Stochastický kalkulus, Itôovo lemma, řešení jednoduchých integrálních rovnic

Jana Dvořáková

Přírodovědecká fakulta, MU

March 26, 2013

Obsah

Definice (Stochastický proces)

Stochastický proces je soubor náhodných proměnných $X = \{X_t; 0 \leq t < \infty\}$ na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ s hodnotami v $\mathbb{R}^n$. Pro každé t je

$$\omega \to X_t(\omega); \quad \omega \in \Omega$$

náhodná proměnná. Při pevném $\omega \in \Omega$ dostaneme funkci

$$t \to X_t(\omega); \quad 0 \leq t < \infty,$$

kterou nazýváme *trajektorií (realizací)* X.

Proměnnou t si můžeme představovat jako čas a každé ω jako jednotlivou „částici" nebo „experiment". Potom $X_t(\omega)$ představuje polohu (výsledek) částice (experimentu) ω v čase t. Někdy je vhodnější psát $X(t, \omega)$ místo $X_t(\omega)$. Potom je možné stochastický proces považovat za funkci dvou proměnných

$$(t, \omega) \to X(t, \omega)$$

z $[0, \infty) \times \Omega$ do $\mathbb{R}^n$.

Definice (Wienerův proces)

Stochastický proces na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ se nazývá *Wienerův proces*, jestliže platí:

1. $W(0) = 0$.
2. **(spojitost)** S pravděpodobností 1 je funkce $t \to W(t)$ (tj. trajektorie) spojitá v t.
3. **(nezávislost a normalita přírůstků)** Přírůstky $W(s) - W(t)$ pro každé $s > t$ mají rozdělení $N(0, s-t)$. Pro libovolné časové intervaly $0 < t_1 < s_1 \leq t_2 < s_2 \leq \ldots \leq s_n$ jsou přírůstky $W(s_1) - W(t_1), W(s_2) - W(t_2), \ldots, W(s_n) - W(t_n)$ navzájem nezávislé náhodné veličiny.

Zobecněný Wienerův proces píšeme ve tvaru

$$X(t) = \mu t + \sigma W(t),$$

kde μ je koeficient *driftu*, σ je koeficient *volatility* a $W(t)$ je Wienerův proces.

Geometrický Wienerův proces

Wienerův proces ovšem není vhodný pro popis ceny akcie, protože:

1. akcie nabývá i záporných hodnot,
2. při Wienerově procesu je pravděpodobnost, že se cena zvýší o 1 Kč stejná, pro $S = 1$ Kč, stejně jako pro $S = 10000$ Kč, není důležitá absolutní měna, ale zajímá nás relativní přírůstek vůči ceně akcie.

Bez volatility máme $\Delta S = \mu S \Delta t$, odtud vyjádříme relativní přírůstek $\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t$. Potom řešení diferenciální rovnice $\frac{dS}{S} = \mu dt$ je ve tvaru $S_t = S_0 \mathrm{e}^{\mu T}$. Obecně

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW,$$

ke μ je drift a σ volatilita, se označuje jako *geometrický Wienerův proces*.

Lineární variace

Variace je míra proměnlivosti funkce na daném intervalu.
Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a $D = \{a = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b\}$ je dělení intervalu $[a,b]$. Pak definujeme *lineární variaci příslušnou dělení D* jako

$$LV(f,D) = \sum_{j=1}^{n-1} \left| f(t_{j+1}) - f(t_j) \right| .$$

Definice (Lineární variace funkce)

Lineární variace funkce f je definovaná jako limita

$$LV(f) = \lim_{\|D\| \to 0} LV(f,D),$$

kde $\|D\|$ je norma dělení, tj.

$$\|D\| = \max_j \left| t_{j+1} - t_j \right| .$$

Obecně, je-li f monotonní funkce na $[a,b]$, pak

$$LV(f) = |f(b) - f(a)|.$$

Je-li funkce f po částech monotonní, pak

$$LV(f) = \int_a^b |f'(x)|\,dx.$$

Příklad

Vypočtěte lineární variaci funkce $\sin x$ na intervalu $[0, 2\pi]$. Tato funkce je po částech monotonní na jednotlivých podintervalech $\frac{\pi}{2}$, na každém z nich je variace rovna jedné. Sečtením jednotlivých variací dostáváme $LV(f) = 4$.

Pro trajektorie Wienerova procesu není lineární variace užitečný pojem, protože je rovna nekonečnu pro skoro všechny trajektorie.

Kvadratická variace

Nechť f je spojitá funkce na $[a,b]$ a $D = \{a = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b\}$ je dělením tohoto intervalu. Pak definujeme *kvadratickou variaci příslušnou dělení D* jako

$$KV(f,D) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(f(t_{j+1}) - f(t_j)\right)^2,$$

pokud limita existuje.

Definice (Kvadratická variace funkce)

Kvadratická variace funkce f na $[a,b]$ je definována jako

$$KV(f) = \lim_{\|D\|\to 0} KV(f,D),$$

kde $\|D\|$ je norma dělení, tj.

$$\|D\| = \max_j \left|t_{j+1} - t_j\right|.$$

Je-li funkce f diferencovatelná na intervalu $[a, b]$,pak

$$KV(f) = 0.$$

Věta (Kvadratická variace trajektorie Wienerova procesu)

Nechť $W(t)$ je Wienerův proces na $[0, T]$ a nechť $D = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T\}$ je dělení intervalu $[0, T]$, pak

$$\sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 \to T,$$

pro $\|D\| \to 0$ v L^2-normě.

Důsledek

1. Trajektorie Wienerova procesu mají kvadratickou variaci rovnu T.
2. Trajektorie Wienerova procesu mají nekonečnou lineární variaci.
3. Trajektorie Wienerova procesu nejsou diferencovatelné na žádném podintervalu.

Itôův kalkulus

Předpokládejme nyní, že pohyb ceny akcie je popsán geometrickým Wienerovým procesem

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW, \tag{1}$$

kde μ je koeficient driftu, σ je koeficient volatility, W je Wienerův proces a S je cena akcie. Problémem je, že rovnice (1), nemůže být interpretována jako diferenciální rovnice, protože trajektorie Wienerova procesu není nikde diferencovatelná. Zavedeme tedy teorii, kde budou místo derivací vystupovat integrály. Tuto teorii zkonstruoval Itô, proto se nazývá Itôův kalkulus. Mějme hladkou funkci f, pak můžeme definovat integrál podle přírůstků funkce f

$$\int_a^b g(u) df(u) = \int_a^b g(u) f'(u) du = \lim_{\|D\| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i)[f(t_{i+1}) - f(t_i)],$$

kde $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ je dělení intervalu $[a,b]$.

Integrál

$$\int_a^b g(u)df(u)$$

se nazývá *Stieltjesův integrál*. Chceme analogický integrál podle přírůstků Wienerova procesu W_t

$$\int_a^b g(t,\omega)dW_t(\omega),$$

jedná se o stochastický integrál.
Specifika stochastického integrálu:

1. integrál je náhodná veličina,
2. trajektorie nemá s pravděpodobností 1 v žádném bodě derivaci , W_t není hladká.

Motivace z finanční matematiky:
Nechť $W_t(\omega)$ je cena akcie v čase t a tržním scénáři ω, dále $g(t,\omega)$ je obchodní strategie (počet akcií dané firmy, které držíme v čase t a scénáři ω). Potom $g(t,\omega)[W(t_{i+1}) - W(t_i)]$ představuje zisk ze strategie za časový interval $[t_i, t_{i+1}]$. Integrál $\int_a^b g(t,\omega)dW_t(\omega)$ popisuje celkový zisk ze strategie za časový interval $[a,b]$.

Obsah

Motivace

Nechť f je hladká funkce na intervalu $[a,b] \in \mathbb{R}$. Dále uvažujme rovnoměrné dělení intervalu $a = t_0 < t_1 \ldots < t_n = b$, kde $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{n}$ pro $\forall i = 0, 1, \ldots$, n-1. Při využití Taylorova polynomu platí vztah

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_{i+1}) - f(t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f'(t_i)\Delta t_i + \frac{1}{2} f''(t_i)(\Delta t_i)^2 + \ldots$$

Protože f je hladká $\Rightarrow f''$ je omezená, tedy $\exists M > 0$ takové, že

$$\left| f''(t) \right| < M,$$

pro $\forall t \in [a,b]$. Odtud tedy dostáváme

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} f''(t_i)(\Delta t_i)^2 \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} M \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 = \frac{n}{2} M \frac{(b-a)^2}{n^2} \to 0,$$

pro $n \to \infty$.

Pro $n \to \infty$ tedy máme

$$f(b) - f(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f'(t_i)\Delta(t_i) = \int_a^b f'(t)dt.$$

Pro deterministický případ jsme tedy dostali **Newtonův-Leibnitzův vzorec**. Totéž chceme pro stochastickou funkci.
Nyní tedy uvažujme stochastickou funkci. V aplikacích je cena aktiva funkcí Wienerova procesu W_t, tedy

$$S_t(\omega) = f\left(W_t(\omega)\right).$$

Nechť f je hladká funkce, pak

$$f\left(W(b)\right) - f\left(W(a)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(W(t_{i+1})\right) - f\left(W(t_i)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f'\left(W(t_i)\right)\Delta W_i + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} f''\left(W(t_i)\right)\left(\Delta W_i\right)^2 + \ldots,$$

kde $\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$. Dále víme, že

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\Delta W_i)^2 \to b - a,$$

pro $n \to \infty$. Tento vztah plyne z následující věty.

Věta (Kvadratická variace trajektorie Wienerova procesu)

Nechť $W(t)$ je Wienerův proces na $[0, T]$ a nechť $D = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T\}$ je dělení intervalu $[0, T]$, pak

$$\sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 \to T,$$

pro $\|D\| \to 0$ v L^2-normě.

Členy 2. řádu zanedbat tedy nelze, členy vyšších řádů ano (jdou k nule pro $n \to \infty$).

Nyní tedy dostaneme

$$f(W(b)) - f(W(a)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f'(W(t_i))\,\Delta W_{t_i} + \frac{1}{2} f''(W(t_i))\,(\Delta W_{t_i})^2 =$$

$$= \int_a^b f'(W_t)\,dW_t + \frac{1}{2}\int_a^b f''(W_t)\,dt$$

Definice

Nechť $W(t)$ je Wienerův proces na prostoru $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Symbolem M označme třídu stochastických procesů $f(t,\omega)$ s následujícími vlastnostmi:

1. $f(t,\omega)$ je neanticipativní,
2. $(t,\omega) \to f(t,\omega)$ je měřitelná vůči σ-algebře,
3. platí
$$P\left\{\int_0^T f(t,\omega)^2 dt < +\infty\right\} = 1.$$

Itôův proces

Definice (Itôův proces)

Nechť $W(t)$ je Wienerův proces a u, v jsou procesy třídy M.
Jednodimenzionální Itôův proces je proces tvaru

$$X_t(\omega) = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)dW_t(\omega).$$

Člen $\int_0^t u(s,\omega)ds$ je obyčejný Riemannův integrál z náhodné funkce a $\int_0^t v(s,\omega)dW_t(\omega)$ je Itôův integrál.

Poznámka

Často se Itôův proces zapisuje také v diferenciálním tvaru

$$dX_t(\omega) = u(t,\omega)dt + v(t,\omega)dW_t(\omega),$$

což je tzv. *stochastický diferenciál*, kde koeficient $u(t,\omega)$ se nazývá *drift* a $v(t,\omega)$ je *volatilita*.

Itôovo lemma

Věta (Itôovo lemma)

Nechť $X(t,\omega)$ *je Itôův proces se stochastickým diferenciálem* $dX(t) = udt + vdW(t)$, *kde* u, v *jsou procesy třídy* M *a nechť* $g(t,x) : \langle 0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce. Potom proces*

$$Y(t) = g(t, X(t))$$

je opět Itôův proces. Jeho stochastický diferenciál má tvar

$$dY(t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X(t))dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X(t))dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X(t))\left(dX(t)\right)^2,$$

kde

$$\left(dX(t)\right)^2 = \left(udt + vdW(t)\right)^2 = \left(dX(t)\right)\left(dX(t)\right)$$

se počítá podle pravidel $dtdt = dtdW = 0$ *a* $dWdW = dt$.

Obsah

Příklad 1.: $\int W_t dW_t$

Vypočtěte pomocí Itôova lemmatu

$$\int_0^T W_t dW_t.$$

Řešení:
Označíme-li si

$$\frac{\partial g}{\partial w} = w \quad \Rightarrow \quad g(t,w) = \frac{w^2}{2},$$

potom

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 0$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial w^2} = 1.$$

Pak stochastický diferenciál pro proces $Y(t) = g(T, W(T))$ je tvaru

$$dg = 0 + WdW + \frac{1}{2}(dW)^2 = WdW + \frac{1}{2}dt,$$

Příklad 1. - pokračování

odtud získáme po úpravě

$$g(T, W(T)) = g(0, W(0)) + \int_0^T W dW + \int_0^T \frac{1}{2} dt$$
$$\int_0^T W dW = g(T, W(T)) - \int_0^T \frac{1}{2} dt.$$

Naše hledané řešení je tedy

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{W(T)^2}{2} - \frac{T}{2}.$$

Příklad 2.: $\int f(t)dW_t$

Odvoďte pravidlo pro integrování per partés pro stochastický integrál

$$\int_0^T f(t)dW_t = f(T)W_t(T) - \int_0^T W_t f'(t)dt.$$

Označme si

$$\frac{\partial g}{\partial w} = f(t) \quad \Rightarrow \quad g(t,w) = f(t)w,$$

potom tedy

$$\frac{\partial g}{\partial t} = f'(t)w$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial w^2} = 0.$$

Z Itôova lemmatu máme

$$dg = f'(t)Wdt + f(t)dW + 0$$
$$g(T,W(T)) = \int_0^T f'(t)Wdt + \int_0^T f(t)dW$$

Příklad 2. - pokračování

Odtud získáme jednoduchou úpravou

$$\int_0^T f(t)dW = g(T, W(T)) - \int_0^T f'(t)Wdt = \\ = f(T)W(T) - \int_0^T f'(t)Wdt,$$

což jsme chtěli dokázat.

Stochastická diferenciální rovnice pro vývoj ceny akcie

Předpokládejme, že se cena akcie S_t vyvíjí podle geometrického Wienerova procesu

$$dS_t = \mu S_t dt + S_t dW_t \quad \text{neboli} \quad \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + dW_t. \tag{2}$$

Nechť

$$g(t,x) = \ln x \quad \text{a} \quad Y_t = g(t,S_t),$$

potom tedy máme

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 0$$
$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{x}$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Z Itôova lemmatu dostaneme

$$dY_t = 0 + \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S_t^2}\right)$$

Za dS_t dosadíme z (2)

$$dY_t = \frac{1}{S_t}\left(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t\right) - \frac{1}{2S_t^2}\left(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t\right)^2 = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t.$$

Máme tedy

$$Y_t = \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \int_0^t \sigma dW_t = Y_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t,$$

kde $W_0 = 0$. Tedy

$$\ln S_t = \ln S_0 + \mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t$$

má normální rozdělení

$$\ln S_t \sim \mathrm{N}\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t; \sigma^2 t\right).$$

Potom

$$S_t = S_0 \mathrm{e}^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma^2 t}$$

má lognormální rozdělení.

POUŽITÁ LITERATURA:

- FÁRKOVÁ, L. *Stochastický kalkulus a jeho aplikace*. Diplomová práce, Brno: MU, 2008.
- KOLÁŘ, M. *Přednášky z předmětu: Stochastická analýza*. Brno: MU, 2012.
- MELICHERČÍK, I., Olšanová, L. a ÚRADNÍČEK, V. *Kapitoly z finančnej matematiky*. Bratislava: Miroslav Mračko, 2005, 242 s. ISBN 8080576513.