Pracovní text a úkoly ke cvičením MF002

Ondřej Pokora, PřF MU, Brno

18. března 2013

2 Brownův most

Brownův most na intervalu $[0,1]$ je náhodný proces X_t definovaný předpisem

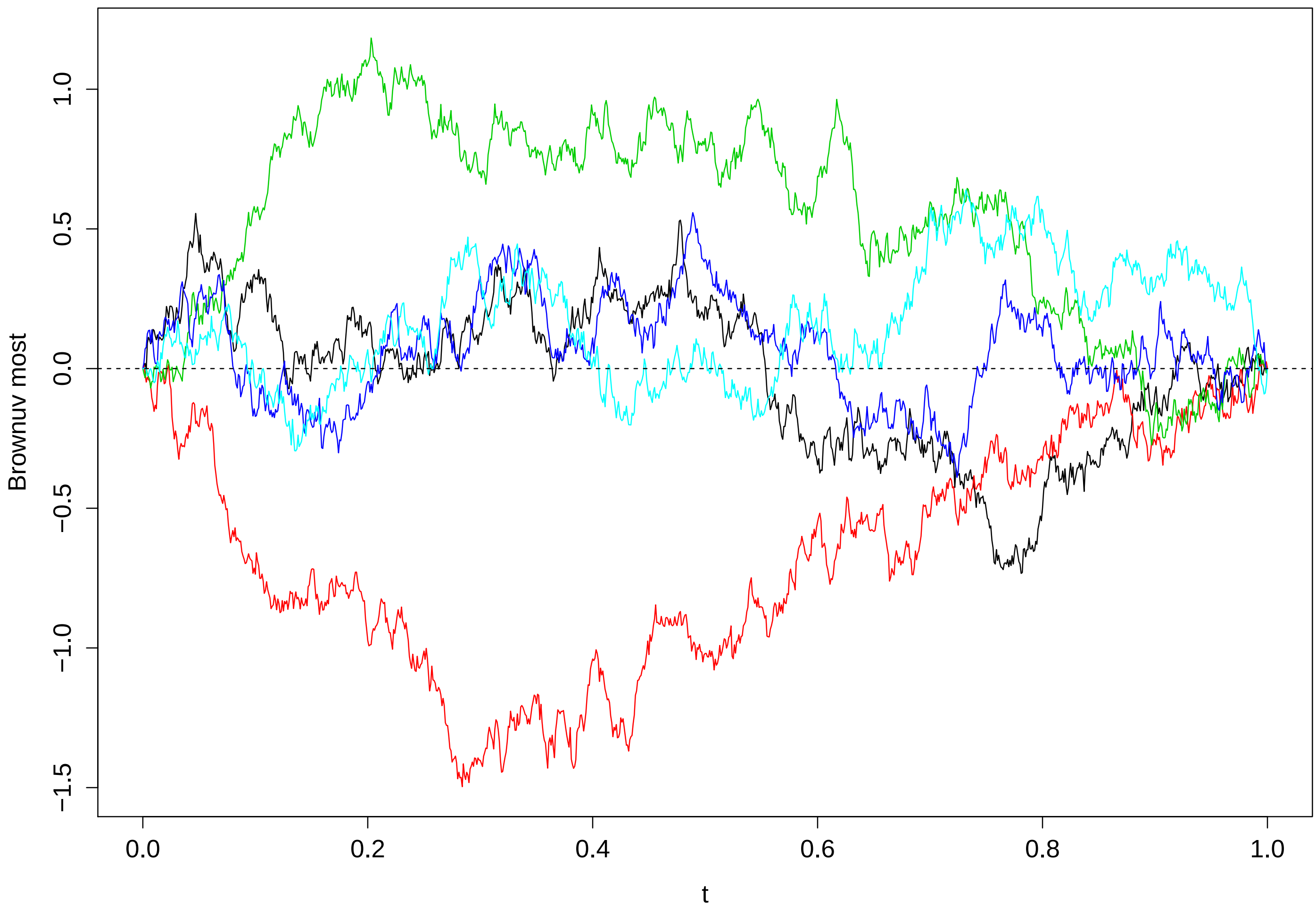
$$X_t = (W_t | W_1 = 0) \ , \qquad t \in [0,1] \ ,$$

kde W_t je Brownův pohyb na intervalu $[0,1]$. Tzn. X_t je Brownův pohyb podmíněný hodnotou v koncovém čase $t = 1$. Jednou z možností jak takový proces explicitně popsat, je

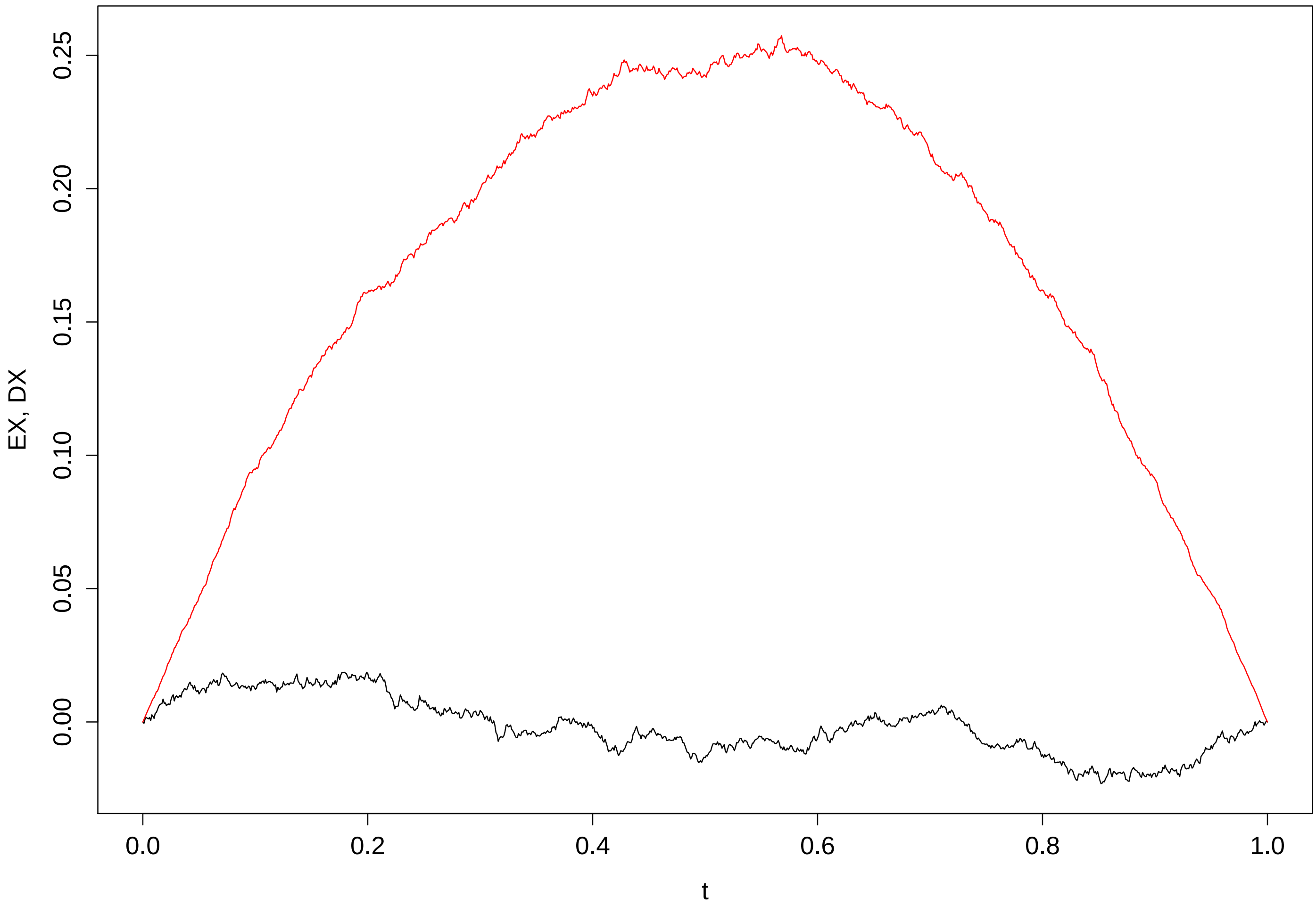
$$X_t = W_t - t\, W_1 \ , \qquad t \in [0,1] \ .$$

2.1 Úkoly

Využijte předchozího vztahu a napište skript, který bude generovat trajektorii Brownova mostu. Nejdříve si vygenerujte Brownův pohyb W_t na intervalu $[0,1]$ a pak jej transformujte na Brownův most X_t. Do obrázku pak vykreslete několik jeho trajektorií:



Vygenerujte si 100, 1000, příp. i 10000, trajektorií Brownova mostu a spočítejte střední hodnotu a rozptyl pro každé $t \in [0,1]$. Obě závislosti pak vykreslete do grafu. Jakým dvěma funkcím odpovídají tyto závislosti?

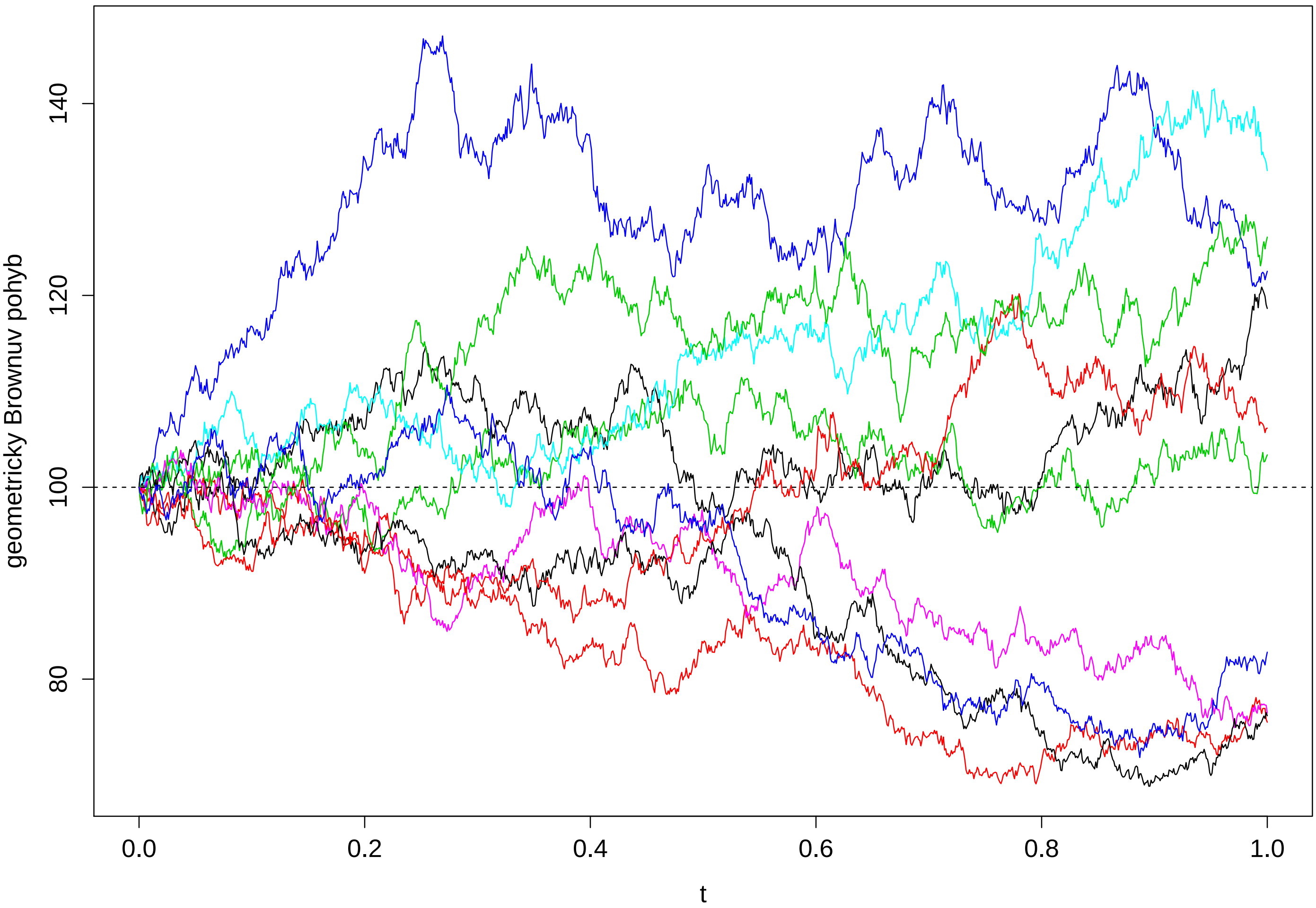


3 Geometrický Brownův pohyb

Cena akcie je modelována pomocí stochastické diferenciální rovnice (SDR)

$$\mathrm{d}X_t = r\,X_t\,\mathrm{d}t + \sigma\,X_t\,\mathrm{d}W_t \ ,$$

kde parametr r je úroková míra a parametr $\sigma > 0$ *volatilita*. Pro jednoznačné řešení je nutno doplnit i počáteční hodnotu $X_0 > 0$. V nejjednodušším případě uvažujeme konstantní parametry, tedy nezávislé na čase. Řešením této SDR je nezáporný náhodný proces X_t zvaný *geometrický Brownův pohyb*, jehož trajektorie jsou pro hodnoty $X_0 = 100$, $r = 0$ a $\sigma = 0,2$ znázorněny na obrázku:



Výše uvedenou SDR lze přepsat do diferenčního tvaru

$$\Delta X(t) = r\,X(\omega,t)\Delta t + \sigma\,X(t)\Delta W \ .$$

Odtud dostáváme vztah pro generování trajektorií geometrického Brownova pohybu

$$X(t+\Delta t) = X(t) + \Delta X(t) = X(t) + r\,X(t)\Delta t + \sigma\,X(t)\Delta W \ .$$

Člen ΔW je přírůstek Brownova pohybu na intervalu délky Δt (viz přechozí cvičení).

3.1 Úkoly

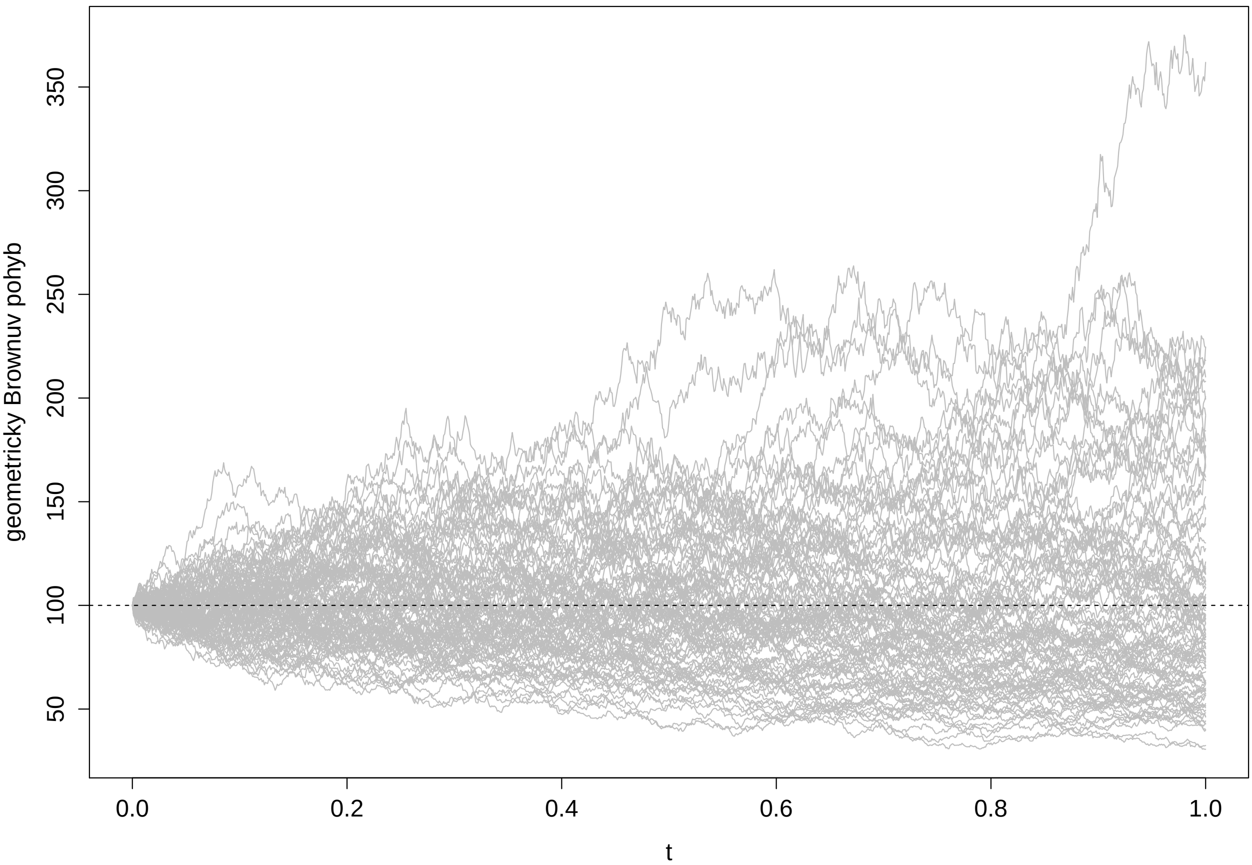
Pomocí **for**-cyklu nebo funkce **sapply** napište skript, který bude generovat trajektorie geometrického Brownova pohybu s parametry X_0, r, σ. Vygenerujte pak několik trajektorií geometrického Brownova pohybu na intervalu $[0,1]$ s paramety $X_0 = 100$, $r = 0$ a $\sigma = 0.2$, jak je naznačeno na obrázku výše.

Měňte hodnoty parametrů $X_0 > 0, r, \sigma > 0$ a sledujte chování trajektorií v závislosti na těchto změnách.

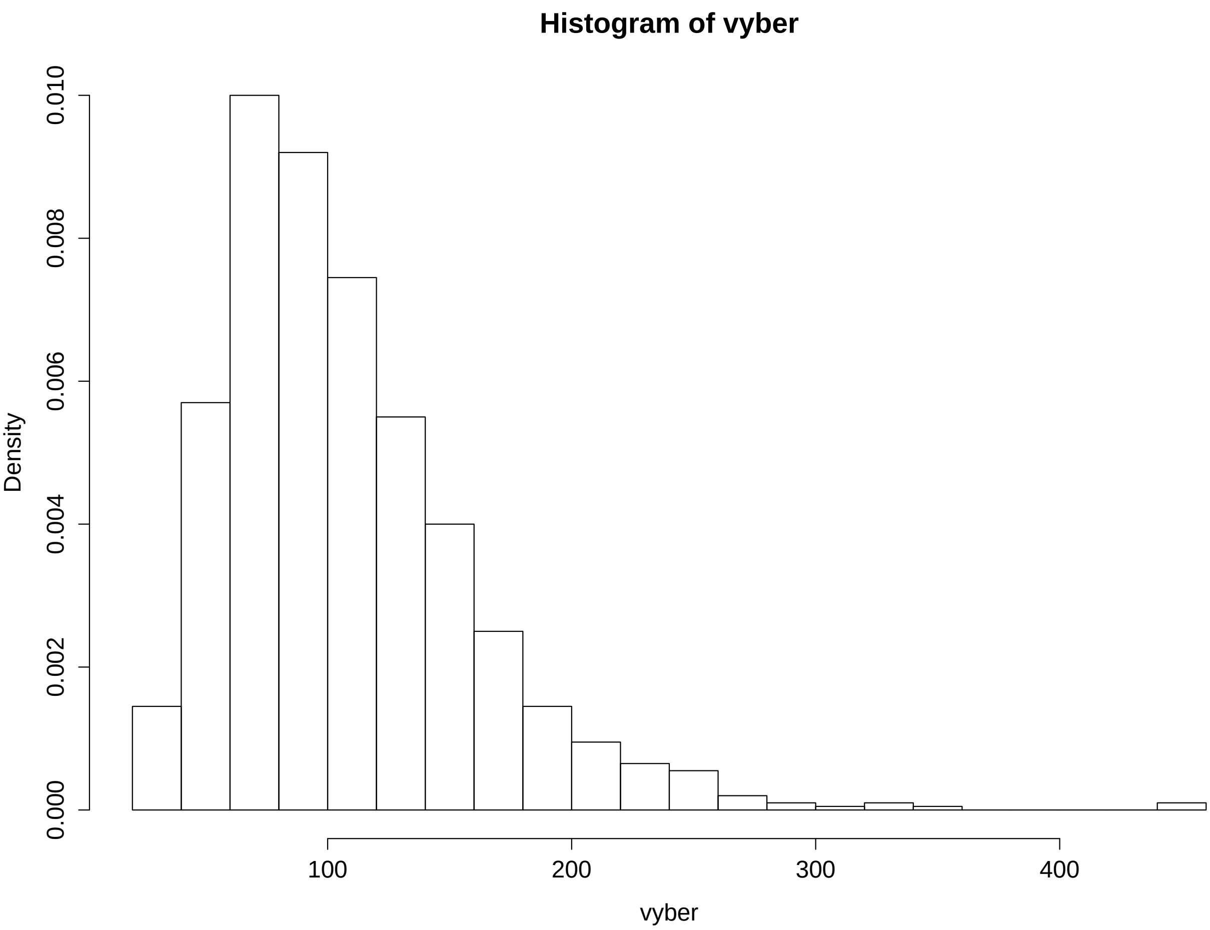
Dokažte, že následujícím způsobem generovaný náhodný proces je také geometrický Brownův pohyb X_t:

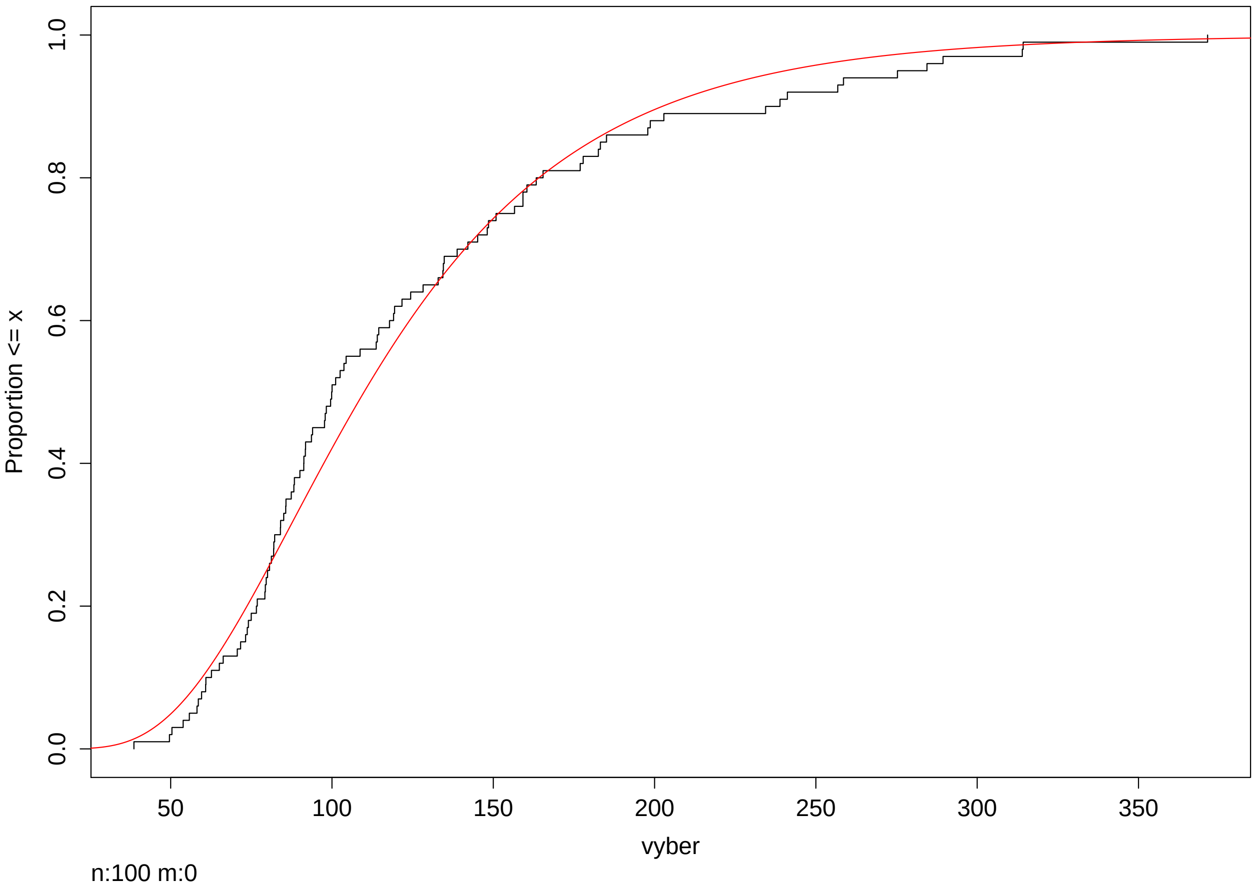
```
generuj.gBp <- function (t, dt, X0, r, sigma) {
  dW <- rnorm (length (t) - 1) * sqrt (dt)
  dX <- 1 + r * dt + sigma * dW
  X <- cumprod (c (X0 , dX))
}
```

Vygenerujte si 100, 1000 (příp. 10000), trajektorií geometrického Brownova pohybu.



Zvolte několik časů, např. $t = 0.2$, $t = 0.8$, a zkoumejte (viz funkce z předchozích cvičení) pravděpodobnostní rozložení hodnot X_t.



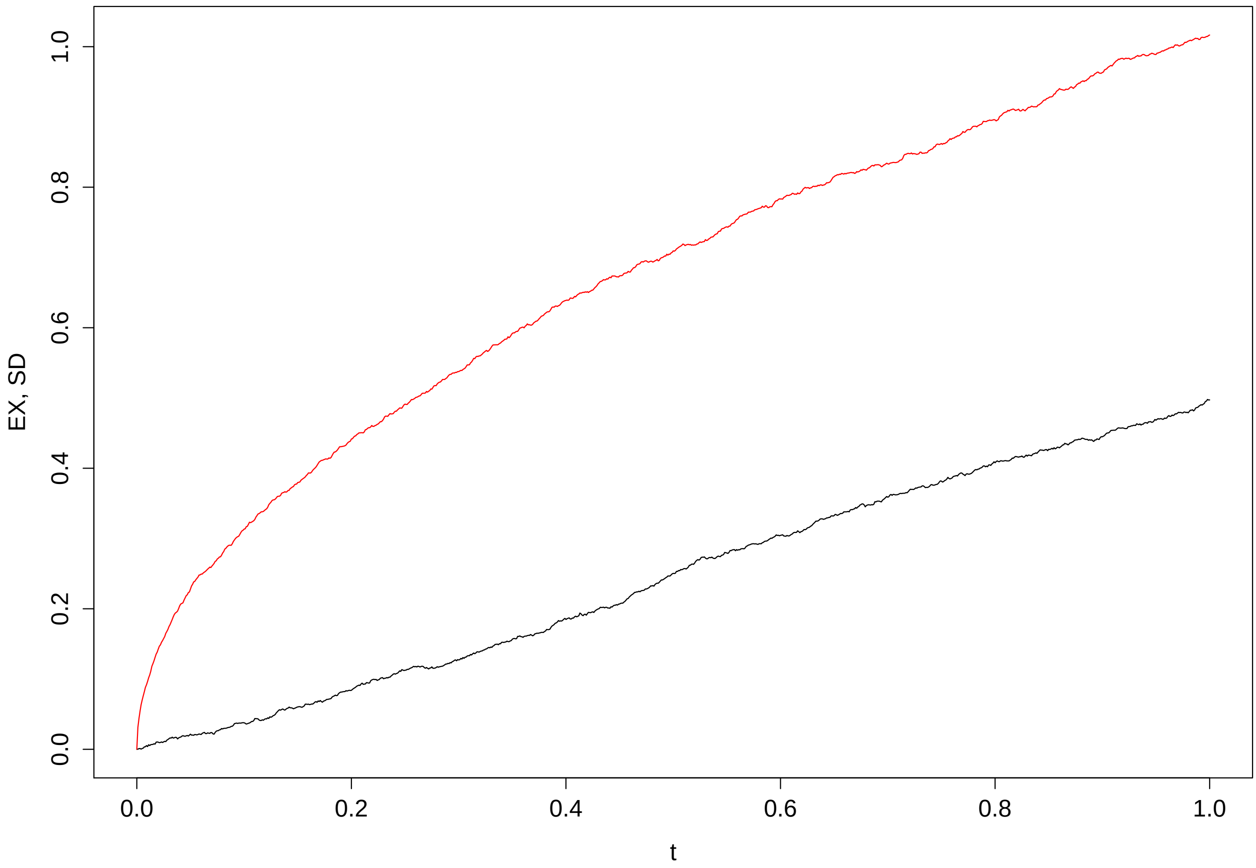


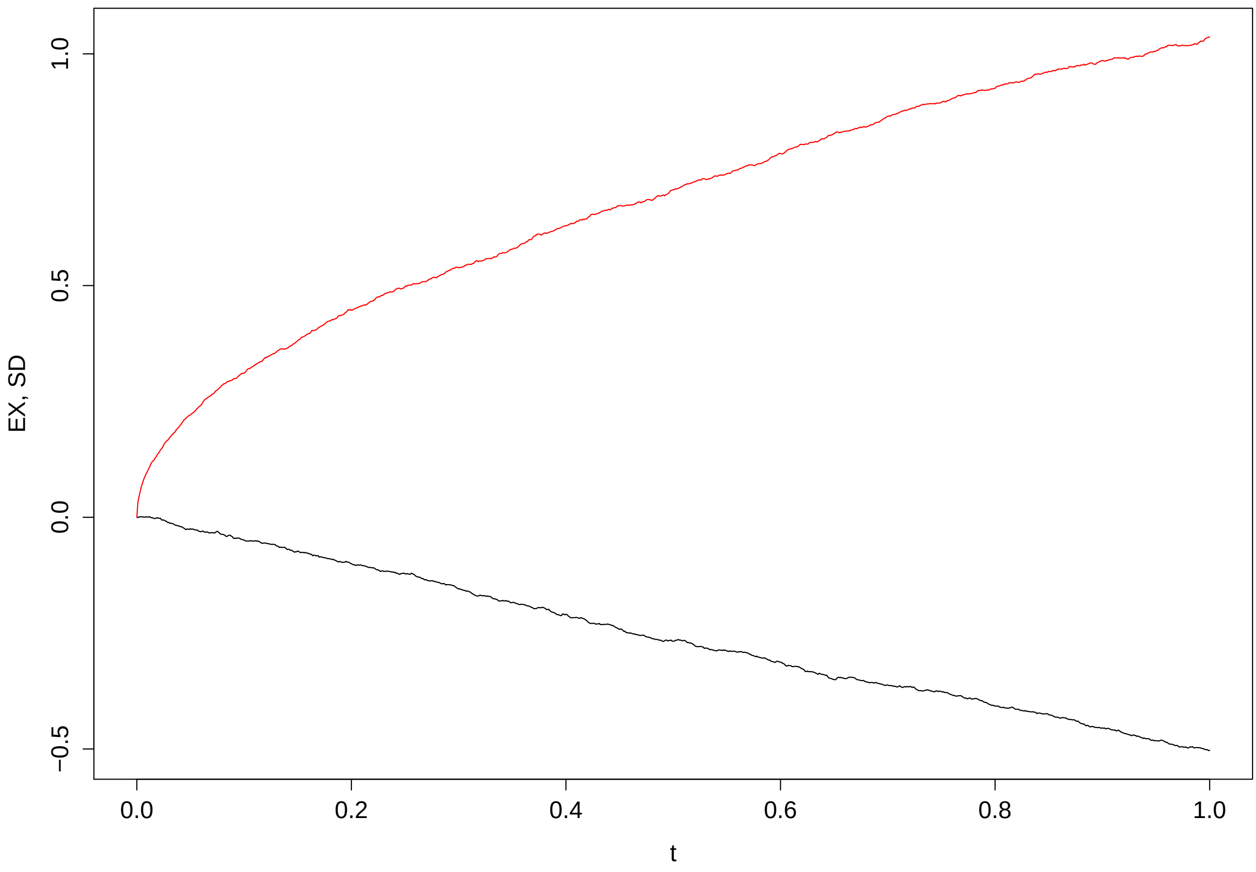
Jaké rozdělení pravděpodobnosti dostáváte? Hodnoty geometrického Brownova pohybu zlogaritmuje:

```
L <- log (M)
```

Jaké rozdělení pravděpodobnosti pravděpodobnosti mají zlogaritmované hodnoty pro pevnou hodnotu času?

Pro každý čas $t \in [0,1]$ spočítejte střední hodnotu a směrodatnou odchylku zlogaritmovaných realizací. Obě závislosti vykreslete do grafu. Následující grafy zobrazují tyto závislosti pro hodnoty parametrů $X_0 = 1, r = 1, \sigma = 1$, resp. $X_0 = 1, r = 0, \sigma = 1$:





Zkoumejte výsledné grafy pro různá nastavení parametrů X_0, r, σ a pokuste se vysledovat závislost střední hodnoty a rozptylu zlogaritmovaných hodnot na hodnotách těchto parametrů.