\,\mathrm{e}^0=K.$$
Celkem máme
$$\mathcal{F}(f)(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

□

7.5. Stanovte funkci f, jejíž Fourierovou transformací je funkce
$$\tilde{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\sin\omega}{\omega},\quad \omega\neq 0.$$

Řešení. Inverzní Fourierova transformace dává
$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,d\omega=$$
$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,d\omega+\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,d\omega\right).$$
Jestliže použijeme substituci, kdy nahradíme $-\omega$ za ω v integrálu přes interval $(-\infty,0]$, získáme
$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,d\omega+\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,d\omega\right)=$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\,\left[\cos(\omega t)-i\sin(\omega t)+\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)\right]\,d\omega=$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\,\cos(\omega t)\,d\omega.$$

Poznamenejme, že předchozí vyjádření lze obdržet už z toho, že funkce $y = \frac{\sin\omega}{\omega}$ s maximálním definičním oborem je sudá.

Pomocí identity

$$\sin x \cdot \cos(xy) = \frac{1}{2}\left(\sin\left[x(1+y)\right] + \sin\left[x(1-y)\right]\right), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

která mj. vyplývá ze součtových vzorců (pro sinus), dostáváme

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\infty \frac{\sin[\omega(1+t)]}{\omega}\, d\omega + \int_0^\infty \frac{\sin[\omega(1-t)]}{\omega}\, d\omega\right).$$

Substituce $u = \omega(1+t)$, $v = \omega(1-t)$ potom dávají

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\, du - \int_0^\infty \frac{\sin v}{v}\, dv\right) = 0, \quad t > 1;$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\, du + \int_0^\infty \frac{\sin v}{v}\, dv\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\, du, \quad t \in (-1, 1);$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\left(-\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\, du + \int_0^\infty \frac{\sin v}{v}\, dv\right) = 0, \quad t < -1.$$

Dokázali jsme tak, že funkce f je nulová pro $|\,t\,| > 1$ a konstantní (nutně nenulová) pro $|\,t\,| < 1$. (Po celou dobu předpokládáme, že inverzní Fourierova transformace existuje.)

Určeme funkční hodnotu $f(0)$. Pro funkci

$$g(t) = 1, \quad |\,t\,| < 1; \qquad g(t) = 0, \quad |\,t\,| > 1$$

platí

$$\mathcal{F}(g)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}\, dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 \cos(\omega t)\, dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}.$$

Odtud plyne, že $f(0) = g(0)/2 = 1/2$. Ještě vyzdvihněme vyčíslení integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{\pi}{2},$$

které jsme rovněž obdrželi. □

7.6. Vyřešte integrální rovnici

$$\int_0^\infty f(x)\, \sin(xt)\, dt = e^{-x}, \quad x > 0$$

pro neznámou funkci f.

Řešení. Pokud obě strany rovnice vynásobíme číslem $\sqrt{2/\pi}$, obdržíme na levé straně právě sinovou Fourierovu transformaci. Stačí tedy aplikovat na rovnici inverzní transformaci. Takto dostaneme

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\, \sin(xt)\, dx, \quad t > 0.$$

Dvojnásobným použitím metody per partes pak lze spočítat

$$\int e^{-x}\, \sin(xt)\, dx = \frac{e^{-x}}{1+t^2}\left[-\sin(xt) - t\cos(xt)\right] + C,$$

a tudíž je

$$\int_0^\infty e^{-x}\, \sin(xt)\, dx =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{-x}}{1+t^2}\left[-\sin(xt) - t\cos(xt)\right]\right) - \frac{e^0}{1+t^2}(-t) = \frac{t}{1+t^2}.$$

Řešením rovnice je proto funkce

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\frac{t}{1+t^2}, \quad t > 0.$$

□

7.7. Nalezněte řešení tzv. rovnice vedení tepla (rovnice difuze)

$$u_t(x,t) = a^2\, u_{xx}(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

splňující počáteční podmínku $\lim\limits_{t\to 0+} u(x,t) = f(x)$.

Poznámky: Symbolem $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ zde rozumíme parciální derivaci funkce u podle t (tj. derivujeme podle t, přičemž x považujeme za konstantní) a podobně $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ označuje druhou parciální derivaci podle x (kdy dvakrát derivujeme podle x a na t nahlížíme při derivování jako na konstantu). Fyzikální interpretací úlohy je, že se snažíme určit teplotu $u(x,t)$ v tepelně izolované a homogenní tyči nekonečné délky (rozsah proměnné x), je-li dána počáteční teplota tyče funkcí f. Tyč má konstantní průřez a teplo se v ní může šířit pouze vedením. Koeficient a^2 je pak roven podílu $\frac{\alpha}{c\varrho}$, kde α je koeficient tepelné vodivosti, c je specifické teplo a ϱ je hustota. Zvláště se tedy předpokládá, že $a^2 > 0$.

Řešení. Na rovnici vedení tepla aplikujeme Fourierovu transformaci vzhledem k proměnné x. Platí ovšem

$$\mathcal{F}(u_t)(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)\, \mathrm{e}^{-i\omega x}\, dx =$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, \mathrm{e}^{-i\omega x}\, dx \right)',$$

kde je derivováno podle t, tj. je

$$\mathcal{F}(u_t)(\omega,t) = (\mathcal{F}(u)(\omega,t))' = (\mathcal{F}(u))_t(\omega,t).$$

Současně víme, že

$$\mathcal{F}\left(a^2 u_{xx}\right)(\omega,t) = a^2\, \mathcal{F}(u_{xx})(\omega,t) = -a^2\omega^2\, \mathcal{F}(u)(\omega,t).$$

Při označení $y(\omega,t) = \mathcal{F}(u)(\omega,t)$ tak přecházíme k rovnici

$$y_t = -a^2\omega^2\, y.$$

Podobnou diferenciální rovnici jsme již při počítání Fourierových transformací řešili, a tudíž pro nás není obtížné stanovit všechna její řešení

$$y(\omega,t) = K(\omega)\, \mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}, \quad K(\omega) \in \mathbb{R}.$$

Zbývá určit $K(\omega)$. Transformace počáteční podmínky dává

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \lim_{t\to 0+} \mathcal{F}(u)(\omega,t) = \lim_{t\to 0+} y(\omega,t) = K(\omega)\, \mathrm{e}^0 = K(\omega),$$

a proto je

$$y(\omega,t) = \mathcal{F}(f)(\omega)\, \mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}, \quad K(\omega) \in \mathbb{R}.$$

Nyní se pomocí inverzní Fourierovy transformace vraťme k původní diferenciální rovnici s řešením

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y(\omega,t)\, \mathrm{e}^{i\omega x}\, d\omega =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(\omega)\, \mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}\, \mathrm{e}^{i\omega x}\, d\omega =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)\, \mathrm{e}^{-i\omega s}\, ds \right) \mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}\, \mathrm{e}^{i\omega x}\, d\omega =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}\, \mathrm{e}^{-i\omega(s-x)}\, d\omega \right) ds.$$

Vypočítáním Fourierovy transformace $\mathcal{F}(f)$ funkce $f(t) = \mathrm{e}^{-at^2}$ pro $a > 0$ jsme při přeznačení proměnných obdrželi

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-cp^2}\, \mathrm{e}^{-irp}\, dp = \frac{1}{\sqrt{2c}}\, \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4c}}, \quad c > 0.$$

Dle tohoto vztahu (uvažte $c = a^2 t > 0$, $p = \omega$, $r = s - x$) platí

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}\, \mathrm{e}^{-i\omega(s-x)}\, d\omega = \frac{1}{\sqrt{2a^2 t}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(s-x)^2}{4a^2 t}},$$

a tedy

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}}\, ds.$$

□

7.8. Stanovte Laplaceovu transformaci $\mathcal{L}(f)(s)$ funkce

(a) $f(t) = \mathrm{e}^{at}$;
(b) $f(t) = c_1\, \mathrm{e}^{a_1 t} + c_2\, \mathrm{e}^{a_2 t}$;
(c) $f(t) = \cos(bt)$;
(d) $f(t) = \sin(bt)$;
(e) $f(t) = \cosh(bt)$;
(f) $f(t) = \sinh(bt)$,

přičemž hodnoty $b \in \mathbb{R}$ a $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ jsou libovolné a kladné $s \in \mathbb{R}$ je větší než reálné části čísel $a, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ a rovněž je větší než b ve variantách (e) a (f).

Řešení. Případ (a). Bezprostředně z definice Laplaceovy transformace plyne

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{at}\, \mathrm{e}^{-st}\, dt = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(s-a)t}\, dt =$$
$$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right) - \frac{\mathrm{e}^0}{-(s-a)} = \frac{1}{s-a}.$$

Případ (b). Pomocí výsledku varianty (a) a linearity nevlastního integrálu dostáváme

$$\mathcal{L}(f)(s) = c_1 \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{a_1 t}\, \mathrm{e}^{-st}\, dt + c_2 \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{a_2 t}\, \mathrm{e}^{-st}\, dt = \frac{c_1}{s-a_1} + \frac{c_2}{s-a_2}.$$

Případ (c). Protože

$$\cos(bt) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{ibt} + \mathrm{e}^{-ibt}\right),$$

volba $c_1 = 1/2 = c_2$, $a_1 = ib$, $a_2 = -ib$ v předchozí variantě již dává

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int\limits_0^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{ibt} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-ibt}\right) \mathrm{e}^{-st}\, dt = \frac{1}{2(s-ib)} + \frac{1}{2(s+ib)} = \frac{s}{s^2+b^2}.$$

Případy (d), (e), (f). Analogicky volby

(d) $c_1 = -i/2$, $c_2 = i/2$, $a_1 = ib$, $a_2 = -ib$;
(e) $c_1 = 1/2 = c_2$, $a_1 = b$, $a_2 = -b$;
(f) $c_1 = 1/2$, $c_2 = -1/2$, $a_1 = b$, $a_2 = -b$

vedou na

(d) $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{b}{s^2+b^2}$;
(e) $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{s}{s^2-b^2}$;
(f) $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{b}{s^2-b^2}$.

□

7.9. Pomocí vzorce

ves223ock (7.2)
$$\mathcal{L}\left(f'\right)(s) = s\,\mathcal{L}(f)(s) - \lim_{t\to 0+} f(t)$$

odvoďte Laplaceovy transformace funkcí $y = \cos t$ a $y = \sin t$.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že z (7.2) plyne

$$\mathcal{L}\left(f''\right)(s) = s\,\mathcal{L}\left(f'\right)(s) - \lim_{t\to 0+} f'(t) =$$
$$s\left(s\mathcal{L}(f)(s) - \lim_{t\to 0+} f(t)\right) - \lim_{t\to 0+} f'(t) =$$
$$s^2\mathcal{L}(f)(s) - s\lim_{t\to 0+} f(t) - \lim_{t\to 0+} f'(t).$$

Platí tedy

$$-\mathcal{L}(\sin t)(s) = \mathcal{L}(-\sin t)(s) = \mathcal{L}\left((\sin t)''\right)(s) =$$
$$s^2\mathcal{L}(\sin t)(s) - s\lim_{t\to 0+}\sin t - \lim_{t\to 0+}\cos t = s^2\mathcal{L}(\sin t)(s) - 1,$$

odkud dostáváme

$$-\mathcal{L}(\sin t)(s) = s^2\mathcal{L}(\sin t)(s) - 1, \quad \text{tj.} \quad \mathcal{L}(\sin t)(s) = \tfrac{1}{s^2+1}.$$

Nyní užitím vzorce (7.2) snadno určíme

$$\mathcal{L}(\cos t)(s) = \mathcal{L}\left((\sin t)'\right)(s) = s\,\tfrac{1}{s^2+1} - \lim_{t\to 0+}\sin t = \tfrac{s}{s^2+1}.$$

□

7.10. Pro $s > -1$ spočtěte Laplaceovu transformaci $\mathcal{L}(g)(s)$ funkce

$$g(t) = t\,\mathrm{e}^{-t}$$

a pro $s > 1$ Laplaceovu transformaci $\mathcal{L}(h)(s)$ funkce

$$h(t) = t\sinh t.$$

Řešení. Užitím metody per partes získáváme

$$\mathcal{L}(g)(s) = \int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{e}^{-st}\,dt = \int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-(s+1)t}\,dt = \lim_{t\to\infty}\left(\tfrac{t\,\mathrm{e}^{-(s+1)t}}{-(s+1)}\right) - 0 -$$
$$\int_0^\infty \tfrac{\mathrm{e}^{-(s+1)t}}{-(s+1)}\,dt = -\left(\lim_{t\to\infty}\tfrac{\mathrm{e}^{-(s+1)t}}{(s+1)^2} - \tfrac{\mathrm{e}^0}{(s+1)^2}\right) = \tfrac{1}{(s+1)^2}.$$

Derivování Laplaceovy transformace obecné funkce $-f$ (tj. nevlastního integrálu) podle parametru s dává

$$\left(\int_0^\infty -f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt\right)' = \int_0^\infty -f(t)\,\left(\mathrm{e}^{-st}\right)'\,dt = \int_0^\infty t\,f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt.$$

To znamená, že derivace Laplaceovy transformace $\mathcal{L}(-f)(s)$ je Laplaceova transformace funkce $tf(t)$. Laplaceovu transformaci funkce $y = \sinh t$ jsme ale dříve určili jako funkci $y = \frac{1}{s^2-1}$. Proto platí

$$\mathcal{L}(h)(s) = \left(-\tfrac{1}{s^2-1}\right)' = \tfrac{2s}{(s^2-1)^2}.$$

Povšimněme si, že tímto způsobem jsme rovněž mohli určit $\mathcal{L}(g)(s)$.
□

7.11. Najděte funkci y, která vyhovuje diferenciální rovnici

$$y''(t) = \cos(\pi t) - y(t), \quad t \in (0, +\infty)$$

a počátečním podmínkám $y(0) = c_1$, $y'(0) = c_2$.

Řešení. Nejdříve podotkněme, že z teorie obyčejných diferenciálních rovnic vyplývá, že úloha má právě jedno řešení. Dále připomeňme

$$\mathcal{L}\left(f''\right)(s) = s^2\mathcal{L}(f)(s) - s\lim_{t\to 0+} f(t) - \lim_{t\to 0+} f'(t)$$

a

$$\mathcal{L}(\cos(bt))(s) = \tfrac{s}{s^2+b^2}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Aplikování Laplaceovy transformace na zadanou diferenciální rovnici proto dává

$$s^2\mathcal{L}(y)(s) - sc_1 - c_2 = \tfrac{s}{s^2+\pi^2} - \mathcal{L}(y)(s),$$

tj.

ves223j09 (7.3) $$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{s}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+\pi^2\right)} + \frac{c_1 s}{s^2+1} + \frac{c_2}{s^2+1}.$$

Stačí tudíž najít funkci y splňující (7.3). Rozkladem na parciální zlomky získáváme

$$\frac{s}{(s^2+1)(s^2+\pi^2)} = \frac{1}{\pi^2-1}\left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+\pi^2}\right).$$

Z výše uvedeného vyjádření $\mathcal{L}(\cos(bt))(s)$ a dříve dokázaného

$$\mathcal{L}(\sin t)(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

tak již dostáváme hledané řešení

$$y(t) = \frac{1}{\pi^2-1}(\cos t - \cos(\pi t)) + c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

□

7.12. Vyřešte soustavu diferenciálních rovnic

$$x''(t)+x'(t) = y(t)-y''(t)+\mathrm{e}^t, \quad x'(t)+2x(t) = -y(t)+y'(t)+\mathrm{e}^{-t}$$

při počátečních podmínkách $x(0)=0$, $y(0)=0$, $x'(0)=1$, $y'(0)=0$.

Řešení. Opět aplikujeme Laplaceovu transformaci. Tím s využitím

$$\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{\pm t}\right)(s) = \frac{1}{s\mp 1}$$

převedeme první rovnici na

$$s^2\mathcal{L}(x)(s) - s\lim_{t\to 0+} x(t) - \lim_{t\to 0+} x'(t) + s\mathcal{L}(x)(s) - \lim_{t\to 0+} x(t) =$$
$$\mathcal{L}(y)(s) - \left(s^2\mathcal{L}(y)(s) - s\lim_{t\to 0+} y(t) - \lim_{t\to 0+} y'(t)\right) + \frac{1}{s-1}$$

a druhou potom na

$$s\mathcal{L}(x)(s) - \lim_{t\to 0+} x(t) + 2\mathcal{L}(x)(s) =$$
$$-\mathcal{L}(y)(s) + s\mathcal{L}(y)(s) - \lim_{t\to 0+} y(t) + \frac{1}{s+1}.$$

Vyčíslíme-li limity (dle počátečních podmínek), obdržíme lineární rovnice

$$s^2\mathcal{L}(x)(s) - 1 + s\mathcal{L}(x)(s) = \mathcal{L}(y)(s) - s^2\mathcal{L}(y)(s) + \frac{1}{s-1}$$

a

$$s\mathcal{L}(x)(s) + 2\mathcal{L}(x)(s) = -\mathcal{L}(y)(s) + s\mathcal{L}(y)(s) + \frac{1}{s+1}$$

s právě jedním řešením

$$\mathcal{L}(x)(s) = \frac{2s-1}{2(s-1)(s+1)^2}, \quad \mathcal{L}(y)(s) = \frac{3s}{2\left(s^2-1\right)^2}.$$

Opět si pomůžeme rozkladem na parciální zlomky se ziskem

$$\mathcal{L}(x)(s) = \frac{1}{8}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{s+1} = \frac{3}{4}\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{s^2-1}.$$

Neboť již dříve jsme vypočítali

$$\mathcal{L}\left(t\,\mathrm{e}^{-t}\right)(s) = \frac{1}{(s+1)^2}, \quad \mathcal{L}(\sinh t)(s) = \frac{1}{s^2-1},$$
$$\mathcal{L}(t\sinh t)(s) = \frac{2s}{\left(s^2-1\right)^2},$$

dostáváme

$$x(t) = \frac{3}{4}t\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{4}\sinh t, \quad y(t) = \frac{3}{4}t\sinh t.$$

Čtenář může sám ověřit, že tyto funkce x a y jsou skutečně hledaným řešením. Ověření však důrazně doporučujeme provést (např. z toho důvodu, že Laplaceovy transformace funkcí $y=\mathrm{e}^t$, $y=\sinh t$ a $y=t\sinh t$ jsme získali pouze pro $s>1$). □

7.13. Diskrétní kosinová transformace. Základem JPEG komprese dat je tzv. diskrétní kosinová transformace. Ta je dána ortogonální maticí C definovanou následovně

$$c_{kl} = \alpha_{kl} \cos\left(\frac{(2k-1)(l-1)\pi}{2n}\right)$$

kde $\alpha_{k1} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\alpha_{kl} = \sqrt{\frac{2}{n}}$ pro $l > 1$. Vektor reprezentující data pak ortogonálně rozložíme a některé bázové vektory (slopce matice C) vypustíme. Tím je provedena redukce dat s rozumnou aproximací původních dat. Zpětná transformace je jednoduchá. Protože je C ortogonální, je dána násobením transponovanou maticí.

Ukažte, že pro $n = 2$ je matice C rovna $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ a že je ortogonální. Spočítejte ortogonální rozklad vektoru $(3, 4)$ vzhledem k bázi tvořené sloupci matice a určete vlastní čísla a vlastní vektory.

Počítejme

$$CC^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = 1.$$

Matice C je tedy ortogonální a její sloupce tvoří ortonormální bázi $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $e_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Koeficienty ortogonálního rozkladu vektoru $u = (3, 4)$ dostaneme jednoduše použitím transponované matice

$$C^T u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}7\\ -1\end{pmatrix}$$

Ortogonální rozklad má tedy následující tvar

$$\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix} = \frac{7}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

Charakteristický polynom matice C je $(\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}})(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{2} = 0$ a vlastní čísla jsou tedy $\lambda_{1,2} = \pm 1$ (jiná ani ortogonální matice nemůže mít). Příslušné vlastní vektory jsou určeny po řadě rovnicemi

$$(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - 1)x + \tfrac{1}{\sqrt{2}}y = 0, \quad (\tfrac{1}{\sqrt{2}} + 1)x + \tfrac{1}{\sqrt{2}}y = 0$$

a jsou to tedy například vektory $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ (které jsou automaticky ortogonální). Pozn. nakreslete si obrázek, jak působí na vektor v rovině zobrazení určené maticí A.

7.14. Diskrétní kosinová transformace 2. Ukažte, že symetrická matice $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & & & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0\end{pmatrix}$ má vlastní hodnoty $\lambda_l = \cos\varphi_l$, kde $\varphi_l = \frac{l\pi}{n+1}$ s $1 \le l \le n$ a že příslušné vlastní vektory $\sqrt{\frac{2}{n+1}}\begin{pmatrix}\sin\varphi_l\\ \sin 2\varphi_l\\ \vdots\\ \sin n\varphi_l\end{pmatrix}$ tvoří ortonormální bázi.

Nejprve spočítáme, čemu je rovna k-tá složka vektoru

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{n+1}}\begin{pmatrix}0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & & & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\varphi_l\\ \sin 2\varphi_l\\ \vdots\\ \sin n\varphi_l\end{pmatrix}$$

Použitím součtového vzorce pro sinus dostáváme

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{n+1}}(\sin(k-1)\varphi_l + \sin(k+1)\varphi_l) = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\sin k\varphi_l \cos\varphi_l,$$

takže daný vektor je opravdu vlastní vektor s vlastní hodnotou $\cos\varphi_l$. Protože máme n různých vlastních čísel (což je dimenze), tvoří tyto vlastní vektory bázi. Nyní zbývá ověřit, že vlastní vektory jsou ortogonální a normované.

Řešení cvičení

7.1. $(\frac{1}{x}, x^2 - \frac{3}{x})$, projekce $\frac{2}{x} + \frac{15}{34}(x^2 - \frac{3}{x})$.

7.2.

$$f_1 * f_2(t) = \begin{cases} t - \frac{t^2}{2} + 4 & \text{pro } t \in \langle -2, -1 \rangle \\ 1 - t + \frac{1}{2} & \text{pro } t \in \langle -1, 1 \rangle \\ \frac{t^2}{2} - 2t + 2 & \text{pro } t \in \langle 1, 2 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$