Drsná matematika II – 10. přednáška
Aproximace funkcí, Fourierovy řady

Jan Slovák

Masarykova univerzita

25. 4. 2012

Obsah přednášky

Kde je dobré číst?

- vlastní poznámky, texty současného nebo předcházejícího přednášejícího, GOOGLE, atd.
- Zuzana Došlá, Jaromír Kuben, Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU Brno, 2003, 215 s., ISBN 80-210-3121-2.
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.

Pro pevný interval $I = [a, b]$, konečný nebo nekonečný, definujeme kvadrát vzdálenosti funkcí na I takto:

$$\|f - g\|^2 = \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx.$$

Samozřejmě je třeba předpokládat, že tento Riemannův integrál existuje. Velikost $\|f\|$ funkce f je pak její vzdálenost od funkce nulové, tj.

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx.$$

Funguje dobře pro množinu $\mathcal{S} = \mathcal{S}[a, b]$ omezených a po částech spojitých reálných funkcí na I.

Viděli jsme, že $\mathcal{S}$ je vektorový prostor a snadno se ověří, že námi právě uvažovaná velikost je odvozena z dobře definovaného skalárního součinu, tj. symetrického bilineárního zobrazení

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx,$$

s příslušnými vlastnostmi.
V konečněrozměrném případě jsme takto definovali velikost vektorů. Nyní je to naprosto stejné a pokud zúžíme naši definici na vektorový prostor generovaný nad reálnými čísly jen konečně mnoha funkcemi $f_1, \dots, f_k$, dostaneme opět dobře definovaný skalární součin na tomto konečněrozměrném vektorovém podprostoru.

Máme-li generátory g_i s vlastností

$$\langle g_i, g_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases}$$

hovoříme o tzv. **ortonormální bázi** (pracujeme také s ortogonálními).
Grammova–Schmidtova ortogonalizace vytvoří z libovolného spočetného systému generátorů f_i nové ortogonální generátory g_i téhož prostoru, tj. $\langle g_i, g_j \rangle = 0$ pro všechny $i \neq j$. Spočteme je postupně: $g_1 = f_1$ a formulemi

$$g_{\ell+1} = f_{\ell+1} + a_1 g_1 + \cdots + a_\ell g_\ell, \quad a_i = -\frac{\langle f_{\ell+1}, g_i \rangle}{\|g_i\|^2}$$

pro $\ell > 1$.
Příkladem jsou např. ortogonální polynomy.

Připomeňme si výhody, které ortonormální báze podprostorů měly pro konečněrozměrné vektorové prostory. Můžeme pokračovat v příkladu Legendreových polynomů h_1, h_2 a h_3, které generují $\mathbb{R}_2[x]$ a uvažovat třeba $V = \mathbb{R}_\infty[x]$ jakožto funkce na intervalu $[0, 1]$. Pro libovolný polynom $h \in V$ bude funkce

$$H = \langle h, h_1 \rangle h_1 + \langle h, h_2 \rangle h_2 + \langle h, h_3 \rangle h_3$$

jednoznačně určenou funkcí, která minimalizuje vzdálenost $\|h - H\|$ mezi všemi funkcemi v $\mathbb{R}_2[x]$.
Koeficienty pro nejlepší aproximaci zadané funkce pomocí funkce z vybraného podprostoru je možné tedy získat prostě integrací. Stejně tak ale tato formule zadá nejlepší aproximaci polynomem nejvýše druhého stupně pro libovolnou funkci $h \in \mathcal{S}[a, b]$ ve smyslu naší vzdálenosti funkcí na tomto prostoru.

Poslední příklad podbízí zobecnění – co se stane, když zvolíme úplně libovolný spočetný systém lineárně nezávislých funkcí v $\mathcal{S}$ takový, že každé dvě různé z nich mají nulový skalární součin? Takovému systému funkcí na intervalu I říkáme **ortogonální systém funkcí**. Jestliže jsou všechny funkce f_n v posloupnosti po dvou ortogonální a zároveň je pro všechna n velikost $\|f_n\| = 1$ normovaná, hovoříme o **ortonormálním systému funkcí**.
Nechť tedy tvoří posloupnost funcí f_n ortogonální systém po částech spojitých funkcí na intervalu $I = [a, b]$ a předpokládejme, že pro konstanty c_n konverguje řada

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$$

stejnoměrně na I. Pak snadno vyjádříme skalární součin $\langle F, f_n \rangle$ po jednotlivých sčítancích:

$$\langle F, f_n \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_a^b f_m(x) f_n(x)\, dx = c_n \|f_n\|^2.$$

Máme tedy tušení, v jakou přibližně odpověď je možné doufat, a docela přehledně nám ji skutečně dává následující věta:

Theorem

Nechť f_n, $n = 1, 2, \ldots$, je ortogonální posloupnost funkcí Riemannovsky integrovatelných na $I = [a, b]$ a nechť g je libovolná funkce Riemannovsky integrovatelná v kvadrátu na I. Označme

$$c_n = \|f_n\|^{-2} \int_a^b f_n(x) g(x)\, dx.$$

(1) Pro libovolné pevné $n \in \mathbb{N}$ má ze všech lineárních kombinací funkcí $f_1, \ldots, f_n$ nejmenší vzdálenost od g výraz

$$h_n = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x).$$

Theorem (pokračování)

(2) Řada čísel $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2$ *vždy konverguje a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2 \leq \|g\|^2.$$

(3) Vzdálenost g *od částečných součtů* $s_k = \sum_{n=1}^{k} c_n f_n$ *jde v limitě k nule, tj.*

$$\lim_{k\to\infty} \|g - s_k\|^2 = 0,$$

tehdy a jen tehdy, když

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2 = \|g\|^2.$$

Ještě než se pustíme do důkazu, zkusíme lépe porozumět významu jednotlivých tvrzení této věty.
Náš ortogonální systém funcí je libovolný, nemůžeme očekávat, že lze dobře aproximovat jakoukoliv funkci pomocí lineárních kombinací funkcí f_i. Např. když se omezíme u ortogonálních polynomů pouze na sudé stupně, určitě budeme dobře aproximovat pouze sudé funkce.
Nicméně hned první tvrzení nám říká, že vždycky budeme dosahovat nejlepší možné aproximace částečnými součty.

Druhé a třetí tvrzení pak můžeme vnímat jako analogii ke kolmým průmětům do podprostorů vyjádřených pomocí souřadnic.
Skutečně vidíme, že pokud pro naši funkci g bodově konverguje řada $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$, pak je funkce $F(x)$ kolmým průmětem g do vektorového podprostoru všech takovýchto řad.
Zároveň ale naše věta neříká, že by částečné součty uvažované řady musely bodově konvergovat k nějaké funkci. Tj. řada $F(x)$ nemusí být obecně konvergentní ani v případě, kdy nastane rovnost v (3).
Pokud ale např. existuje konečná hodnota $\sum_{n=1}^{\infty} |c_i|$ a všechny funkce f_n jsou stejnoměrně omezené na I, pak zřejmě řada $F(x)$ konverguje v každém x.

Důkaz věty:
Zvolme libovolnou lineární kombinaci $f = \sum_{n=1}^{k} a_n f_n$ a spočtěme její vzdálenost od g. Dostáváme

$$\|g - \sum_{n=1}^{k} a_n f_n\|^2 = \|g\|^2 + \sum_{n=1}^{k} \|f_n\|^2((c_n - a_n)^2 - c_n^2).$$

Evidentně lze poslední výraz minimalizovat právě volbou $a_n = c_n$ a tím je první tvrzení dokázáno.

Dosazením minimalizující volby dostáváme tzv. **Besselovu identitu**

$$\|g - \sum_{n=1}^{k} c_n f_n\|^2 = \|g\|^2 - \sum_{n=1}^{k} c_n^2 \|f_n\|^2,$$

ze které okamžitě díky nezápornosti levé strany vyplývá tzv. **Besselova nerovnost**

$$\sum_{n=1}^{k} c_n^2 \|f_n\|^2 \leq \|g\|^2.$$

Tím je dokázáno druhé tvrzení, protože každá neklesající a shora omezená posloupnost reálných čísel má limitu (a je jí supremum celé množiny hodnot prvků posloupnosti).

Jestliže v Besselově nerovnosti nastane rovnost, hovoříme o tzv. **Parsevalově rovnosti**. Přímo z definic vyplývá nyní tvrzení (3):

(3) Vzdálenost g od částečných součtů $s_k = \sum_{n=1}^{k} c_n f_n$ jde v limitě k nule, tj.

$$\lim_{k\to\infty} \|g - s_k\|^2 = 0,$$

tehdy a jen tehdy, když

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2 = \|g\|^2.$$

Ortonogonální systém funkcí nazveme **úplný ortogonální systém** na intervalu $I = [a, b]$, jetliže platí Parsevalova rovnost pro každou funkci g s konečnou velikostí $\|g\|$ na tomto intervalu.

Předchozí věta naznačuje, že umíme se spočetnými ortogonálními systémy f_n funkcí pracovat velice podobně jako s konečnými ortogonálními bazemi vektorových prostorů, jsou tu ale zásadní rozdíly:

- Není snadné řici, jak vypadá celý prostor konvergentních nebo stejnoměrně konvergentních řad $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$.
- Pro danou integrovatelnou funkci umíme najít jen nejlepší možné přiblížení takovou řadou $F(x)$.

V případě, že místo ortonogonálního systému f_n máme systém ortonormální, jsou formulky ve větě o něco jednodušší, žádné další zlepšení ale nenastane.

Jako pěkný příklad na integrování lze elementárními metodami ověřit, že systém funkcí

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \dots,\ \sin nx,\ \cos nx,\ \dots$$

je ortogonální systém na intervalu $[-\pi, \pi]$ (a také na kterémkoliv jiném intervalu o délce 2π).
Řady z předchozí věty odpovídající tomuto systému nazýváme **Fourierovy řady**. I v obecném případě diskutovaném výše se někdy hovoří o obecných Fourierových řadách vzhledem k ortogonálnímu systému funkcí f_n. Koeficienty c_n se pak nazývají **Fourierovy koeficienty funkce** f.

Na intervalu $[-\pi, \pi]$ jsou velikosti všech funkcí kromě první vždy $\sqrt{\pi}$, první má velikost $\sqrt{2\pi}$. Lze dokázat, že náš systém funkcí je úplným ortogonálním systémem, nebudeme to zde ale dokazovat. Ve smyslu vzdálenosti funkcí definované pomocí našeho skalárního součinu proto budou částečné součty Fourierovy řady $F(x)$ pro libovolnou funkci $g(x)$ s konečným integrálem $\int_a^b g(x)^2\,dx$, tj.

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

s koeficienty

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx)\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx)\,dx,$$

vždy konvergovat k funkci $g(x)$.

Z obecnějších úvah lze dovodit, že z konvergence v tomto smyslu vždy vyplývá bodová konvergence částečných součtů ve skoro všech bodech $x \in I$. Nebudeme zde ale ani vysvětlovat, co znamená „skoro všechny“, ani nebudeme takový výsledek dokazovat.

Jako příklad uveďme Fourierovu řadu pro periodickou funkci vzniklou zúžením Heavisideovy funkce na jednu periodu. Tj. naše funkce g bude na intervalu $[-\pi, 0]$ rovna -1 a na intervalu $[0, \pi]$ bude rovna 1. Protože jde o funkci lichou, jistě budou všechny koeficienty u funkcí $\cos(nx)$ nulové, a pro coeficienty u funkcí $\sin(nx)$ spočteme

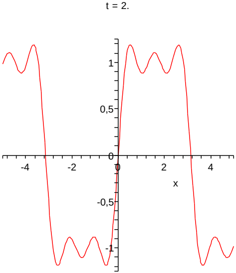
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n).$$

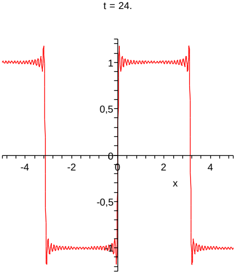
Výsledná Fourierova řada je tedy tvaru

$$g(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \dots\right)$$

a součet jejích prvních pěti a prvních padesáti členů je na následujících dvou obrázcích.

Všimněme si, že se zvyšujícím se počtem členů řady se výrazně spřesňuje aproximace s výjimkou stále se zmenšujícího okolí bodu nespojitosti, na němž je ale maximum odchylky stále zhruba stejné. Je to obecná vlastnost Fourierových řad, které se říká Gibbsův jev.





Povšimněme si také, že v samotném bodě nespojitosti je hodnota aproximující funkce právě v polovině mezi limitami zprava a zleva pro Heavisideovu funkci. Nelze očekávat, že by konvergence pro funkce s body nespojitosti mohla být stejnoměrná (to by totiž g musela být coby stejnoměrná limita spojitých funkcí sama spojitá!).

Bez podrobného důkazu si uvedeme následující větu podávající ucelený obrázek o bodové konvergenci Fourierových řad. Nejde o nutné podmínky konvergence a v literatuře lze najít řadu jiných formulací. Tato je ale jednoduchá a postihuje velké množství užitečných případů.

Theorem

Nechť g je po částech spojitá a monotonní na intervalu $[-\pi, \pi]$. Pak její Fourierova řada $F(x)$ konverguje na $[-\pi, \pi]$ a součet je

- *roven hodnotě $g(x_0)$ v každém bodě $x_0 \in [-\pi, \pi]$, ve kterém je funkce $g(x)$ spojitá,*
- *v každém bodě nespojitosti x_0 funkce $g(x)$ roven*

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0^+} g(x) + \lim_{x \to x_0^-} g(x)\right),$$

- *v krajních bodech intervalu $[-\pi, \pi]$ je roven*

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x \to -\pi^+} g(x) + \lim_{x \to \pi^-} g(x)\right).$$

Pokud navíc je $g(x)$ spojitá, periodická s periodou 2π a všude existuje její po částech spojitá derivace, pak konverguje její Fourierova řada $F(x)$ stejnoměrně.

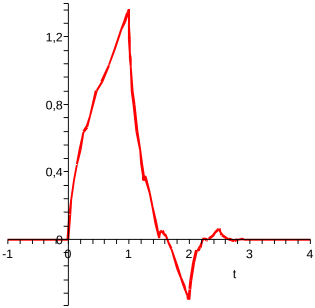
Fourierovy řady a další z nich vycházející nástroje jsou využívány ke zpracování různých signálů, obrázků apod. Povaha použitých periodických goniometrických funkcí a jejich prosté škálování pomocí zvětšující se frekvence zároveň omezují jejich použitelnost. V mnoha oborech proto vyvstala přirozená potřeba nalézt šikovnější úplné ortogonální systémy funkcí, které budou vycházet z předpokládané povahy dat a které bude možné efektivněji zpracovávat.

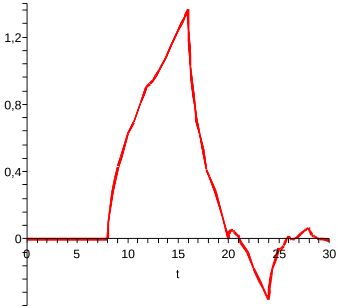
Takový systém se lze například vytvořit volbou vhodné spojité funkce ψ s kompaktním nosičem, ze které sestrojíme spočetně mnoho funkcí ψ_{ij}, $j, k \in \mathbb{Z}$, pomocí dyadických translací a dilatací:

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k).$$

Pokud tvar mateřské funkce ψ dobře vystihuje možné chování dat, a zároveň její potomci ψ_{jk} tvoří úplný ortogonální systém, pak se zpravidla dobře daří konkrétní zpracovávaný signál aproximovat pomocí jen několika málo funkcí.

Nebudeme zde zacházet do podrobností, jde o mimořádně živý směr výzkumu i základ komerčních aplikací. Zájemce snadno najde spoustu literatury. Na obrázku je ilustrována tzv. Daubechies mateřská wavelet $D4(x)$ a její dcera $D4(2^{-3}x-1)$.





Wavelety navíc nejsou vůbec definovány jako funkce analyticky. Místo toho jsou pouze tabelovány jejich hodnoty v dostatečném rozlišení.