SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA 2

MARTIN KOLÁŘ

Obsah

1 Aplikace spojité Fourierovy analýzy **3**

1.1 Ortogonální polynomy . . . 3

1.1.1 Legendreovy polynomy . . . 5

1.1.2 Aplikace Legendreových polynomů v numerice . . . 7

1.2 Aplikace Fourierových řad na problém rekurence náhodné procházky . 9

1.2.1 Náhodná procházka . . . 10

2 Diskrétní fourierova transformace **14**

2.1 Cyklická konvoluce . . . 16

2.2 Diskrétní fourierova transformace . . . 16

2.3 Další vlastnosti diskrétní Fourierovy transformace . . . 18

2.3.1 Posunutí . . . 18

2.3.2 Modulace (frekvenční posun) . . . 19

2.4 Transformace sumy a diference . . . 19

2.5 Maticová reprezentace diskrétní Fourierovy transformace . . . 20

2.6 Symetrická diskrétní Fourierova transformace . . . 20

2.6.1 Reálná diskrétní Fourierova transformace . . . 21

2.6.2 Inverzní reálná diskrétní Fourierova transformace . . . 21

2.6.3 Diskrétní sinová a cosinová Fourierova transformace . . . 22

2.6.4 Aplikace diskrétní Fourierovy transformace . . . 23

3 Z-transformace **25**

3.1 Inverzní Z-transformace . . . 26

3.2 Vlastnosti Z-transformace . . . 26

3.3 Řešení diferenčních rovnic pomocí Z-transformace . . . 27

4 Laplaceova transformace **29**

4.1 Existence Laplaceovy transformace . . . 30

4.2 Laplaceova transformace derivace . . . 30

4.3 Věty o posunu . . . 31

5 Hartleyho transformace **34**
5.1 Sudá a lichá část Hartleyho transformace 34
5.2 Diskrétní Hartleyho transformace 35

6 Radonova transformace **36**
6.1 Inverzní radonova transformace 37

7 Jednotící pohled na Fourierovy řady, Fourierovu transformaci a diskrétní Fourierovu transformaci s využitím zobecněných funkcí **38**
7.1 Zobecněné funkce (distribuce) 38
7.2 Operace na distribucích 39
7.3 Zobecněná Fourierova transformace 40
7.4 Zobecněná Fourierova transformace zobecněných periodických funkcí 41

8 Rychlá Fourierova transformace **43**

Kapitola 1

Aplikace spojité Fourierovy analýzy

1.1 Ortogonální polynomy

Skalární součin na $C([-\pi, \pi])$:
$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\bar{g}(x)dx$
$\rightarrow L_2$-teorie

Zobecnění: skalární součin s váhovou funkcí
$r(x)$ ... *váhová funkce*, hladká funkce na intervalu $[a, b]$
$r(x) \in C([a, b]) \cap L^1([a, b])$
Na $C([a, b])$ definujeme *skalární součin* (f, g) předpisem

$$(f, g) = \int_a^b r(x)f(x)\bar{g}(x)dx$$

Lemma 1.1.1. (f, g) *je skalární součin na* $C([a, b])$*, tj. platí:*
(i) $(f, g) = \overline{(g, f)}$
(ii) $(\lambda f + \mu g, h) = \lambda(f, h) + \mu(g, h)$
(iii) $(f, f) \in \mathbb{R}$, $(f, f) \geq 0$
(iv) $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$

Důkaz:
(i) $(f, g) = \int_a^b r(x)f(x)\bar{g}(x)dx = \int_a^b \overline{r(x)\bar{g}(x)f(x)}dx = \overline{(g, f)}$, $r = \bar{r}$
(ii) zřejmé
(iii) $(f, f) = \int_a^b \underbrace{r(x)}_{\geq 0}\underbrace{|f(x)|^2}_{\geq 0}dx \geq 0$
(iv) $0 = (f, f) = \int_a^b \underbrace{r(x)}_{>0}|f(x)|^2dx \Rightarrow f(x) = 0$

Pro každý skalární součin platí *Cauchy - Schwartzova nerovnost*:

$$|(f, g)| \leq \|f\| \, \|g\|$$

neboli
$(f, g)^2 \leq (f, f)(g, g)$,
tedy
$(\int_a^b r(x)f(x)\bar{g}(x)dx)^2 \leq \int_a^b r(x)(f(x))^2 dx \int_a^b r(x)(g(x))^2 dx$

Skalární součina dává *normu*:

$$\|f\| = (f, f)^{1/2}$$

a platí:
$\|\lambda f\| = |\lambda| \, \|f\|$,
$\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$,
$\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$

Lemma 1.1.2. *Nechť u_j je polynom stupně přesně j. Jsou-li polynomy $u_0, u_1, \ldots, u_m$ ortonormální a p je polynom stupně $\leq m$, potom*

$$p = \sum_{j=0}^{m} (f, u_j) u_j$$

.

Důkaz: p je lineární kombinací polynomů $u_0, u_1, \ldots, u_m$, tedy $\exists \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tak, že $p = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j u_j$:
indukcí: nechť tvrzení platí pro $m-1$ a p_m je polynom stupně $\leq m$, $p_m = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, $u_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_j x^k$, kde $b_m \neq 0$, a tedy $p_m = \frac{1}{b_m} a_m u_m + p_{m-1}$, kde p_{m-1} je polynom stupně $\leq m - 1$,
$p_{m-1} = p_m - \frac{1}{b_m} a_m u_m$
$(P, u_j) = (\sum_{k=0}^{m} \lambda_k u_k, u_j) = \lambda_j$, tedy $p = \sum_{j=0}^{m} (f, u_j) u_j$.

Věta 1.1.3. *Nechť u_j je polynom stupně přesně j. Tvoří-li polynomy $u_0, u_1, u_2, \ldots$ ortonormální systém, pak*

$$\left\| f - \sum_{j=0}^{n} (f, u_j) u_j \right\| \to 0$$

pro $n \to \infty$ pro všechny funkce $f \in C([a, b])$.

Důkaz: Z Weierstrassovy věty víme, že pro $\forall \epsilon > 0$ existuje polynom stupně, řekněme, m tak, že $|P(x) - f(x)| < \epsilon$ pro $\forall x \in [a, b]$.
Tedy $\|P(x) - f(x)\| = (\int_a^b r(x)((P(x) - f(x)))^2 dx)^{1/2} \leq \epsilon K$, kde $K = (\int_a^b r(x) dx)^{1/2}$.

Pro $g \in C([a,b])$ označme $R_n g = \sum_{j=0}^{n} (g, u_j) u_j$.
Pak pro $n \geq m$ máme podle předchozího lemmatu $R_n P = P$, a tedy
$\left\| f - \sum_{j=0}^{n} (f, u_j) u_j \right\| = \|f - R_n f\| \leq \underbrace{\|f - P\|}_{\leq \epsilon K} + \underbrace{\|P - R_n P\|}_{=0} + \|R_n P - R_n f\| =$
$= \|f - P\| + \underbrace{\|R_n(P - f)\|}_{\leq \|P-f\|} \leq 2\|P - f\| \leq 2\epsilon K$,
tedy $\sum_{j=0}^{n} (f, u_j) u_j \to f$ pro $n \to \infty$ v normě L^2.

Příklad 1.1.4.
(i) pro $r(x) \equiv 1$ a $[a,b] = [-1,1]$ máme Legendreovy polynomy
(ii) Čebyševovy polynomy $T_n : \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$

Lemma 1.1.5. *Polynomy* $\frac{1}{\sqrt{2}} T_0, T_1, T_2, \ldots$ *tvoří ortonormální systém na intervalu* $[-1,1]$ *vzhledem k váhové funkci* $r(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Důkaz: $(T_n, T_m) = \int_{-1}^{1} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n T_m dx =$
/ substituce $\cos\theta = x \Rightarrow dx = -sin\theta d\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta} d\theta = \sqrt{1-x^2} d\theta$ /
$= \int_0^{\pi 1} \frac{2}{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta) d\theta = \begin{cases} 1 & \text{pro } m = n, \\ 0 & \text{pro } m \neq n, \end{cases}$
tedy T_j tvoří ortogonální systém.

Příklad 1.1.6. další ortonormální polynomy:

polynomy	$[a,b]$	$r(x)$
Legendreovy	$[-1,1]$	1
Čebyševovy I. druhu	$[-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Čebyševovy II. druhu	$[-1,1]$	$\sqrt{1-x^2}$
Hermiteovy	$(-\infty,\infty)$	e^{-x^2}
Lagnerrovy	$[0,\infty)$	$x^\alpha e^{-x}$, $\alpha < -1$
Jacobiho	$(-1,1)$	$(1-x)^\alpha (1+x)^\alpha$
Gegenbauerovy	$[-1,1]$	$(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$

1.1.1 Legendreovy polynomy

$[a,b] = [-1,1]$, $r(x) = 1$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$

Lemma 1.1.7.
(i) P_n *je reálný polynom stupně přesně* n*.*
(ii) Pro $0 \leq r \leq n$ *je*

$$\frac{d^r}{dx^r} (x^2-1)^n = (x^2-1)^{n-r} Q_{n,r}(x),$$

kde $Q_{n,r}(x)$ *je polynom.*
(iii) Pro $0 \le r \le n$ *je* $\frac{d^r}{dx^r}(x^2-1)^n = 0$ *v bodech* $x = \pm 1$.
(iv) Pro $0 \le r \le n$ *a* $m \ge 0$ *platí*

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m dx = \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}}(x^2-1)^n \frac{d^{m+r}}{dx^{m+r}}(x^2-1)^m dx.$$

(v) $\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = \frac{(-1)^n 2^{n+1} n!}{\prod_{r=0}^{n}(2r+1)}$.
(vi) $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0$ *pro* $n \ne m$.
(vii) $\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx = \frac{2}{2n+1}$.

Důkaz:
(i) zřejmé
(ii) indukcí: $r \to r+1$:
$\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}}(x^2-1)^n = \frac{d}{dx}((x^2-1)^{n-r}Q_{n,r}(x)) = (n-r)(x^2-1)^{n-(r+1)}2xQ_{n,r}(x) +$
$+((x^2-1)^{n-r}Q'_{n,r}(x)) = (x^2-1)^{n-(r+1)}(2xQ_{n,r}(x)(n-r) + (x^2-1)Q'_{n,r}(x)) =$
$= (x^2-1)^{n-(r+1)}Q_{n,r+1}(x)$
(iii) dosazením do (ii)
(iv) per partes:
$L = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^2-1)^m|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^2-1)^m = \dots$
(opakujeme $r\times$)
(v) $I_n = \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx =$
$/\ u' = 1,\ v = (x^2-1)^n \Rightarrow u = x\ v' = 2xn(x^2-1)^{n-1}\ /$

$$= \underbrace{x(x^2-1)|_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} 2x^2(x^2-1)^{n-1}dx = -2\int_{-1}^{1}((x^2-1)+1)n(x^2-1)^{n-1}dx =$$

$= -2n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx - 2n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-1}dx = -2nI_n - 2nI_{n-1} \Rightarrow I_n = \frac{-2nI_{n-1}}{1+2n}$
indukcí: $I_0 = \int_{-1}^{1} 1dx = 2$
$n-1 \to n$: $I_n = \frac{-2n}{1+2n}\frac{(-1)^{n-1}2^n(n-1)!}{\prod_{r=0}^{n-1}(2r+1)} = \frac{(-1)^n 2^{n+1} n!}{\prod_{r=0}^{n}(2r+1)}$
(vi) v (iv) položme $r = m+1$ a búno předpokládejme $n > m$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m dx = (-1)^r \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}}(x^2-1)^n \underbrace{\frac{d^{m+r}}{dx^{m+r}}(x^2-1)^m}_{=0} dx = 0$$

(vii) v (iv) položme $r = m = n$:

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \underbrace{\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n}_{=(2n)!}(x^2-1)^n dx = \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \frac{(2n)!(-1)^n 2^{n+1} n!}{\prod_{r=0}^{n}(2r-1)} = \frac{2}{2n+1}$$

Lemma 1.1.8. *Nechť* $u_1, u_2, \dots, u_n$ *jsou ortonormální polynomy vzhledem k váhové funkci* $r(x)$ *na intervalu* $[a,b]$ *a nechť* u_j *je polynom stupně přesně* j. *Pak* u_j *má přesně* j *jednoduchých kořenů ležících v* $[a,b]$.

Důkaz: Sporem: Nechť tvrzení věty neplatí. Pak u_n mění znaménko méně než $n\times$, řekněme, že v bodech $x_1, x_2, \dots, x_k \in (a,b)$.

Nechť $Q(x) = \prod_{j=1}^{k}(x - x_j)$.
Pak Qu_n je na $[a, b] - \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} > 0$ nebo < 0.
Tedy $(Q, u_n) = \int_a^b r(x)Q(x)u_n(x)dx \neq 0$.
Ale $Q(x)$ má stupeň $< n$, a tedy
$(Q, u_n) = (\sum_{j=1}^{k}(Q, u_j)u_j, u_n) = \sum_{j=1}^{k}(Q, u_j)\underbrace{(u_j, u_n)}_{=0} = 0$
$\rightarrow$ spor.

1.1.2 Aplikace Legendreových polynomů v numerice

Gaussova kvadratura

Chceme počítat $\int_a^b f(x)dx$ pomocí lineární substituce

$$u = \frac{2}{b-a}(x - \frac{b+a}{2}).$$

Stačí použít $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Výpočet z definice Riemannova integrálu: přes Riemannovy součty

$$T_n(f) = \sum_{r=-n}^{n-1} \frac{1}{n} f(\frac{2r+1}{2n}).$$

Tato metoda zaručeně konverguje, ale velmi pomalu.

Příklad 1.1.9. $f(x) = x^2$
$T_n(f) = \sum_{r=-n}^{n-1} \frac{1}{n}(\frac{2r+1}{2n})^2 = 2\frac{1}{4}n^{-3}\sum_{r=-n}^{n-1}((2r^{2+1})^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^2}$
s použitím $\sum_{r=0}^{n-1} r = \frac{n(n-1)}{2}$ a $\sum_{r=0}^{n-1} r^2 = \frac{n(n-1)(2n-1}{6}$.

Chceme co nejrychlejší konvergenci $\rightarrow$ *kvadraturní formule*, přesné pro polynomy.

Lemma 1.1.10. *Nechť* $-1 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq 1$. *Pak existují jednoznačně určená čísla* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *tak, že*

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \sum_{j=1}^{n} A_j P(x_j)$$

pro polynomy stupně $\leq n - 1$.

Důkaz:

- existence: Označme $Q_j(x) = \frac{\prod_{k \neq j}(x - x_k)}{\prod_{k=j}(x_j - x_k)}$.
  Platí $Q_j(x_k) = 0$ pro $k \neq j$ a $Q_j(x_j) = 1$.
  Nechť $P(x)$ je polynom stupně $\leq n-1$. Pak $R(x) = P(x) - \sum_{j=1}^{n} P(x_j)Q_j(x)$.
  $R(x)$ je polynom stupně $\leq n - 1$ a platí $R(x_j) = 0 \Rightarrow R(x)$ má n kořenů $\Rightarrow$

$R(x) \equiv 0$ a platí $P(x) = \sum_{j=1}^{n} P(x_j)Q_j(x)$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} P(x)dx = \int_{-1}^{1} P(x_j)Q_j(x)dx = \sum_{j=1}^{n} P(x_j) \underbrace{\int_{-1}^{1} Q_j(x)dx}_{=:A_j} =$

$= \sum_{j=1}^{n} A_j P(x_j)$.

- jednoznačnost: Nechť $\int_{-1}^{1} P(x)dx = \sum_{j=1}^{n} B_j P(x_j)$ pro polynom stupně $\leq n - 1$.
  Pro $P(x) = Q_j(x)$ dostaneme $\int_{-1}^{1} Q_j(x)dx = \sum_{k=1}^{n} B_k Q_j(x_k) = B_j$, tedy $A_j = B_j$.

Věta 1.1.11. *(Gaussova) Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou kořeny $n-$tého Legendreova polynomu. Pak existují čísla $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tak, že*

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \sum_{j=1}^{n} A_j P(x_j)$$

pro libovolný polynom stupně $\leq 2n - 1$.

Důkaz: Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou konstanty z předchozího lemmatu, příslušné Legendreovým polynomům $P_n(x)$.
Je-li $P(x)$ polynom stupně $\leq 2n - 1$, vydělme jej P_n:
$P(x) = P_n(x)Q(x) + R(x)$, kde $stQ(x) \leq n - 1$ a $stR(x) \leq n - 1$.
$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \underbrace{\int_{-1}^{1} P_n(x)Q(x)dx}_{=0} + \int_{-1}^{1} R(x)dx = \sum_{j=1}^{n} A_j R(x_j)$,
ale $P(x_j) = \underbrace{P_n(x_j)}_{=0} Q(x_j) + R(x_j) = R(x_j)$
$\Rightarrow \int_{-1}^{1} P(x)dx = \sum_{j=1}^{n} A_j P(x_j$.

Lemma 1.1.12. *Nechť $-1 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq 1$ a $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou takové, že $\int_{-1}^{1} P(x)dx = \sum_{j=1}^{n} A_j P(x_j)$ pro všechny polynomy stupně $\leq 2n - 1$. Pak body $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou kořeny Legendreova polynomu $P_n(x)$.*

Důkaz: Nechť $T(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j)$. Pak $TP_r(x)$ pro $r < n$ má stupeň $\leq 2n - 1$.
Pak $\int_{-1}^{1} TP_r(x)dx = \sum_{j=1}^{n} A_j T(x_j)P_r(x_j) = 0$
$\Rightarrow T(x)$ je polynom stupně n, který je kolmý na $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$
$\Rightarrow T(x)$ je násobek $P_n(x)$ a má tedy stejné kořeny jako $P_n(x)$
$\Rightarrow x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou kořeny polynomu $P_n(x)$.

Poznámka. Newton - Coatesovy formule: $x_j = -1 + \frac{2(j-1)}{n}$

- $n = 2 \rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-1) + f(1) \rightarrow$ lichoběžníkové pravidlo

- $n = 3 \to \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}(f(-1) + 4f(0) + f(1)) \to$ Simpsonovo pravidlo
- Pro velké n jsou A_j velká čísla střídající znaménko,
  např. $n = 21$: $A_1 \approx 10^6$, $A_2 \approx 10^{-6}$
  $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+16x^2} dx \ T_{21}(x) = -1,93$
  Pro Gaussovu formuli se toto nestane.

Lemma 1.1.13. *Nechť* $-1 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq 1$ *a* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *jsou jako v Gaussově větě. Pak*
(i) $A_1, A_2, \ldots, A_n > 0$
(ii) $\sum_{j=1}^{n} A_j = 2$

Důkaz:
(i) $Q_j(x) = \prod_{k \neq j}(x - x_j)^2$, $st Q_j(x) = 2n - 2$, tedy podle Gaussovy věty
$\int_{-1}^{1} Q_j(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k Q_j(x_k) = A_j Q_j(x_j)$
$Q_j(x_k) > 0$, $\int_{-1}^{1} Q_j(x)dx > 0 \Rightarrow A_j > 0$
(ii) Pro $P(x) \equiv 0$ máme $2 = \int_{-1}^{1} 1dx = \sum_{j=1}^{n} A_j P(x_j) = \sum_{j=1}^{n} A_j$

Označení:
(i) $\mathbb{P}_{2n-1}$ ... prostor polynomů stupně $\leq 2n - 1$
(ii) $G_n(f) = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j)$, kde A_j a x_j jsou jako v Gaussově větě
(iii) $\|f\|_{sup} = sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|$

Věta 1.1.14. *(Stieltjes) Platí:*

$$\left| G_n(f) - \int_{-1}^{1} f(x)dx \right| \leq 4 inf \left\{ \|f(t) - P(t)\|_{sup}, P(t) \in \mathbb{P}_{2n-1} \right\}$$

Důkaz: Nechť $P(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$, pak $G_n(P) = \int_{-1}^{1} P(x)dx$, tedy
$\left| G_n(f) - \int_{-1}^{1} f(x)dx \right| = \left| G_n(f) - G_n(P) - (\int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{-1}^{1} P(x)dx) \right| \leq$
$\leq |G_n(f) - G_n(P)| + \left| \int_{-1}^{1} (f(x) - P(x))dx \right| \leq \left| \sum_{j=1}^{n} A_j (f(x_j) - P(x_j))dx \right| +$
$+2 \|f(x) - P(x)\|_{sup} \leq 2 \|f(x) - P(x)\|_{sup} + 2 \|f(x) - P(x)\|_{sup} =$
$= 4 \|f(x) - P(x)\|_{sup}$

1.2 Aplikace Fourierových řad na problém rekurence náhodné procházky

Opakování: Fourierovy řady v $\mathbb{R}^1$
$f(x)$ ... 2π-periodická funkce,

$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$,
pak $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$

Analogicky v $\mathbb{R}^m$:
$x = (x_1, \ldots, x_m)$,
$f(x) \ldots 2\pi$-periodická funkce ve všech proměnných, tj.
$f(x_1, \ldots, x_i + 2\pi, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$ pro $\forall i$,
$k = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m$ multiindex,
$k \cdot x = \sum_{j=1}^m k_j \cdot x_j$ pro $k \in \mathbb{Z}^m$ a $x \in \mathbb{R}^m$,
$c_k = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{[0,2\pi]^m} f(x)e^{-ikx}dx$,
pak $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} c_k e^{ikx}$

1.2.1 Náhodná procházka

- V $\mathbb{R}^1$:
  Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_m$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin.
  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$

  Náhodný proces
  $$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_m,\ S_0 = 0$$
  se nazývá *Symetrická jednoduchá náhodná procházka.*

  Platí:
  $E(X_j) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0$
  $E(X_j^2) = E(1) = 1$
  $E(S_n) = \sum E(X_j) = 0$
  $E(S_n^2) = \sum E(X_j^2) = \sum_{j=1}^n 1 = n$

- V $\mathbb{R}^m$:
  např. $m = 2$: Uvažujme $\mathbb{Z}^2$ = celočíselné body v $\mathbb{R}^2$
  Rekurence: Vrátí se částice zpět do počátku? S jakou pravděpodobností?

Věta 1.2.1. *(Pólya) Uvažujme částici konající náhodnou procházku na množině $\mathbb{Z}^m$, kde $m \in \mathbb{N}$, splňující následující podmínky:*
(i) Jestliže v čase $t = n$ je částice v bodě $k = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m$, pak pravděpodobnost $p(k, k')$, že v čase $t = n + 1$ bude v bodě $k = (k'_1, \ldots, k'_m) \in \mathbb{Z}^m$, je
$p(k,k') = \begin{cases} \frac{1}{2m}, & \textit{je-li } \sum_{j=1}^m \left|k_j - k'_j\right| = 1 \textit{ (sousední body)}, \\ 0 & \textit{pro ostatní } k'. \end{cases}$
(ii) Jednotlivé kroky jsou nezávislé náhodné veličiny.
(iii) V čase $t = 0$ je částice v bodě $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^m$.

Pak:
(I) P(částice se vrátí do počátku v nějakém čase $t > 0) = 1$ pro $m = 1,\ 2$,
(II) P(částice se vrátí do počátku v nějakém čase $t > 0) < 1$ pro $m > 3$.

Důsledek 1.2.2.
(i) Pro $m \leq 2$ částice navštíví s pravděpodobností 1 nekonečněkrát každý bod v Z^m.
(ii) Pro $m > 2$ se vzdálenost částice od počátku s pravděpodobností 1 blíží ∞ pro $t \to \infty$.

Lemma 1.2.3. *Nechť q_n je pravděpodobnost, že se částice vrátí do počátku alespoň $n\times$ a nechť u_n je pravděpodobnost, že se vrátí přesně $n\times$. Označme $q = q_1$. Pak pro $\forall n \geq 0$ platí*

$$q_n = q^n,\ u_n = q^n(1-q).$$

Důkaz: $q_{n+1} = P(\text{vrátí se alespoň } (n+1)\times) =$
$= P(\text{vrátí se alespoň } (n+1) \times /n\times) \cdot q_n = q \cdot q_n$
$q_0 = 1 \Rightarrow q_n = q^n$
$u_n = P(\text{vrátí se alespoň } n\times) - P(\text{vrátí se alespoň } (n+1)\times) = q^n - q^{n+1} = q^n(1-q)$

Lemma 1.2.4.
(i) Je-li $q = 1$, pak s pravděpodobností 1 se částice vrátí do počátku nekonečněkrát.
(ii) Je-li $q < 1$, pak s pravděpodobností 1 se částice vrátí do počátku konečněkrát.

Důkaz: $P(\text{nekonečněkrát}) = 1 - P(\text{konečněkrát}) =$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} u_i = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} q^i(1-q) = \begin{cases} 1-(1-q)\cdot\frac{1}{1-q} = 1 - 1 = 0 & \text{pro } q < 1, \\ 1 - \sum_{i=1}^{\infty} q^i \cdot 0 = 1 - 0 = 1 & \text{pro } q = 1. \end{cases}$$

Lemma 1.2.5. *Nechť p_k je pravděpodobnost, že se částice vrátí do počátku v čase k. Pak:*
(i) Jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} p_k$ konverguje, pak $q = P$(vrátí se do počátku v čase $t > 0) < 1$.
(ii) Jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} p_k$ diverguje, pak $q = P$(vrátí se do počátku v čase $t > 0) = 1$.

Důkaz:
(i) Je - li $q < 1$, pak podle předchozího lemmatu je počet návratů do počátku Z s pravděpodobností 1 konečný, tj. $P(Z = \infty) = 0$.
$E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} k u_k = \sum_{k=0}^{\infty} k q^k (1-q) =$
$/ \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q},\ \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k q^k = \frac{q}{(1-q)^2} /$
$= (1-q)\frac{q}{(1-q)^2} = \frac{q}{(1-q)} < \infty$
Pro $\forall j$ definujeme náhodnou veličinu

$$Z_j = \begin{cases} 0, & \text{pokud částice není v počátku v čase } j, \\ 1, & \text{pokud částice je v počátku v čase } j. \end{cases}$$

$Z = \sum_{j=0}^{\infty} Z_j$
$E(Z) = \sum_{j=0}^{\infty} E(Z_j) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j < \infty$

(ii) Nechť $q = 1$. Pro libovolné pevné $k \in \mathbb{N}$ definujme náhodnou veličinu
$Z_k = \begin{cases} k, & \text{pokud se částice vrátila nejméně } k\times, \\ r, & \text{pokud se částice vrátila } r\times, \text{ kde } r \leq k. \end{cases}$
Z předchozího lemmatu víme, že $Z_k = k$ s pravděpodobností rovnou 1.
$Z_k \leq \sum_{j=0}^{\infty} Z_j$.
$k = E(Z_k) \leq E(\sum_{j=0}^{\infty} Z_j) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j$, ale k je libovolné, tedy $\sum_{j=0}^{\infty} p_j$ diverguje.

Lemma 1.2.6. *Pro $x \in A$ platí:*

$$|x_j|^2 \geq 1 - \cos x_j \geq \frac{|x_j|^2}{4}$$

.

Důkaz: $\left|\cos x_j - (1 - \frac{x_j^2}{2})\right|) = \left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x_j^2)^n}{2n!})\right| \leq x_j^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_j^{2n-2}}{2n!}) \leq$
$\leq x_j^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{2n}} = x_j^2 \frac{1}{99} \leq x_j^2 \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{-x_j^2}{4} \leq 1 - \cos x_j - \frac{x_j^2}{2} \leq \frac{x_j^2}{4}$
$\Rightarrow \frac{x_j^2}{4} \leq 1 - \cos x_j \leq \frac{3}{4} x_j^2 \leq x_j^2$

Důkaz: Pólyovy věty: Označme $k(j)$ polohu částice v čase $t = j$. Chceme zjistit, zda $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ konverguje nebo diverguje. Chceme spočítat $p_j = P(k(j) = 0)$.
Uvažujme funkci $f_j(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $f_j(x) = \sum_{r \in \mathbb{Z}^m} P(k(j) = r) e^{-ir \cdot x} = E(e^{-ik(j) \cdot x})$.
$f_j(x)$ je dána jako součet Fourierovy řady (analogie charakteristické funkce).
Máme $c_r = \hat{f}(r) = P(k(j) = r)$ pro $r \in \mathbb{Z}^m$.
$f_j(x) = E(e^{ik(j) \cdot x}) = E(e^{i \sum_{q=1}^{j} s(q) \cdot x})$, kde $s(q)$ je q-tý krok, tj. $s(q) = k(q) - k(q-1)$, $s(q)$ jsou nezávislé, stejně rozdělené, tedy i $e^{is(q)}$ jsou nezávislé, a tedy
$E(e^{i \sum_{q=1}^{j} s(q) \cdot x}) = E(\prod_{q=1}^{j} e^{is(q) \cdot x}) = \prod_{q=1}^{j} E(e^{is(q) \cdot x}) = \prod_{q=1}^{j} E(e^{is(1) \cdot x}) =$
$= (E(e^{is(1) \cdot x}))^j = (f_1(x))^j$.
Máme obecně $P(k(j) = r) = \hat{f}_j(r) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{[0,2\pi]^m} f_j(x) e^{-ir \cdot x} dx$,
speciálně pro $r = 0$: $P(k(j) = 0) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{[0,2\pi]^m} f_j(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{[0,2\pi]^m} f_1(x)^j dx$.
Dále máme $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{[0,2\pi]^m} \frac{1}{(2\pi)^m} f_1(x)^j dx = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{[0,2\pi]^m} \frac{dx}{1 - f_1(x)}$.
Spočítáme $f_1(x)$:
$s(1)$ může být $(\pm 1, 0, \ldots, 0)$, $(0, \pm 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, \ldots, 0, \pm 1)$, pravděpodobnost každé možnosti je $\frac{1}{2m}$, tedy $f_1(x) = \frac{1}{2m}(e^{ix_1} + e^{-ix_1} + \ldots + e^{ix_m} + e^{-ix_m}) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \cos x_j$,
kde $\cos x_j = 1 - \frac{x_j^2}{2} + \frac{x_j^4}{4} - \ldots$
Je-li $|x_j| \geq \frac{1}{10}$, pak $\cos x_j \leq 1 - \frac{x_j^2}{2}$, a tedy je-li $A = x \in [0, 2\pi]^m$, $\|x\|_1 < \frac{1}{10}$,
kde $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{m} |x_j|$.
Pak pro $x \notin A$ platí $f_1(x) \leq 1 - \frac{1}{200}$, a tedy $\int_{x \notin A} \frac{dx}{1 - f_1(x)} \leq \frac{1}{\frac{1}{200}} (2\pi)^m = 200(2\pi)^m$.
Tedy konvergence závisí jen na konvergenci $\int_{x \in A} \frac{dx}{1 - f_1(x)}$.
Označme $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{m} x_j^2$.
Sečtením přes j dostaneme $\frac{\|x\|^2}{4} \leq m - \sum_{j=1}^{m} \cos x_j \leq \|x\|^2$

$$\Rightarrow \tfrac{\|x\|^2}{4m} \leq \underbrace{1 - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\cos x_j}_{=f_1(x)} \leq \tfrac{\|x\|^2}{m}.$$

Tedy konvergence integrálu $\int_{x\in A}\frac{dx}{1-f_1(x)}$ je ekvivalentní konvergenci integrálu $\int_{x\in A}\frac{1}{\|x\|^2}$.
V polárních souřadnicích: $r = \|x\|$
$\int_0^\tau \frac{1}{r^2} r^{m-1} dr = \int_0^\tau r^{m-3} dr$ konverguje $\Leftrightarrow m - 3 > -1 \Leftrightarrow m > 2$.
Tedy pro $m > 2$ je $P < 1$ a pro $m = 1,\ 2$ je $P = 1$.

Kapitola 2

Diskrétní fourierova transformace

Motivace

1. Fourierovy řady
   rozvoj 2π-periodické funkce do báze e^{ikx}, kde $k \in \mathbb{Z}$

   2π-periodická funkce $\leftrightarrow$ funkce na $T = \{z \in \mathbb{C},\ \|z\| = 1\}$
   $g(x) \leftrightarrow g(e^{ikx})$

   T je grupa
   - multiplikativní: $e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$
   - aditivní: sčítáme úhly
   e^{ikx} je charakter grupy T, tj. $e^{ikx} : T \to \mathbb{C}$, $e^{ikx} \mapsto \left|e^{ikx}\right|$

2. Fourierova transformace
   rozvoj funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ do báze $e^{i\xi x}$, kde $\xi \in \mathbb{R}$

   $\mathbb{R}$ je grupa s operací $+$
   $e^{i\xi x}$ je charakter grupy $\mathbb{R}$

3. Diskrétní fourierova transformace

Uvažujme konečnou grupu G řádu N. G má dvě realizace:
(i) multiplikativní: grupa N-tých odmocnin z 1
$\omega = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ ... primitivní $\sqrt[N]{1}$
$G = \left\{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{N-1}\right\}$
(ii) aditivní: grupa zbytkových tříd při dělení N
$G = \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$

Uvažujme prostor funkcí na G:

$$L^2(G) = \{f : G \to \mathbb{C}\}.$$

$L^2(G)$ je konečnědimenzionální vektorový prostor se skalárním součinem

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{N} \sum_{x \ inG} f(x)\bar{g}(x), \ \ f, g \in L^2(G).$$

Skalární součin indukuje normu

$$\|f\| = \langle f, g \rangle^{1/2}$$

a metriku

$$\rho(f, g) = \|f - g\|.$$

Platí Cauchy - Schvartzova nerovnost

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \, \|g\|$$

a Trojúhelníková nerovnost

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Je-li $\langle f, g \rangle = 0$, řekneme, že funkce f, g jsou *ortogonální*.

Lemma 2.0.7. *Jsou-li $v_1, \ldots, v_m$ ortogonální funkce a $v = \sum_{j=1}^m a_j v_j$, pak*

$$a_j = \frac{\langle v, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle}.$$

Důkaz: $\langle v, v_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^m a_k v_k, v_j \rangle = \sum_{k=1}^m a_k \langle v_k, v_j \rangle = a_j \langle v_j, v_j \rangle$

Definice 2.0.8. Standartní bází $L^2(G)$ je δ-*funkce*: pro $i = 0, 1, \ldots, N-1$ položme $\delta_i(j) = 1$ pro $j = i$ a $\delta_i(j) = 0$ pro $j \neq i$.

Lemma 2.0.9. *δ-funkce tvoří ortogonální bázi $L^2(G)$.*

Důkaz: $\langle \delta_i, \delta_j \rangle = \frac{1}{N} \sum_k \delta_i(k)\bar{\delta}_j(k) = \begin{cases} 0 & \text{pro } j \neq i, \\ \frac{1}{N} & \text{pro } j = i. \end{cases}$

Každou funkci $f \in L^2(G)$ lze tedy psát ve tvaru

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\delta_j(x),$$

kde $f(j) = \frac{\langle f, \delta_j \rangle}{\langle \delta_j, \delta_j \rangle} = N \langle f, \delta_j \rangle$.

Prostor $L^2(G)$ je izomorfní prostoru $\mathbb{C}^n$ se standartním skalárním součinem, zobrazení $T : L^2(G) \to \mathbb{C}^n$ je dáno vztahem

$$T(f) = \frac{1}{\sqrt{N}}(f(0), f(1), \ldots, f(N-1)).$$

2.1 Cyklická konvoluce

Pro $f, g \in L^2(G)$ definujeme

$$f * g(x) = \frac{1}{N} \sum_{y \in G} f(y) g(x - y)$$

pro $\forall x \in G$.

Lemma 2.1.1.

$$\delta_i * \delta_j(x) = \frac{1}{N} \delta_{i+j}(x)$$

Důkaz: $\delta_i * \delta_j(x) = \frac{1}{N} \sum_{y \in G} \delta_i(y) \delta_j(x-y) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{pro } x = i + j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

Příklad 2.1.2. $N = 7$, $f(x) = \delta_0(x) + \delta_1(x) + \delta_2(x)$, $g(x) = \frac{1}{2} f(x)$, $f * g(x) = ?$
$f * g(0) = \frac{1}{7} \sum_{y \in \{0,\ldots,6\}} f(y) g(0-y) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{14}$
$f * g(1) = \frac{1}{7} \sum_{y \in \{0,\ldots,6\}} f(y) g(1-y) = \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{1}{7}$
$f * g(2) = \frac{1}{7} \sum_{y \in \{0,\ldots,6\}} f(y) g(2-y) = \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{14}$
$f * g(3) = \frac{1}{7} \sum_{y \in \{0,\ldots,6\}} f(y) g(3-y) = \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{1}{7}$
$f * g(4) = \frac{1}{7} \sum_{y \in \{0,\ldots,6\}} f(y) g(-3-y) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{14}$
$f * g(5) = \frac{1}{7} \sum_{y \in \{0,\ldots,6\}} f(y) g(-2-y) = \frac{1}{7} \cdot 0 = 0$
$f * g(6) = \frac{1}{7} \sum_{y \in \{0,\ldots,6\}} f(y) g(-1-y) = \frac{1}{7} \cdot 0 = 0$

Definice 2.1.3. Pro $m = 0, 1, \ldots, N-1$ definujme funkci

$$e_m(j) = e^{\frac{2\pi i j m}{N}} = (e^{\frac{2\pi i j}{N}})^m = (\omega^j)^m = \omega^{jm}.$$

Tedy $e_m(j)$ je m-tá odmocnina, diskrétní analogie exponenciály.

e_m jsou charaktery grupy G, tvoří grupu vzhledem k násobení:
$e_m(j) e_n(j) = e_{m+n}(j)$.

2.2 Diskrétní fourierova transformace

Definice 2.2.1. Nechť $f \in L^2(G)$. Definujme *diskrétní fourierovu transformaci* předpisem

$$\hat{f}(j) = (f, e_j) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(m) \omega^{-mj}$$

pro $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

Lemma 2.2.2. *Funkce e_m, $m = 0, 1, \ldots, N-1$, tvoří ortonormální bázi prostoru $L^2(G)$.*

Důkaz:
(i) $\langle e_m, e_m \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e_m(j)\hat{e}_m(j) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (\omega^j)^m (\omega^j)^m = \frac{1}{N} \cdot N = 1$
(ii) $\langle e_m, e_n \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e_m(j)\hat{e}_n(j) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (\omega^j)^m (\omega^j)^n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (\omega^{m-n})^j =$
$= \frac{1}{N} \cdot \frac{1-(\omega^{m-n})^N}{1-\omega^{m-n}} = \frac{1}{N} \frac{1-1}{1-\omega^{m-n}} = 0$

Věta 2.2.3. *(o inverzní transformaci) Je-li $f \in L^2(G)$, pak*

$$f = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{f}(j) e_j.$$

Důkaz: e_j tvoří ortonormální bázi, tedy $f = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e_j$
$\Rightarrow a_j = (f, e_j) \Rightarrow (f, e_j) = (\sum_{k=0}^{N-1} a_k e_k, e_j) = a_j$

Důsledek 2.2.4. Diskrétní fourierová transformace je lineární zobrazení, které je injektivní a surjektivní.

Lemma 2.2.5. *(Parsevalova rovnost)*

$$\langle f, f \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} |\langle f, e_j \rangle|^2$$

Důkaz: $\left\langle \sum_{k=0}^{N-1} a_k e_k, \sum_{l=0}^{N-1} a_l e_l \right\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_k \bar{a}_l \langle e_k, e_l \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \bar{a}_k \cdot 1 =$
$= \sum_{k=0}^{N-1} |a_k|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} |\langle f, e_j \rangle|^2$

Příklad 2.2.6. Diskrétní fourierová transformace konkrétních funkcí
(i) konstanta $f(j) \equiv 1$ pro $\forall j \in G$
$\hat{f}(m) = (f, e_m) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\hat{\omega}^{jm} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} 1 \cdot \omega^{-jm} = \frac{1-(\omega^{-m})^N}{1-\omega^{-m}} = 0$ pro $m \neq 0$
$\hat{f}(0) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} 1 = \frac{1}{N} \cdot N = 1$
$\Rightarrow \hat{(1)} = \delta_0$
(ii) $f(j) = e_k(j) = e^{\frac{2\pi ijk}{N}}$
$\hat{f}(m) = (f, e_m) = (e_k(j), e_m) = \begin{cases} 1 & \text{pro } m = k, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$
$\Rightarrow \hat{(e_k)} = \delta_k$
(iii) $f(j) = \delta_k(j)$

$\hat{f}(m) = (f, e_m) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\delta_k(j)e^{\frac{-2\pi ijm}{N}} = \frac{1}{N}e^{\frac{-2\pi ijk}{N}} = \frac{1}{N}\bar{e}_k(m) = \frac{1}{N}e_k(-m)$
$\Rightarrow (\hat{\delta_k}) = \frac{1}{N}\bar{e_k}$
(iv) $f_j = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})(j)$
$\hat{f}(m) = \frac{1}{2}\hat{\delta}_1(m) + \frac{1}{2}\hat{\delta}_{-1}(m) = \frac{1}{2N}\bar{e}_1(m) + \frac{1}{2N}\bar{e}_{-1}(m) = \frac{1}{2N}(e^{\frac{-2\pi im}{N}} + e^{\frac{2\pi im}{N}}) =$
$= \frac{1}{2N}(2\cos(\frac{2\pi m}{N})) = \frac{1}{N}\cos(\frac{2\pi m}{N})$

Věta 2.2.7. *Diskrétní fourierová transformace převádí konvoluci na násobení, tedy*

$$(f \hat{*} g)(j) = \hat{f}(j)\hat{g}(j)$$

.

Důkaz: $(f * g)(y) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(x)g(y-x)$
$(f \hat{*} g)(y) = \langle (f * g)(y), e_j(y)\rangle = \frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}(f * g)(y)e_j(y) =$
$= \frac{1}{N^2}\sum_{y=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} f(x)g(y-x)\omega^{jy} = \frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x)g(y-x)\omega^{jx}\omega^{j(y-x)} =$
$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(x)\omega^{jx} \cdot \sum_{y=0}^{N-1} g(y-x)\omega^{j(y-x)} = \hat{f}(j)\hat{g}(j)$

Poznámka. Konvoluce pro funkce na $\mathbb{R}$ nemá jednotku, ale na $L^2(G)$ jednotku má.

Lemma 2.2.8. *Je-li $D(r) = 0$ pro $r \neq 0$ a $D(0) = N$ (tj. $D = N\delta_0$), pak $f * D(x) = f(x)$ pro $\forall f \in L^2(G)$, tj. funkce D je jednotkou na $L^2(G)$ vzhledem ke konvoluci.*

Důkaz: přímým výpočtem:

$$f * D(x) = f(x) = \frac{1}{N}\sum_{y\in G} f(y) \underbrace{D(x-y)}_{=\begin{cases} N & \text{pro } y = x, \\ 0 & \text{jinak.}\end{cases}} = \frac{1}{N}\cdot Nf(x) = f(x)$$

Lemma 2.2.9. *Nechť $N \geq 2$. Pak $e_0, e_1 \neq 0$, ale $e_0 * e_1 = 0$, tj. v $L^2(G)$ jsou dělitelé nuly (není to těleso).*

Důkaz: Nechť $f = e_0 * e_1$. Pak $\hat{f}(j) = \underbrace{\hat{e}_0(j)}_{\delta_0}\underbrace{\hat{e}_1(j)}_{\delta_1} = \begin{cases} 1\cdot 0 & \text{pro } j = 0, \\ 0 \cdot 1 & \text{pro } j = 1, \\ 0\cdot 0 & \text{jinak.}\end{cases}$

$\Rightarrow \hat{f}(j) \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$

2.3 Další vlastnosti diskrétní Fourierovy transformace

2.3.1 Posunutí

Nechť

$$f_k(j) = f(j-k).$$

Posunutí lze napsat pomocí konvoluce s δ-funkcí:
$\delta_k * f(j) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\delta_k(i)f(j-i) = \frac{1}{N}f(j-k)$
$\Rightarrow f(j-k) = (N\delta_k) * f(j) \Rightarrow$

$$\hat{f}_k(j) = \hat{f}_j \cdot N \cdot \frac{1}{N} \cdot e_k(-j) = \hat{f}(j)\omega^{-jk}$$

Tedy koeficienty se otočí a absolutní hodnota se zachová.

Speciálně posun o půl periody: $k = \frac{N}{2}$ pro N sudé
$\omega^{-k} = \omega^{-\frac{N}{2}} = -1 \Rightarrow \hat{f}_k(j) = (-1)^j\hat{f}(j)$

2.3.2 Modulace (frekvenční posun)

Nechť $f \in L^2(G)$. Označme

$$g_k(j) = f(j)e^{\frac{2\pi ijk}{N}}.$$

$k \dots$ nosná frekvence
$f \dots$ signál
$g_k \dots$ modulovaný signál

$$\hat{g}_k(m) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(j)\omega^{-mj}\omega^{kj} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(j)\omega^{-(m-k)j} = \hat{f}(m-k)$$

2.4 Transformace sumy a diference

Definice 2.4.1. Nechť $f \in L^2(G)$. Řekneme, že g *je suma* $f \Leftrightarrow$

$$g(j) = f(j) + f(j+1).$$

Definice 2.4.2. Podle transformace posunutí dostaneme *diskrétní Fourierovu transformaci sumy*

$$\hat{g}(m) = (1 + \omega^m)\hat{f}(m).$$

Poznámka. Pro m malé je $1 + \omega^m$ velké.

Definice 2.4.3. Nechť $f \in L^2(G)$. Řekneme, že g *je diference* $f \Leftrightarrow$

$$g(j) = f(j) - f(j+1).$$

Definice 2.4.4. *Diskrétní Fourierovu transformaci diference* definujeme

$$\hat{g}(m) = (1 - \omega^m)\hat{f}(m).$$

2.5 Maticová reprezentace diskrétní Fourierovy transformace

Ve standartní bázi tvořené δ-funkcemi je matice diskrétní Fourierovy transformace obrazy $\delta_0, \delta_1, \ldots$ do sloupců:

$$\delta_j \to \frac{1}{N} e_j(-m) = \frac{1}{N} e^{\frac{2\pi i}{N}(-jm)}$$

$(A_{jm})_{jm=1}^{N}$, $A_{jm} = \frac{1}{N}\omega^{-(j-1)(m-1)}$

Příklad 2.5.1.

- $N = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- $N = 4 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{i}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{i}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{i}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{i}{4} \end{pmatrix}$

2.6 Symetrická diskrétní Fourierova transformace

Analýza digitálního signálu
signál ... posloupnost reálných čísel $f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}$
pre-procesing of data
post-procesing of data

(i) reálná diskrétní Fourierova transformace
(ii) sinová diskrétní Fourierova transformace (liché funkce)
(iii) cosinová diskrétní Fourierova transformace (sudé funkce)

2.6.1 Reálná diskrétní Fourierova transformace

Uvažujme reálnou funkci $f : G \to \mathbb{R}$. Pak

$$\hat{f}(N-k) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(j)\overline{\omega^{(N-k)j}} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \overline{\overline{f(j)} \cdot \overline{\omega^{kj}}} = \overline{\hat{f}(k)}.$$

Explicitní tvar diskrétní Fourierova transformace:
$\hat{f}(k) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(j)e^{-\frac{2\pi ijk}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(j)\left[\cos\frac{2\pi jk}{N} + i\sin\frac{2\pi jk}{N}\right]$

Ze symetrie víme, že stačí spočítat $\hat{f}(k)$ pro $0 \le k \le \frac{N}{2}$, neboť $\hat{f}(N-k) = \overline{\hat{f}(k)}$.

Definice 2.6.1. Reálná uspořádaná N-tice $\hat{f}(0), Re\hat{f}(1), Im\hat{f}(1), \ldots, \hat{f}(\frac{N}{2})$ se nazývá *Reálná diskrétní Fourierova transformace funkce f.*

Máme
$\hat{f}(0) = \hat{f}(N) = \overline{\hat{f}(0)} \Rightarrow \hat{f}(0)$ je reálná
$\hat{f}(\frac{N}{2}) = \hat{f}(N - \frac{N}{2}) = \overline{\hat{f}(\frac{N}{2})} \Rightarrow \hat{f}(\frac{N}{2})$ je reálná

Máme
$Re\hat{f}(k) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(j)\cos\frac{2\pi jk}{N}$
$Im\hat{f}(k) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(j)i\sin\frac{2\pi jk}{N}$

2.6.2 Inverzní reálná diskrétní Fourierova transformace

Lemma 2.6.2. *Pro $f(x) \in L^2(G)$ s reálnými hodnotami platí*

$$f(j) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1}\left[a_m\cos\frac{2\pi jm}{N} + b_m\sin\frac{2\pi jm}{N}\right] + \frac{1}{2}a_{\frac{N}{2}}\cos(j\pi),$$

kde $a_0 = 2\hat{f}(0)$, $a_m = 2Re\hat{f}(m)$, $b_m = -2Im\hat{f}(m)$, $a_{\frac{N}{2}} = 2\hat{f}(\frac{N}{2})$.

Důkaz: $f(j) = \sum_{m=0}^{N-1}\hat{f}(m)e^{\frac{2\pi ijm}{N}} =$
$= \hat{f}(0) + \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1}\left[\hat{f}(m)e^{\frac{2\pi ijm}{N}} + \hat{f}(-m)e^{-\frac{2\pi ijm}{N}}\right] + \hat{f}(\frac{N}{2})\cos(j\pi) =$
$= \hat{f}(0) + \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} 2Re(\hat{f}(m)e^{\frac{2\pi ijm}{N}}) + \hat{f}(\frac{N}{2})\cos(j\pi) =$
$= \hat{f}(0) + \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} 2Re(\hat{f}(m)\left[\cos\frac{2\pi jm}{N} + i\sin\frac{2\pi jm}{N}\right]) + \hat{f}(\frac{N}{2})\cos(j\pi) =$
$= \hat{f}(0) + \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1}\left[2Re(\hat{f}(m)\cos\frac{2\pi jm}{N}) - 2Im(\hat{f}(m)\sin\frac{2\pi jm}{N})\right] + \hat{f}(\frac{N}{2})\cos(j\pi)$

2.6.3 Diskrétní sinová a cosinová Fourierova transformace

Nechť $f : G \to \mathbb{R}$ je sudá funkce, tedy $f(j) = f(N-j)$ neboli $f(-j) = f(j)$. Nechť N je sudé. Pak

$\hat{f}(m) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(j)e^{-\frac{2\pi ijm}{N}} = \frac{1}{N}f(0) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} f(j)\underbrace{\left[e^{-\frac{2\pi ijm}{N}} + e^{\frac{2\pi ijm}{N}}\right]}_{2\cos\frac{2\pi ijm}{N}} +$

$+\frac{1}{N}f(\frac{N}{2})\underbrace{\cos(m\pi)}_{(-1)^m} = \frac{1}{N}f(0) + \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} f(j)\cos\frac{2\pi ijm}{N} + \frac{1}{N}f(\frac{N}{2})\cos(M\pi)$

Definice 2.6.3. Nechť $f \in L^2(G)$. Funkce

$$\hat{f}_c(m) = \frac{1}{N}f(0) + \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} f(j)\cos\frac{2\pi ijm}{N} + \frac{1}{N}f(\frac{N}{2})\cos(m\pi)$$

se nazývá *diskrétní cosinová transformace funkce f.*

Lemma 2.6.4. *Pro sudou funkci f platí:*

$$f(j) = \hat{f}_c(0) + 2\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} \hat{f}_c(m)\cos\frac{2\pi ijm}{N} + \hat{f}_c(\frac{N}{2})\cos(j\pi).$$

Důkaz: přímým výpočtem.

Analogicky, nechť $f : G \to \mathbb{R}$ je lichá funkce, tedy $f(j) = -f(N-j)$ neboli $f(-j) = -f(j)$.

Lemma 2.6.5. *Je-li $f(x)$ lichá funkce, pak $\hat{f}(m)$ je taky lichá funkce.*

Důkaz: $\hat{f}(N-m) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(j)e^{-\frac{2\pi ij(N-m)}{N}} =$
$= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} f(j)\left[e^{-\frac{2\pi ij(N-m)}{N}} - e^{\frac{2\pi ij(N-m)}{N}}\right] =$
$= -\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} f(j)\left[e^{-\frac{2\pi ijm}{N}} - e^{\frac{2\pi ijm}{N}}\right] = -\hat{f}(m)$

Je-li $f(x)$ lichá a reálná funkce, pak

$\hat{f}(m) = \frac{1}{N}f(0) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} f(j)\underbrace{\left[e^{-\frac{2\pi ijm}{N}} + e^{-\frac{2\pi i(N-j)m}{N}}\right]}_{-2i\sin\frac{2\pi jm}{N}} + \frac{1}{N}f(\frac{N}{2})\cos(m\pi) =$

$= -i\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} f(j)\sin\frac{2\pi jm}{N}.$

Definice 2.6.6. Nechť $f \in L^2(G)$. Funkce

$$\hat{f}_s(m) = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} f(j) \sin \frac{2\pi jm}{N}$$

se nazývá *diskrétní sinová transformace funkce f*.

Lemma 2.6.7. *Pro lichou funkci f platí:*

$$f(j) = 2 \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} \hat{f}_s(m) \sin \frac{2\pi jm}{N}.$$

Důkaz: přímým výpočtem.

2.6.4 Aplikace diskrétní Fourierovy transformace

- řešení diferenčních rovnic (okrajových úloh) $\rightarrow$ analogie řešení diferenciálních rovnic pomocí Fourierovy transformace

  Okrajová úloha pro diferenční rovnici 2. řádu:
  Uvažujme posloupnost $u_0, \ldots, u_M$, zadáváme $u_0 = A$, $u_M = B$. Použitím diskrétní Fourierovy transformace přejde diferenční rovnice na algebraickou rovnici. Po jejím vyřešení se najde zpětná transformace řešení.

- v geometrii

  Uvažujme $f \in L^2(G)$. Hodnoty $f(0), \ldots, f(N-1)$ chápeme jako vrcholy mnohoúhelníka Π v $\mathbb{C}$, tj. $\Pi = \{f(0), \ldots, f(N-1)\}$.
  Nechť $Df(j)$ je střed j-té strany $(f(j-1), f(j))$, tedy

$$Df(j) = \frac{1}{2}(f(j-1) + f(j)) = \frac{N}{2}(\delta_0 + \delta_1) * f(j).$$

  Definujme *odvozený N-úhelník* $\Pi' = \{Df(0), \ldots, Df(N-1)\}$ a dále
  $\Pi'' = (\Pi')', \ldots, \Pi^{(r)} = (\Pi^{(r-1)})'$.

  Věta 2.6.8. *Uvažujme N-úhelník Π v $\mathbb{C}$, tj. $\Pi = \{f(0), \ldots, f(N-1)\}$ v komplexní rovině. Nechť $Df(j)$ je střed j-té strany a $\Pi' = \{Df(0), \ldots, Df(N-1)\}$ je odvozený N-úhelník a nechť $\Pi^{(r)} = (\Pi^{(r-1)})'$. Pak pro $r \rightarrow \infty$ $\Pi^{(r)}$ konverguje k těžišti Π, tedy k bodu $P = \frac{1}{N}(f(0) + \ldots + f(N-1))$.*

Důkaz: búno Nechť těžiště P je v počátku, tedy $\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(j) = 0$.
Víme, že $Df(j) = \frac{N}{2}(\delta_0 + \delta_1) * f(j) = d * f(j)$, kde $d = \frac{N}{2}(\delta_0 + \delta_1)$,
tedy $D^2 f = d * (d * f(j))$ atd. Nás zajímá $\lim_{r\to\infty} \underbrace{d * \ldots * d}_{r\times} * f(j)$.

Víme, že $(d \hat{*} f)(j) = \hat{d}(j) \cdot \hat{f}(j) = \frac{N}{2}(\hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1) \cdot \hat{f}(j) = \frac{1}{2}(1 + e^{-\frac{2\pi i j}{N}}) \cdot \hat{f}(j)$
$\Rightarrow (d * \hat{\ldots} * d) = (\hat{d})^r$, $\hat{d}(j) = \frac{1}{2}(1 + e^{-\frac{2\pi i j}{N}})$
$\Rightarrow \lim_{r\to\infty}(\hat{d}(j))^r = \begin{cases} 0 & \text{pro } j \neq 0, \\ 1 & \text{pro } j = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow \lim_{r\to\infty}(\hat{d}(j))^r \hat{f}(j) = 0$, neboť $\frac{1}{N}(f(0) + \ldots + f(N-1)) = 0$
$\Rightarrow \lim_{r\to\infty} \underbrace{d * \ldots * d}_{r\times} * f(j) = 0$, tedy těžiště Π.

Kapitola 3

Z-transformace

Fourierovy řady: funkce $\mapsto$ posloupnost
Fourierova transformace: funkce $\mapsto$ funkce
Z-transformace: posloupnost $\mapsto$ funkce

Definice 3.0.9. Nechť $u_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ je posloupnost. *Z-transformaci posloupnosti* u_n definujme

$$Z\{u_n\} = \mathcal{U}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{-n},$$

kde z je komplexní proměnná, pro kterou řada konverguje.

Příklad 3.0.10.

- konstantní posloupnost $u_n = 1$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$
  $\mathcal{U}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$
  konverguje $\Leftrightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$
- geometrická posloupnost $u_n = a^n, a \in \mathbb{C}$
  $\mathcal{U}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{a}{z})^n = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}$
  konverguje $\Leftrightarrow \left|\frac{a}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > |a|$
- sinová a cosinová posloupnost
  $u_n = \cos n\theta = \frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}$
  z předchozího pro $a = e^{in}$ nebo $a = e^{-in}$ dostaneme
  $Z(\cos n\theta) = Z(\frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}) = \frac{1}{2}Z(e^{in\theta}) + \frac{1}{2}Z(e^{-in\theta}) = \frac{1}{2}(\frac{z}{z-e^{in}} + \frac{z}{z-e^{-in}}) =$
  $= \frac{1}{2}\frac{2z^2-2z\cos\theta}{z^2-2z\cos\theta+1} = \frac{z-\cos\theta}{z-2\cos\theta+\frac{1}{z}}$
  $u_n = \sin n\theta$
  analogicky:
  $Z(\sin n\theta) = \frac{\sin\theta}{z-2\cos\theta+\frac{1}{z}}$

3.1 Inverzní Z-transformace

Definice 3.1.1. *Inverzní Z-transformaci* definujme

$$u_n = Z\left\{\mathcal{U}(z)\right\}_n .$$

Příklad 3.1.2.

- základní parciální zlomek: $\mathcal{U}(z) = \frac{1}{z-a}$
  $\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{a}{z}}}_{tvar\ \frac{1}{1-x}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{a}{z})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{z^n}$
  $\Rightarrow u_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 0, \\ a^{n-1} & \text{pro } n > 0. \end{cases}$

- inverze pomocí parciálních zlomků: $\mathcal{U}(z) = \frac{z+6}{z^2-4} = \frac{z+6}{(z-2)(z+2)} = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z+2}$
  $Z^{-1}(\frac{z+6}{z^2-4}) = Z^{-1}(\frac{2}{z-2}) - Z^{-1}(\frac{1}{z+2})$
  $u_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 0, \\ 2\cdot 2^{n-1} - 1\cdot(-2)^{n-1} = 2^n + (-2)^n & \text{pro } n > 0. \end{cases}$

- dlouhé dělení: $\mathcal{U}(z) = \frac{z^2+2z}{z^2-2z+1}$
  $(z^2+2z) : (z^2-2z+1) = 1 + \frac{4}{z} + \frac{7}{z^2} + \frac{10}{z^3} + \dots$
  $\Rightarrow u_n = 3n + 1$

3.2 Vlastnosti Z-transformace

1. linearita
$$Z\left\{au_n + bv_n\right\} = aZ\left\{u_n\right\} + bZ\left\{v_n\right\}$$

2. transformace posunu
   Nechť $\{u_n\}$ označuje posloupnost $\{u_1, u_2, \dots\}$. Pak
$$Z\left\{u_{n+1}\right\} = -zu_0 + z\mathcal{U}(z),$$
   kde $\mathcal{U}(z)$ je Z-transformace původní posloupnosti $\{u_n\}$.
   Je totiž: $Z\left\{u_{n+1}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1}z^{-n} = z\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1}z^{-n-1} = z\sum_{n=1}^{\infty} u_n z^{-n} =$
   $= z(-u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{-n}) = -zu_0 + z\mathcal{U}(z)$
   Pro posunutí o 2 doleva dostaneme
   $Z\left\{u_{n+2}\right\} = -zu_1 + zZ\left\{u_{n+1}\right\} = -zu_1 + z(-zu_0 + z\mathcal{U}(z)) =$
   $= -zu_1 - z^2u_0 + z^2\mathcal{U}(z).$

3. derivace obrazu
   Existuje-li $Z\{u_n\} = \mathcal{U}(z)$, pak existuje také $Z\{nu_n\}$ a platí vztah

$$Z\{nu_n\} = -z\frac{d}{dz}\mathcal{U}(z).$$

   Je totiž: $-z\frac{d}{dz}\mathcal{U}(z) = -z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{-n} = -z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}(u_n z^{-n}) =$
   $= -z\sum_{n=0}^{\infty}(-nu_n z^{-n-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} nu_n z^{-n} = Z\{nu_n\}$

Příklad 3.2.1. Vypočtěte Z-transformaci posloupnosti $u_n = n$.
$Z\{n \cdot 1\} = -z\frac{d}{dz}\mathcal{U}(z) = -z\frac{d}{dz}(\frac{z}{z-1}) = \frac{z}{(z-1)^2}$
$Z\{n^2\} = Z\{n \cdot n\} = -z\frac{d}{dz}(\frac{z}{(z-1)^2}) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$Z\{n^3\} = \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$

Poznámka. Víme $(a)^n \xrightarrow{Z} \frac{z}{z-a}$. Označme $\{a^{n-1}\}$ posloupnost $\{0, 1, a, a^2, \ldots\}$.
$\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}z^{-n} = z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = z^{-1} \cdot Z\{a^n\} = \frac{1}{z-a}$. Tedy

$$Z\left\{a^{n-1}\right\} = \frac{1}{z-a}.$$

3.3 Řešení diferenčních rovnic pomocí Z-transformace

Příklad 3.3.1. Řešte diferenční rovnici $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$ s počátečními podmínkami $u_0 = 1$, $u_1 = 0$.

1. Řešení je posloupnost $\{u_n\}$. Její Z-transformaci označme $\mathcal{U}(z)$. Přetransformujeme rovnici pomocí pravidla o transformaci posunu:
   $Z\{u_{n+2}\} = 2Z\{u_{n+1}\} + 3Z\{u_n\} = 2(-zu_0 + z(\mathcal{U}(z))) + 3\mathcal{U}(z) = -z^2u_0-$
   $-zu_1 + z^2\mathcal{U}(z)$

2. Vypočteme $\mathcal{U}(z)$:
   $\mathcal{U}(z) = \frac{-2z+z^2}{z^2-2z-3} = 1 + \frac{\frac{3}{4}}{z-3} - \frac{\frac{3}{4}}{z+1}$

3. Najdeme $Z^{-1}\{u_n\}$:
   $u_n = \begin{cases} 1 \quad \text{pro } n = 0, \\ \frac{3}{4} \cdot 3^{n-1} - \frac{3}{4} \cdot (-1)^{n-1} \quad \text{pro } n > 0 \end{cases}$

Příklad 3.3.2. Řešte diferenční rovnici $u_{n+2} + 2u_n = 0$ s počátečními podmínkami $u_0 = 1$, $u_1 = 1$
$Z\{u_{n+2}\} + 2Z\{u_n\} = -z^2u_0 - zu_1 + z^2\mathcal{U}(z) + 2\mathcal{U}(z) = 0$
$\mathcal{U}(z) = \frac{z^2u_0+zu_1}{z^2+2} = \frac{z^2+z}{z^2+2} = 1 + \frac{z-2}{2+z^2} = 1 + \frac{\frac{1}{2}+\sqrt{2}i}{z-\sqrt{2}i} + \frac{\frac{1}{2}-\sqrt{2}i}{z+\sqrt{2}i}$
$u_n = \begin{cases} 1 \quad \text{pro } n = 0, \\ (\frac{1}{2} + \sqrt{2}i) \cdot (\sqrt{2}i)^{n-1} + (\frac{1}{2} + \sqrt{2}i) \cdot (-\sqrt{2}i)^{n-1} \quad \text{pro } n > 0 \end{cases}$

Kapitola 4

Laplaceova transformace

- spojitá analogie Z-transformace: Místo posloupnosti s kladnými indexy uvažujeme funkce pro kladné hodnoty t.

Definice 4.0.3. Pro funkci $f(t) : \langle 0, \infty \rangle \to \mathbb{C}$ definujme Laplaceovu transformaci

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

pro ty hodnoty s, pro které integrál konverguje.

Poznámka. Fourier: $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt$, $\left| e^{-i\xi t} \right| = 1$
$e^{-st} \to 0$ rychle pro $t \to \infty$
Laplaceova transformace existuje pro daleko více funkcí něž Fourierova transformace.

Označení:
$F(s) = \mathcal{L}(f)$
inverzní transformace: $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(f)$

Příklad 4.0.4.

- Pro $f(t) = 1$, $t > 0$, máme
  $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty = \frac{1}{s}$ pro $s > 0$
- Pro $f(t) = e^{at}$, $t > 0$, $a \in \mathbb{R}$ máme
  $F(s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} \left[e^{(a-s)t} \right]_0^\infty = \frac{1}{s-a}$ pro $s > a$
- Pro $f(t) = t^n$, $t > 0$, máme $F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ pro $s > 0$
  indukcí: pro $n = 0$ máme $f(t) = 1$ a $\mathcal{L}(t^n) = \frac{1}{s}$
  $\mathcal{L}(t^{n+1}) = \int_0^\infty t^{n+1} e^{-st} dt =$
  $/ u = t^{n+1}, v' = e^{-st}, u' = (n+1)t^n, v = -\frac{1}{s} e^{-st} /$
  $= \left[-t^{n+1} \cdot \frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty + \int_0^\infty (n+1) t^n \frac{1}{s} e^{-st} dt = \frac{n+1}{s} \cdot \mathcal{L}(t^n) = \frac{n+1}{s} \cdot \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}$

Lemma 4.0.5. *Platí:*
$$\mathcal{L}(t^a) = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}},$$
kde Γ je Gamma funkce $\Gamma = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$.

Důkaz: $\mathcal{L}(t^a) = \int_0^\infty t^a e^{-st} dt =$
$/st = x \Rightarrow t = \frac{x}{s} \Rightarrow sdt = dx \Rightarrow dt = \frac{1}{s} dx/$
$= \int_0^\infty \frac{x^a}{s^a} \frac{1}{s} e^{-x} dx = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty x^a e^{-x} dx = \frac{1}{s^{a+1}} \Gamma(a+1)$.

Poznámka. $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$ platí i pro $a \in \mathbb{C}$, tedy
$\mathcal{L}(e^{i\omega t}) = \frac{1}{s-i\omega} = \frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + i \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$,
tedy $\mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ a $\mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$.

4.1 Existence Laplaceovy transformace

Věta 4.1.1. *Nechť $f(t)$ je po částech spojitá na $\langle 0, \infty)$ a platí odhad*
$$|f(t)| \leq M \cdot e^{\gamma t}$$
pro nějaké konstanty M a γ. Pak Laplaceova transformace existuje pro všechna $s > \gamma$.

Důkaz: Pro $s > \gamma$ máme
$|\mathcal{L}(f)| = \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^\infty |e^{-st}| \, |f(t)| \, dt \leq M \int_0^\infty e^{-st} e^{\gamma t} dt = M \int_0^\infty e^{(\gamma - s)t} dt <$
$< +\infty$,
protože
$\int_0^\infty e^{(\gamma-s)t} dt$ konverguje $\Leftrightarrow \gamma - s < 0$.

4.2 Laplaceova transformace derivace

Lemma 4.2.1. *Nechť $f(t)$ je spojitá pro $t \geq 0$ a splňuje odhad $|f(t)| \leq M \cdot e^{\gamma t}$. Pak*
$$\mathcal{L}(f') = s \cdot \mathcal{L}(f) - f(0).$$

Důkaz: $\mathcal{L}(f') = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt =$
$/u' = f', v = e^{-st} \Rightarrow u = f, v' = -se^{-st}/$
$= [fe^{-st}]_0^\infty - \int_0^\infty (-se^{-st} f(t)) dt = 0 - f(0) + s\mathcal{L}(f) = s\mathcal{L}(f) - f(0)$

Analogicky dostaneme
$$\mathcal{L}(f'') = s\mathcal{L}(f') - f'(0) = s^2 \mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$$

a obecně

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Příklad 4.2.2. Řešte diferenciální rovnici $y'' - y = t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

1. Laplaceova transformace:
   $\mathcal{L}(y) = Y$
   $s^2Y - sy(0) - y'(0) - Y = \frac{1}{s^2}$
   $s^2Y - s - 1 - Y = \frac{1}{s^2}$
2. Vypočteme Y:
   $Y(s^2-1) = \frac{1}{s^2} + s + 1 \Rightarrow Y = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2}$
3. Zpětnou transformací dostaneme
   $y(t) = e^t + \sin ht - t$

4.3 Věty o posunu

Věta 4.3.1. *(posun v proměnné s) Nechť $F(s) = \mathcal{L}(f)$, pak*

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s-a)) = F(t)e^{at}$$

neboli

$$F(s-a) = \mathcal{L}(fe^{at}).$$

Důkaz: $\mathcal{L}(fe^{at}) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt = F(s-a)$

Označení:
$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0, \\ 1 & \text{pro } t \geq 0 \end{cases}$ ... Heavisideova fukce (1 krok v bodě 0)
$u(t-a)$ ... 1 krok v bodě a

Věta 4.3.2. *(posun v proměnné t) Platí*

$$\mathcal{L}(F(t-a)u(t-a)) = F(s)e^{-as}$$

neboli

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)e^{-as}) = f(t-a)u(t-a).$$

Důkaz: $\mathcal{L}(F(t-a)u(t-a)) = \int_0^\infty f(t-a)e^{-st}u(t-a)dt = \int_0^\infty f(t-a)e^{-st}dt =$ $/x = t-a \Rightarrow dx = dt/$
$= \int_0^\infty f(x)e^{-s(x+a)}dx = e^{-sa}\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx = e^{-sa}\mathcal{L}(F(x))$

Laplaceova transformace je vhodná pro nespojité vstupy, např. δ-funkce:
$\delta_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \neq a, \\ \infty & \text{pro } x = a \end{cases}$ ... Diracova δ-funkce v bodě $a \in \mathbb{R}^+$
$\int_{-\infty}^\infty f(x)\delta_a(x)dx = f(a)$
$\delta_0 \to 1$

$$\mathcal{L}(\delta_a) = \int_0^\infty \delta_a(t)e^{-st}dt = e^{-as}$$

Příklad 4.3.3. Řešte harmonický oscilátor $y'' + y' + y = \delta_0$, $y(0) = y'(0) = 0$: systém je nejprve v klidu, v čase $t = 0$ mu dáme ránu kladivem...
$Y = \mathcal{L}(y)$
$s^2y - s\cdot 0 - 0 + sY - 0 + Y = 1$
$\Rightarrow Y = \frac{1}{s^2+s+1} = \frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$
$\sin\omega t = \frac{\omega}{t^2+\omega^2}$
$y = \mathcal{L}^{-1}(y) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}}{2}te^{-\frac{1}{2}t}$

Věta 4.3.4. *(Lerchova věta o jednoznačnosti) Nechť existují čísla $a > \gamma$ (z odhadu $|f(t)| \leq M \cdot e^{\gamma t}$) a b tak, že*

$$\mathcal{L}(f)(a+ub) = 0$$

pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\mathcal{L}(f) \equiv 0 \text{ a } f \equiv 0.$$

Důkaz: pomocí Hausdorfovy věty o momentech:
$f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$, $M_k = \int_0^1 f(x)dx$ ... k-tý obecný moment
$M_k = 0$ pro $\forall k = 0, 1, \ldots \Rightarrow f(x) = 0$
Označme $\alpha(t) = e^{-at}f(t)$.
Máme $\alpha(0) = 0$ a $\lim_{t\to\infty}\alpha(t) = 0$, neboť $a > \gamma$ a α je spojitá
$0 = \mathcal{L}f(a+ub) = \int_0^\infty f(t)e^{-at}e^{-ubt}dt = \int_0^\infty \alpha(t)e^{-ubt}dt =$
$/u = e^{-bt}, du = -b\cdot e^{-bt}dt, \frac{du}{u} = -bdt,$
$t = -\frac{1}{b}\lg u, t = 0 \Rightarrow u = 1, t = \infty \Rightarrow u = 0/$
$= -\int_0^1 \beta(u)u^n\frac{du}{u}(-\frac{1}{b}) = \frac{1}{b}\int_0^1 \beta(u)u^{n-1}du = M_{n-1},$
kde $\beta(u) = \alpha(-\frac{1}{b}\lg u)$ pro $0 < u < 1$, $\beta(0) = 0$, $\beta(1) = 1$, β spojitá
$\Rightarrow$ podle Hausdorfovy věty $M_{n-1} = 0$ pro $\forall n \Rightarrow \beta(u) \equiv 0 \Rightarrow \alpha \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$

V definici Laplaceovy transformace můžeme místo $s \in \mathbb{R}$ uvažovat $z \in \mathbb{C}$:

$$F(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt$$

- pro reálnou hodnotu $z \rightarrow$ Laplaceova transformace
- pro ryze imaginární hodnotu $z \rightarrow$ Fourierova transformace $f(t)$ dodefinovaná $f(t) \equiv 0$ pro $t < 0$

$z = i\xi \Rightarrow F(i\xi) = \int_0^\infty f(t)e^{-i\xi t}dt = \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i\xi t}dt = \hat{f}(\xi)$.

Platí-li odhad $|f(t)| \leq M \cdot e^{\gamma t}$, pak $F(z)$ je pro $Re(z) > \gamma$ holomorfní.

Věta 4.3.5. *(o lineární Laplaceově transformaci) Nechť $f(t)$ je spojitá funkce na $\mathbb{R}$, $f(t) = 0$ pro $t < 0$, která splňuje odhad $|f(t)| \leq M \cdot e^{\gamma t}$. Pak pro libovolné $b > \gamma$ a $t \in \langle 0, \infty)$ je*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}f(b + i\xi)e^{(b+i\xi)t}d\xi.$$

Důkaz: Použijeme větu o inverzní Fourierově transformaci na funkci $e^{-bt}f(t)$. Máme $f(t) = e^{bt}(f(t)e^{-bt})e^{bt} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \widehat{fe^{-bt}}(\xi)e^{i\xi t}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathcal{L}f(b + i\xi)td\xi$,
neboť $\mathcal{L}f(b + i\xi) = \widehat{fe^{-bt}}(\xi) = \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-bt}e^{i\xi t}dt = \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-t(b+i\xi)}dt$.

Kapitola 5

Hartleyho transformace

Definice 5.0.6. Nechť $h(x) \in L^1(\mathbb{R})$, tj. $\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|\, dx < \infty$. *Hartleyho transformace funkce* $h(x)$ je definovaná vztahem

$$H(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) cas\,(\xi x)\, dx,$$

kde $cas\,(x) = \cos x + \sin x$.

Hartleyho transformace je čistě reálná transformace.

Definice 5.0.7. *Inverzní Hartleyho transformace funkce* $H(x)$ je definovaná vztahem

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi) cas\,(\xi x)\, d\xi,$$

tedy $H^{-1} = \frac{1}{2\pi} H$.

5.1 Sudá a lichá část Hartleyho transformace

Sudá a lichá část Hartleyho transformace jsou dány vztahy

$$E(\xi) = \frac{H(\xi) + H(-\xi)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cos{(\xi x)}\, dx$$

a

$$O(\xi) = \frac{H(\xi) - H(-\xi)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \sin{(\xi x)}\, dx,$$

tedy od Hartleyho transformace k Fourierově transformaci přejdeme vztahem

$$\hat{f}(\xi) = E(\xi) - iO(\xi).$$

Naopak, přechod od Fourierovy transformace k Hartleyho transformaci je dán vztahem

$$H(\xi) = Re\hat{f}(\xi) - Im\hat{f}(\xi).$$

5.2 Diskrétní Hartleyho transformace

Definice 5.2.1. *Diskrétní Hartleyho transformace posloupnosti h_n, $n = 0, \ldots, N-1$,* je posloupnost

$$H_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h_n cas\left(\frac{2\pi kn}{N}\right).$$

Definice 5.2.2. *Inverzní diskrétní Hartleyho transformace posloupnosti H_k, $k = 0, \ldots, N-1$,* je posloupnost

$$h_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k cas\left(\frac{2\pi kn}{N}\right).$$

Přechody mezi diskrétní Hartleyho transformací a diskrétní Fourierovou transformací jsou analogické jako u spojité verze.

Poznámka. Platí ortonormální vztahy:

$$\sum_{n=0}^{N-1} cas\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) cas\left(\frac{2\pi jn}{N}\right) = \begin{cases} 0 & \text{pro } j \neq k, \\ N & \text{pro } j = k. \end{cases}$$

Kapitola 6

Radonova transformace

- tomografie: rekonstrukce obrazu z projekcí

Motivace

Paprsek procházející homogenním tělesem
$I_0 \ldots$ intenzita na počátku
$I \ldots$ intenzita na konci
Rychlost útlumu je přímo úměrná intenzitě:
$I' = -u \cdot I \Rightarrow I = I_0 \cdot e^{-ux}$, kde u je koeficient útlumu.
Pro těleso složené ze dvou částí je $I = I_0 \cdot e^{-\sum_{i=1}^{2} u_i x_i}$.
Je-li těleso nehomogenní, $u(x)$ je koeficient útlumu v bodě x, pak dostaneme
$I = I_0 \cdot e^{-\int_L u(x)dx}$, kde L jsou přímky.
Obvykle $u(x)$ odpovídá hustotě v bodě x.
Označení: $x = (x_1, x_2) \ldots$ souřadnice v $\mathbb{R}^2$
Nechť $u(x_1, x_2)$ je hustota materiálu v bodě (x_1, x_2),

$$I = I_0 \cdot e^{-\int_L u(x_1,x_2)ds} \Rightarrow -\lg \frac{I}{I_0} = \int_L u(x_1, x_2)ds.$$

Definice 6.0.3. Nechť $u(x_1, x_2)$ je omezená, integrovatelná (ne nutně spojitá) funkce definovaná v omezené oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^2$. *Radonova transformace funkce* $u(x_1, x_2)$ je funkce R_u proměnných $(r, \omega) \in \mathbb{R} \times S_1(0)$, kde $S_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, definovaná vztahem

$$R_u(r, \omega) = \int_{x \times \omega = r} u(x_1, x_2)ds,$$

kde $x \times \omega$ je standartní skalární součin v $\mathbb{R}^2$ a ds je jednorozměrná Euklidovská míra na přímce $x \times \omega = r$.

Příklad 6.0.4. Vypočtěte radonovu transformaci charakteristické funkce kruhu o poloměru R:
$u(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, \\ 0 & \text{pro } x_1^2 + x_2^2 > R^2. \end{cases}$

$r > R \Rightarrow R_u(r,\omega) = 0$
$r \leq R \Rightarrow \frac{l}{2} = \sqrt{R^2 - r^2} = R_u(r,\omega)$
$\Rightarrow R_u(r,\omega) = \begin{cases} 2\sqrt{R^2 - r^2} & \text{pro } r \leq R, \\ 0 & \text{pro } r > R. \end{cases}$

6.1 Inverzní radonova transformace

Označme $\hat{R}_u(\rho,\omega)$ jednodimenzionální Fourierovu transformaci funkce $R_u(r,\omega)$ v proměnné r.

Věta 6.1.1. *Nechť $\omega \in S_1(0)$ a $\rho \in \mathbb{R}$. Pak*

$$\hat{R}_u(\rho,\omega) = \hat{u}(\xi_1,\xi_2) = \int_{\mathbb{R}^2} u(x_1,x_2) \cdot e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} dx_1 dx_2,$$

kde (ξ_1,ξ_2) je vektor $\rho \cdot \omega$.

Důkaz: $\hat{u}(\rho,\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} u(\xi_1,\xi_2) \cdot e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} dx_1 dx_2 =$
$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{x\cdot\omega=r} u(\xi_1,\xi_2) \cdot e^{-i\rho r} ds \right) dr = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho r} \underbrace{\left(\int_{x\cdot\omega=r} u(x) ds \right)}_{R_u} dr = \hat{R}_u(\rho,\omega)$

Tedy Fourierova transformace radonovy transformace v proměnné r je dvourozměrná Fourierova transformace funkce u zúžené na přímku určenou vektorem v.

Označíme-li $R_u(r,\omega) = g(r,\omega)$, $\mathcal{F}_1$ jednorozměrnou Fourierovu transformaci v proměnné r a $\mathcal{F}_2$ dvourozměrnou Fourierovu transformaci v proměnné r, pak

$$u = \mathcal{F}_2^{-1}\left(\mathcal{F}_1(g)\right).$$

Kapitola 7

Jednotící pohled na Fourierovy řady, Fourierovu transformaci a diskrétní Fourierovu transformaci s využitím zobecněných funkcí

7.1 Zobecněné funkce (distribuce)

$s \ldots$ prostor testovacích funkcí
$s = C_0^\infty(\mathbb{R}) \ldots$ prostor funkcí nekonečně hladkých s kompaktním nosičem
$supp(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}/f(x) \neq 0\}} \ldots$ nosič funkce f

Příklad 7.1.1.

- $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \end{cases} \quad \notin C_0^\infty(\mathbb{R})$
- $g(x) = \begin{cases} f(1-x^2) & \text{pro } x \in (-1,1)\,, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

Definice 7.1.2. Spojitý lineární funkcionál

$$g : s \to \mathbb{R}$$

se nazývá *distribuce*. Je-li g distribuce, pak její hodnotu na testovací funkci φ označujeme

$$g(\varphi) = \langle g, \varphi \rangle \,.$$

Je-li f spojitá funkce na $\mathbb{R}$, pak f přiřadíme jednoznačně definovanou distribuci, kterou budeme označovat stejným písmenem, předpisem

$$\langle g, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

Jsou-li f a g dvě různé spojité funkce, pak jim příslušející distribuce jsou také různé:
Nechť x_0 je takové, že $f(x_0) \neq g(x_0)$. Předpokládejme, že $f(x_0) > g(x_0)$. Ze spojitosti plyne, že $\exists \epsilon > 0$ tak, že $f(y) > g(y) \forall y \in (x_0 + \epsilon, x_0 - \epsilon)$.
Nechť $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ je taková, že $supp(\varphi) \in (x_0 + \epsilon, x_0 - \epsilon)$
$\Rightarrow \langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} f(x)\varphi(x)dx > \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} g(x)\varphi(x)dx =$
$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx = \langle g, \varphi \rangle$
$\Rightarrow f \neq g$ jako distribuce.

Příklad 7.1.3. Diracova δ-funkce v bodě a je distribuce δ_a taková, že $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$. Speciálně pro $\delta = \delta_0$ je $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$.

Distribuce tvoří lineární prostor. Platí:

$$\langle u_1 + u_2, \varphi \rangle = \langle u_1, \varphi \rangle + \langle u_2, \varphi \rangle .$$

Poznámka. Fyzikální motivace (kvantová teorie)
veličiny se neměří "bodově", ale jako výsledky experimentu
$f \ldots$ veličina (distribuce)
$\varphi \ldots$ testovací funkce (popisuje parametry pokusu)
$\langle f, \varphi \rangle \ldots$ výsledek experimentu

7.2 Operace na distribucích

Nechť T je operátor, $T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to C_0^\infty(\mathbb{R})$, ke kterému existuje adjungovaný operátor T^*, tj. takový, že $\langle Tf, g \rangle = \langle f, T^*g \rangle$. Pak operátor T rozšíříme na prostor distribucí předpisem

$$\langle Tf, \varphi \rangle = \langle f, T^*\varphi \rangle .$$

Příklad 7.2.1. derivace $T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to C_0^\infty(\mathbb{R})$, $T = \frac{d}{dx}$
pro $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$:
$\langle Tf, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)/_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)dx = \langle f, -Tg \rangle$
$\Rightarrow T^* = -T = -\frac{d}{dx}$
Tedy pro distribuci $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ definujeme derivaci vztahem

$$\langle u', \varphi \rangle = - \langle u, \varphi' \rangle .$$

Příklad 7.2.2. Vypočtěte 1. a 2. derivaci funkce $f(x) = |x|$ ve smyslu distribucí.

$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x \in (-\infty, 0)\,, \\ 1 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x \in (0, \infty) \end{cases} = sgn(x)$

$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} sgn(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)dx-$
$-\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(x)/_{-\infty}^{\infty} + (-\varphi(x))/_{-\infty}^{\infty} = 2\varphi(0)$
$\Rightarrow f'(x) = 2\delta_0$
$f''(x) = 2\delta_0'$:
$\langle \delta_0', \varphi \rangle = -\langle \delta_0, \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$
$\Rightarrow f''(x) = -\varphi_0'$

Příklad 7.2.3. Fourierova transformace T
$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\xi x}d\xi$ a $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi$
Základní identita pro Fourierovu transformaci:
$\langle f(x), \hat{g}(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)g(x)dx = \left\langle \hat{f}(x), g(x) \right\rangle$
$\Rightarrow T^* = T$
Tedy pro distribuci u definujeme její Fourierovu transformaci předpisem

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle\,.$$

Příklad 7.2.4. Vypočtěte $\hat{f}$ pro $f(x) \equiv 1$.
$\left\langle \hat{1}, \varphi \right\rangle = \langle 1, \hat{\varphi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} 1\hat{\varphi}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(x)e^{-i0x}dx = \hat{\hat{\varphi}}(0) = 2\pi\varphi(0)$
$\Rightarrow \hat{1} = 2\pi\delta_0$

Příklad 7.2.5. Vypočtěte $\hat{f}$ pro $f(x) = x$.
$\langle \hat{x}, \varphi \rangle = \langle x, \hat{\varphi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\hat{\varphi}(x)dx =$
$/f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi$
$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\xi\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi$
$\Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\xi\hat{f}(\xi)d\xi/$
$= -2\pi i \cdot \varphi'(0) = -2\pi i \cdot \delta_0'$
$\Rightarrow \hat{x} = 2\pi i\delta_0'$

7.3 Zobecněná Fourierova transformace

$C_0^\infty(\mathbb{R}) \ldots$ prostor testovacích funkcí
$C_0^\infty(\mathbb{R}) \subseteq s \ldots$ Schvartzův prostor (prostor rychle klesajících funkcí)
$f \in s \Leftrightarrow f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ a pro $\forall k, l \in \mathbb{N} : lim_{x\to\pm\infty} \left|x^k f^{(l)}(x)\right| = 0$
např. $P(x) \cdot e^{-a(x-x_0)^2} \in s, a > 0, x_0 \in \mathbb{R}$

Definice 7.3.1. *Temperovaná distribuce* je spojitý lineární funkcionál na s.

$C_0^\infty(\mathbb{R}) \subseteq s \Rightarrow (C_0^\infty(\mathbb{R}))' \subseteq (s)'$, tj. temperovaná distribuce je distribuce.

Uvažujme operaci posunutí o a doprava: $f_a(x) = f(x-a)$
$T_a f = f_a$
$f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}) : \langle T_a f, g\rangle = \langle f, T_a^* g\rangle$
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)g(x)dx = /x' = x - a \Rightarrow x = x' + a/ = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x'+a)dx'$
$\Rightarrow T_a^* = T_{-a}$

Definice 7.3.2. Posunutí distribuce: Je-li u distribuce, definujme $u(x-a)$ předpisem

$$\langle u(x-a), \varphi(x)\rangle = \langle u(x), \varphi(x+a)\rangle\,.$$

Definice 7.3.3. Distribuce u je periodická s periodou p, jestliže $u(x-p) = u(x)$ ve smyslu distribucí, tj.

$$\langle u(x-p), \varphi(x)\rangle = \langle u(x), \varphi(x)\rangle$$

pro $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Poznámka. Funkce periodická na $\mathbb{R}$ nemůže patřit do L^1, nemá definovanou Fourierovu transformaci.

Platí: $\hat{\delta}_0 = 1$
$\left\langle \hat{\delta}_0, \varphi \right\rangle = \langle \delta_0, \hat{\varphi}\rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot 1dx = \langle 1, \varphi\rangle$
Podobně: $\hat{\delta}_a = e^{-iax}$
$\left\langle \hat{\delta}_a, \varphi \right\rangle = \langle \delta_a, \hat{\varphi}\rangle = \hat{\varphi}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot e^{-iax}dx = \langle e^{-iax}, \varphi\rangle$

Příklad 7.3.4. Vypočtěte zobecněnou Fourierovu transformaci funkcí e^{it}, $\sin t$ a $\cos t$.
$\langle \hat{e}^{it}, \varphi\rangle = \langle e^{it}, \hat{\varphi}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it}\hat{\varphi}(t)dt = 2\pi\varphi(1) = \langle 2\pi\delta_1, \varphi\rangle \Rightarrow \hat{e}^{it} = 2\pi\delta_1$
$\langle \hat{e}^{-it}, \varphi\rangle = \langle 2\pi\delta_{-1}, \varphi\rangle \Rightarrow \hat{e}^{-it} = 2\pi\delta_{-1}$
$\hat{\sin} t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \pi \cdot \frac{\delta_1 - \delta_{-1}}{i} = \pi i(\delta_{-1} - \delta_1)$
$\hat{\cos} t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \pi \cdot \frac{\delta_1 + \delta_{-1}}{1} = \pi(\delta_{-1} + \delta_1)$

7.4 Zobecněná Fourierova transformace zobecněných periodických funkcí

Budeme uvažovat součty δ-funkcí. Pro nekonečné součty budeme potřebovat pojem limity.

Definice 7.4.1. Nechť $u_1, u_2, \ldots$ je posloupnost distribucí.
Řekneme, že $lim_{n\to\infty} u_n = u$, jestliže

$$lim_{n\to\infty} \langle u_n, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle \, \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Analogicky, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n = u$, jestliže posloupnost částečných součtů $s_n = \sum_{k=n}^{n} u_k$ konverguje k u, tj. $lim_{n\to\infty} s_n = u$, ve smyslu předchozí definice.

Příklad 7.4.2. $\left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n, \varphi \right\rangle = lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{k=-n}^{n} \delta_k, \varphi \right\rangle = lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \varphi_k =$
$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n$
Řada konverguje, neboť $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Definice 7.4.3. *Svazkem δ-funkcí* rozumíme součet $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta_{k\cdot\Delta x}$, kde $a_k \in \mathbb{R}$. Δx se nazývá *(prostorový) krok svazku.*

Fourierova transformace svazku δ-funkcí je
$\widehat{(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta_{k\cdot\Delta x})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \hat{\delta}_{k\cdot\Delta x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-ik\Delta x \xi}$,
což je periodická funkce (pokud řada konverguje) s periodou $\frac{2\pi}{\Delta x}$.

Je-li $f(x)$ "rozumná" funkce, pak má konvergentní Fourierovu řadu a platí $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx}$. Tedy zobecněná Fourierova transformace funkce $f(x)$ je rovna $\widehat{f(x)} = \widehat{(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \widehat{e^{-ikx}} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta_k$, tedy $\widehat{f(x)}$ je svazkem δ-funkcí.

Věta 7.4.4. *Nechť $p > 0$ je perioda. Označme $\Delta\omega = \frac{1}{p}$ a nechť f a F jsou dvě distribuce takové, že F je zobecněná Fourierova transformace funkce f. Je-li splněna jedna z následujících dvou podmínek:*
(i) f je periodická distribuce s periodou p,
(ii) F je svazek δ-funkcí s krokem $\Delta\omega = \frac{1}{p}$,
pak platí i druhá podmínka a navíc existují jednoznačně určená čísla
$\{\ldots, f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \ldots\}$ *taková, že*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{i2\pi k \Delta\omega t}$$

a

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \delta_{k\Delta\omega}(\omega).$$

Kapitola 8

Rychlá Fourierova transformace

Místo $f \in L^2(G)$ budeme uvažovat konečnou posloupnost čísel

$$x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$$

a místo $\hat{f}(m) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-i\frac{2\pi}{N}jm}$ budeme uvažovat

$$X_m = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \omega_N^{-jm},$$

kde $\omega_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ je N-tá primitivní odmocnina z 1.

Nechť N je sudé, $N = 2M$. Rozdělme $\{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$ na sudou a lichou část: $\{x_0, x_2, \ldots, x_{N-2}\}$ a $\{x_1, x_3, \ldots, x_{N-1}\}$ a označme $y_n = x_{2n}$ a $z_n = x_{2n+1}$.
Máme $X_m = \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} y_j \omega_N^{-2jm} + z_j \omega^{-(2j+1)m} = \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} y_j (\omega_N^2)^{-jm} + \omega_N^{-m} z_j (\omega_N^2)^{-jm}$, ale $\omega_N^2 = \omega_{\frac{N}{2}}$.

Nechť $\{Y_m\}_{m=0}^{\frac{N}{2}-1}$ je diskrétní Fourierova transformace posloupnosti $\{y_m\}_{m=0}^{\frac{N}{2}-1}$, analogicky pro Z_m. Pak platí Rekombinační vztah

$$X_m = Y_m + \omega_N^{-m} Z_m,$$

$$X_{m+\frac{N}{2}} = Y_m - \omega_N^{-m} Z_m$$

pro $m = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$.

Porovnání počtů operací:

- transformace z definice: $N \times N$ násobení
- transformace pomocí Rekombinačního vzorce: $2(\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}) + 2N = \frac{N^2}{2} + 2N$

Pro $N >> 1$ je $N^2 >> N$, tedy ušetříme cca polovinu operací.

Je-li $N = 2^p$, můžeme v dělení pokračovat, Y_m a Z_m počítat pomocí dělení atd. Po p krocích dostaneme diskrétní Fourierovu transformaci délky 1, kdy $X_0 = x_0$ a počítání končí.

Počet operací pro $N = 2^p$:
$p = \log_2 N \rightarrow$ celkem $2N \log_2 N$ operací oproti $N \times N$ operací z definice
např. pro $N = 10^3$:
z definice: 10^6 operací
ze vzorce: $\log_2 1000 \approx 10$
$\Rightarrow$ cca $50\times$ méně operací