Domácí úkol z 28. února 2013

Definice. Nechť P je komutativní pologrupa, G komutativní grupa a $\eta : P \to G$ homomorfismus. Grupu G (spolu s homomorfismem η) nazveme Grothendickovou grupou pologrupy P, jestliže pro každou grupu H a každý homomorfismus $\varphi : P \to H$ existuje právě jeden homomorfismus $\psi : G \to H$ takový, že $\psi \circ \eta = \varphi$.

Existenci Grothendickovy grupy pro libovolnou komutativní pologrupu dokážeme konstrukcí. Nechť je tedy dána libovolná komutativní pologrupa $(P, +)$. Na kartézském součinu $P \times P$ zaveďme relaci $\equiv$ takto:

$$(p, q) \equiv (p', q') \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in P\colon p + q' + t = p' + q + t.$$

Vcelku snadno se ukáže, že je $\equiv$ relací ekvivalence na P: ihned je vidět, že je to relace reflexivní a symetrická. Pro důkaz tranzitivnosti předpokládejme, že $(p, q) \equiv (p', q')$ a současně $(p', q') \equiv (p'', q'')$. Pak existují $t, t' \in P$ tak, že $p+q'+t = p'+q+t$, $p'+q''+t' = p''+q'+t'$. Dohromady $p+q''+(p'+q'+t+t') = p'' + q + (p' + q' + t + t')$, a tedy $(p, q) \equiv (p'', q'')$. Nechť G je rozklad P podle této ekvivalence, tj. $G := (P \times P)/{\equiv}$, třídu rozkladu obsahující dvojici $(p, q) \in P \times P$ budeme značit $[p, q] \in G$.

1. Chceme zavést operaci $+$ na G, a to předpisem

   $$[p, q] + [r, t] := [p + r, q + t]$$

   pro libovolné $p, q, r, t \in P$. Ověřte, že tento předpis definuje korektně operaci na G a že $(G, +)$ tvoří komutativní grupu.

2. Zaveďme zobrazení $\eta : P \to G$ předpisem $\eta(p) = [p + p, p]$ pro každé $p \in P$. Dokažte, že η je homomorfismus pologrup.

3. Nechť $(H, +)$ je grupa (nemusí ani být komutativní) a $\varphi : P \to H$ je homomorfismus pologrup. Ukažte, že existuje jediný homorfismus grup $\psi : G \to H$ splňující $\psi \circ \eta = \varphi$. *[Návod: uvědomte si, že pro každé $p, q \in P$ platí $[p, q] = \eta(p) + (-\eta(q))$ v G. Proto jediná možnost, jak definovat ψ splňující $\psi \circ \eta = \varphi$ je $\psi([p, q]) = \varphi(p) + (-\varphi(q))$. Ověřte tedy, že takto definované ψ je homomorfismus grup.]*