

Písemná část: řešení jednoduchých typů stochastických diferenciálních rovnic, výpočet diferenciálu Itôova procesu pomocí Itôova lemmatu, výpočet Itôova integrálu, výpočet střední hodnoty Itôova procesu, ověření, zda náhodný proces je martingal, vlastnosti Brownova pohybu, definice pojmů, základní vzorce, Blackův-Scholesův vzorec

Otázky pro ústní část (nutné minimum: definice, vlastnosti a interpretace):

1. Základní vlastnosti spojitých náhodných veličin a náhodných procesů
definice, hustota pravděpodobnosti, střední hodnota, charakterizace stochastické nezávislosti, vlastnosti normálního rozdělení
2. Vytvořující funkce
pravděpodobnostní a momentová vytvořující funkce, charakteristická funkce, jejich vlastnosti, vzájemné vztahy, jejich praktické využití
3. Fourierova transformace (FT)
definice, inverzní transformace, vlastnosti FT: změna měřítka, FT derivace, derivace FT, FT konvoluce, FT Gaussovy funkce
4. L²-prostor a Ciesielského konstrukce Brownova pohybu
definice L²-prostoru, základní vlastnosti, ortonormální báze v L², Fourierova řada a Fourierovy koeficienty, ortonormalita a úplnost Haarových funkcí, Schauderovy funkce, Ciesielského konstrukce Brownova pohybu (na A: důkaz konstrukce, bez technických tvrzení)
5. Lineární a kvadratická variace
definice lineární a kvadratické variace, jejich vlastnosti, výpočet pro (po částech) monotónní funkce, diferencovatelné funkce a pro trajektorie Brownova pohybu
6. Stochastický integrál
jednoduchá funkce, definice stochastického integrálu jednoduché funkce, závislost na volbě reprezentanta (levý, pravý krajní bod, nebo střed), definice Itôova integrálu, vlastnosti Itôova integrálu, Itôova izometrie, interpretace stochastického integrálu
7. Itôův proces a Itôovo lemma
definice Itôova procesu, vztah k Itôovu integrálu, heuristické odvození Itôova lemmatu, použití Itôova lemmatu pro výpočet Itôových integrálů, výpočet diferenciálů, per-partes pro Itôův integrál, resp. diferenciál součinu Itôových procesů
8. Stochastická diferenciální rovnice (SDR)
Stochastický diferenciál, SDR a přepis na tvar s Itôovým integrálem, Itôův proces, využití Itôova lemmatu pro řešení SDR, příklad na řešení stochastické diferenciální rovnice pro cenu akcie
9. Martingaly
definice filtrace, historie Brownova pohybu, neanticipativní proces, definice martingalu, věty o reprezentaci, charakterizace a vztahy mezi martingaly, Itôovými integrály a Itôovými procesy
10. Blackův-Scholesův (BS) model
popis modelu, konstrukce bezrizikového portfolia, základní věta arbitrážní teorie, risk-neutrální míra, stochastická diferenciální rovnice modelu a její řešení, odvození BS vzorce, interpretace veličin v BS vzorci
11. Změna pravděpodobnostní míry
ekvivalentní pravděpodobnostní míry, Radonova-Nikodymova derivace, změna míry při výpočtu střední hodnoty, Cameronova-Martinova věta, Girsanovova věta (na A: alespoň skicy obou důkazů)
12. Stopping time, bariérové opce
stopping time, princip odrazu, definice a typy bariérových opcí, binární bariérová opce, sestavení výplatní funkce pro binární bariérovou opci (na A: alespoň skica výpočtu)
13. Blackova-Scholesova parciální diferenciální rovnice (BS PDR), Feynmanova-Kacova věta
vysvětlení BS PDR, typy parciálních diferenciálních rovnic, převod BS PDR na rovnici vedení tepla, řešení rovnice vedení tepla pomocí Fourierovy transformace, Feynmanova-Kacova věta, souvislost s Brownovým pohybem