Domácí úkol z 11. dubna 2013

1. Zvolme pevně $r \in \mathbb{N}$, $r > 1$ a definujme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$a_n^{(r)} = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } r \nmid n, \\ 1 - r, & \text{jestliže } r \mid n. \end{cases}$$

   Dokažte, že Dirichletova řada

$$f_r(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(r)} \cdot n^{-s}$$

   konverguje v polorovině $\mathrm{Re}(s) > 0$ k holomorfní funkci.

   [Návod: užijte Proposition 9 a 6.]

2. Dokažte, že v polorovině $\mathrm{Re}(s) > 1$ pro Riemannovu ζ-funkci platí

$$\zeta(s) = (1 - r^{1-s})^{-1} \cdot f_r(s), \tag{1}$$

   což definuje analytické prodloužení Riemannovy ζ-funkce na polorovinu $\mathrm{Re}(s) > 0$. Podle věty o jednoznačnosti (viz např. skripta Kalas: Analýza v komplexním oboru, str. 99) jsou tato prodloužení pro všechna $r > 1$ stejná.

3. Užitím předchozí rovnosti (1) pro $r = 2$ a $r = 3$ ukažte, že analytické prodloužení Riemannovy ζ-funkce na polorovině $\mathrm{Re}(s) > 0$ může mít pól jedině pro $s = 1$.

   [Návod: užitečné je zjistit, pro která $s \in \mathbb{C}$ platí $2^{1-s} = 1$ a současně $3^{1-s} = 1$.]

4. Výpočtem limity $\lim_{s \to 1^+} \zeta(s)$ pro reálná s jdoucí k 1 zprava ukažte, že $\zeta(s)$ má v $s = 1$ singularitu, z rovnosti (1) odvoďte, že jde o jednoduchý pól.

   [Návod: zkoumejte limitu $\lim_{s \to 1} (s-1)\zeta(s)$ pomocí rovnosti (1), můžete užít L'Hospitalovo pravidlo (viz např. zmiňovaná skripta, str. 114).]