

ARCH modely

Matej Šimšík

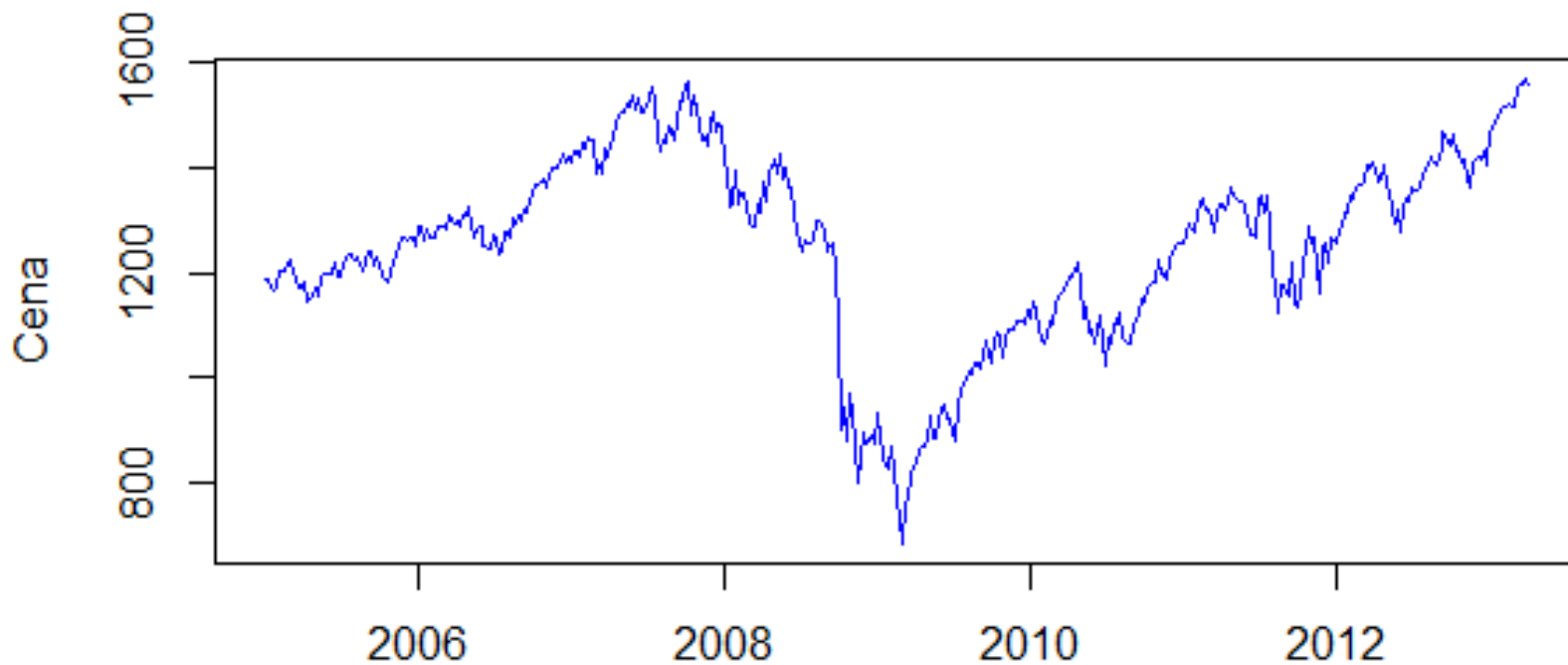
MF006 Seminár z finančnej matematiky

Obsah

- Lineárny regresný model
- ARIMA procesy
- ARCH procesy

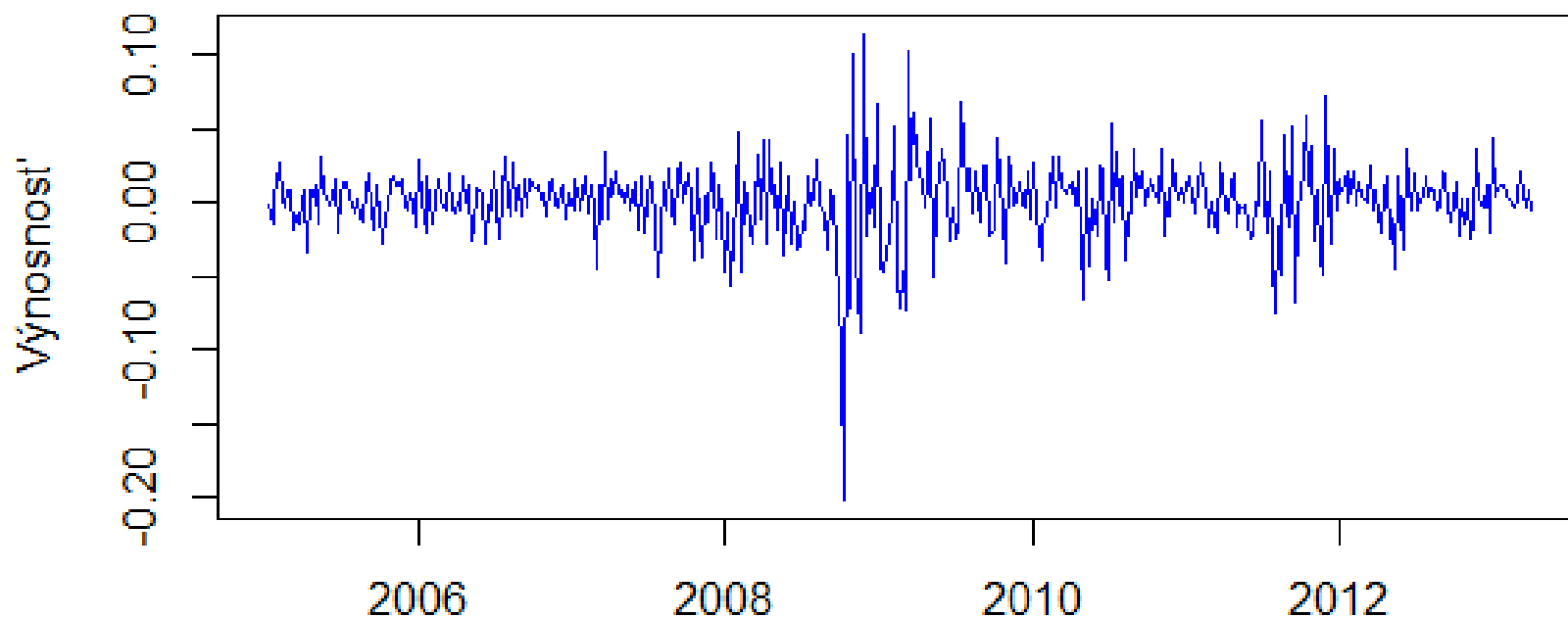
Príklad

Závěrečné týdenné ceny S&P500



Príklad

Týždenná log-výnosnosť S&P500



Regresný model

Vysvetľovaná premenná Y je závislá na premenných X_1, X_2, \dots, X_k .
Existuje vzťah a to taký, že:

$$E(Y|X_1, X_2, \dots, X_k) = f(X_1, X_2, \dots, X_k, \boldsymbol{\beta}),$$

kde $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$ je hľadaný vektor koeficientov v regresnej rovnici.

Lineárny regresný model

Majme n pozorovaní náhodnej premennej $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$ a

nenáhodných premenných $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_{1,1} & \cdots & X_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n,1} & \cdots & X_{n,k} \end{pmatrix}$.

Uvažujeme model plnej hodnosti

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \text{iid. } N(\mathbf{0}_n, \sigma^2 \mathbf{E}_n)$ (biely šum).

Odhad modelu

Metóda maximálnej vierohodnosti:

$$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(Y_i; \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) \rightarrow \max$$

V našom prípade to isté ako OLS:

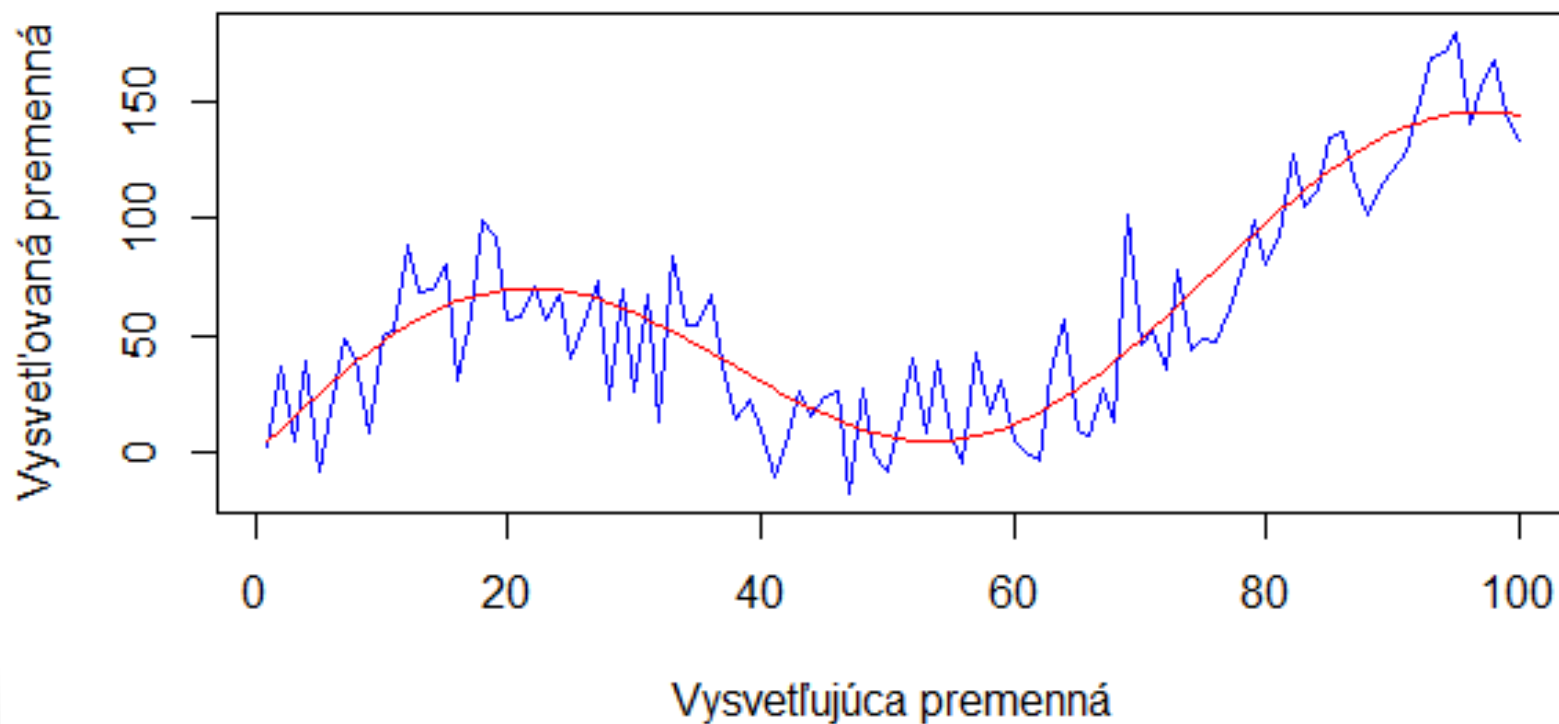
$$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \max$$

Existuje analytické riešenie modelu a to:

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}\mathbf{Y}$$

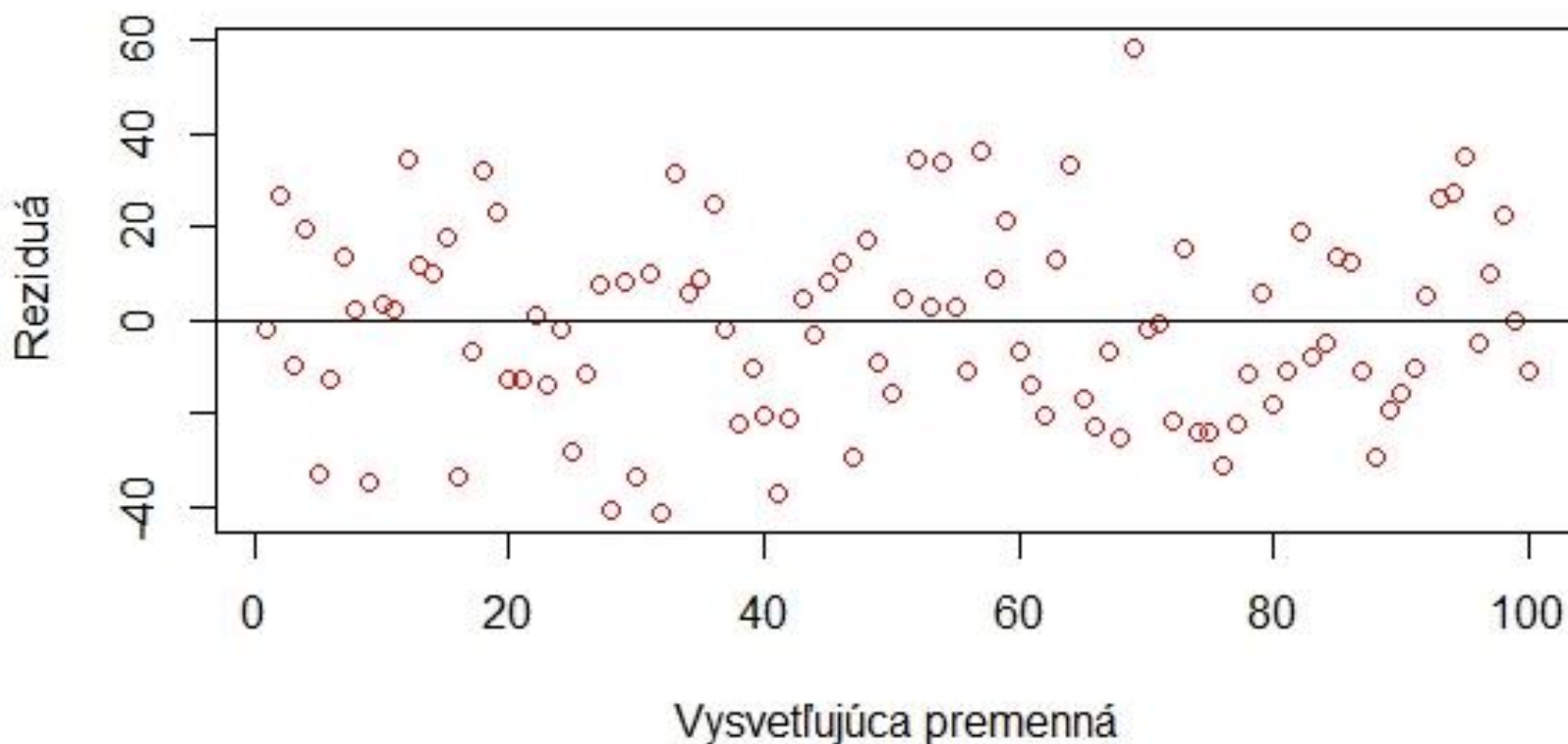
Modelový příklad

Deterministický trend $50 \cdot \sin(x/12) + x$



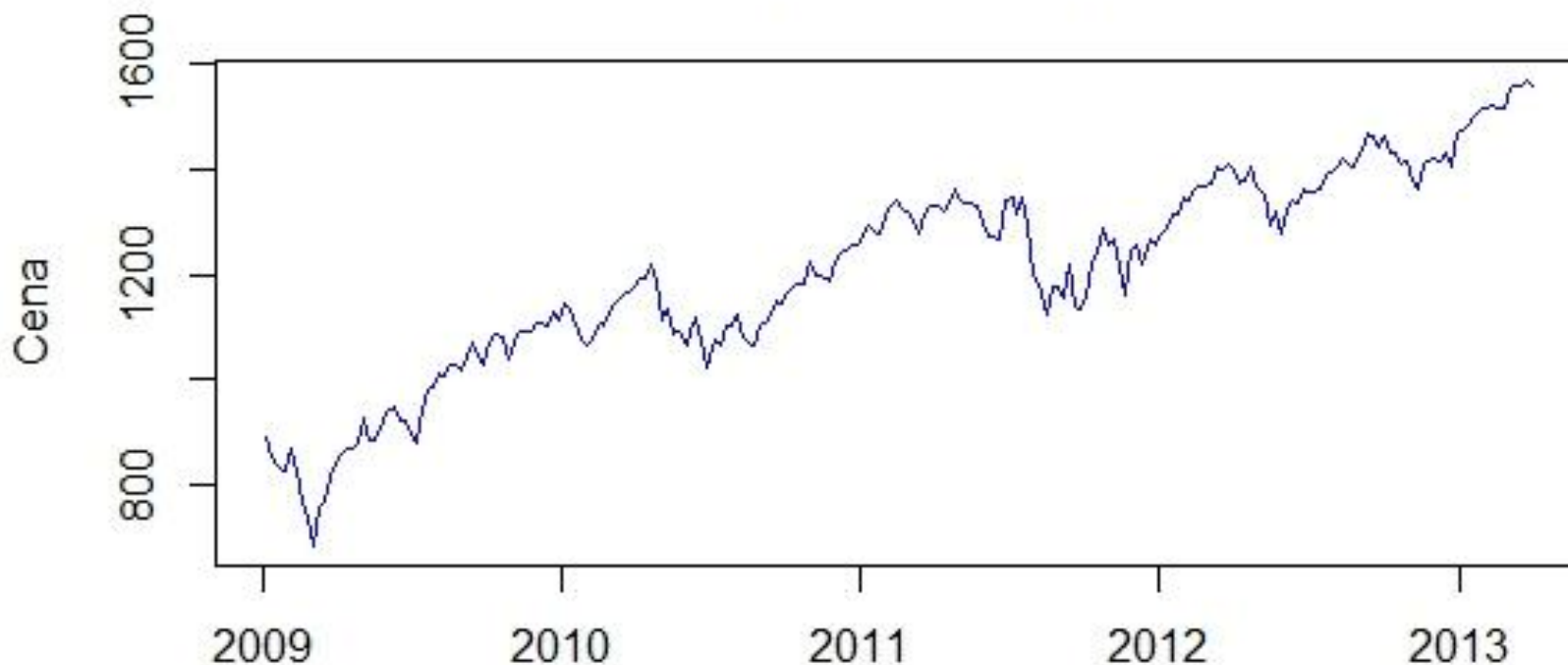
Modelový příklad

Analýza reziduí



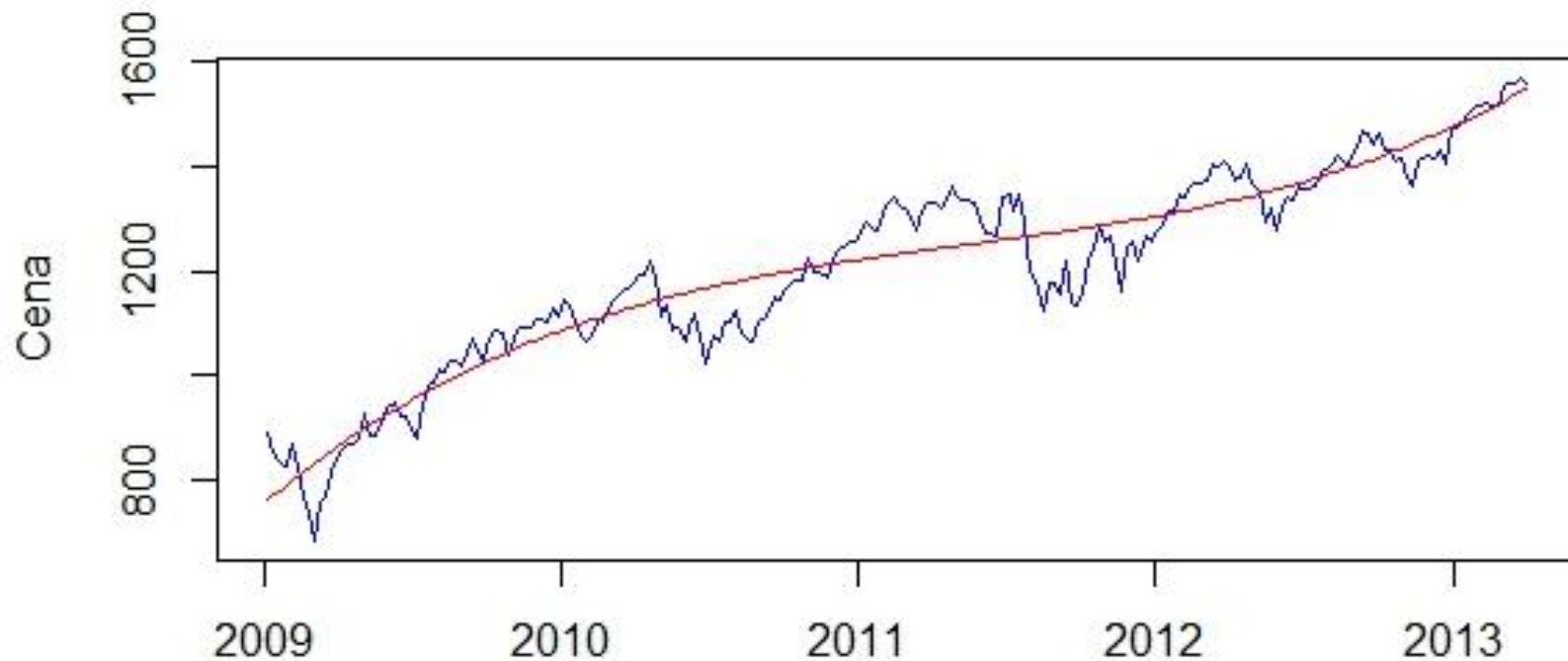
Reálny príklad

Závěrečné týdenné ceny S&P500



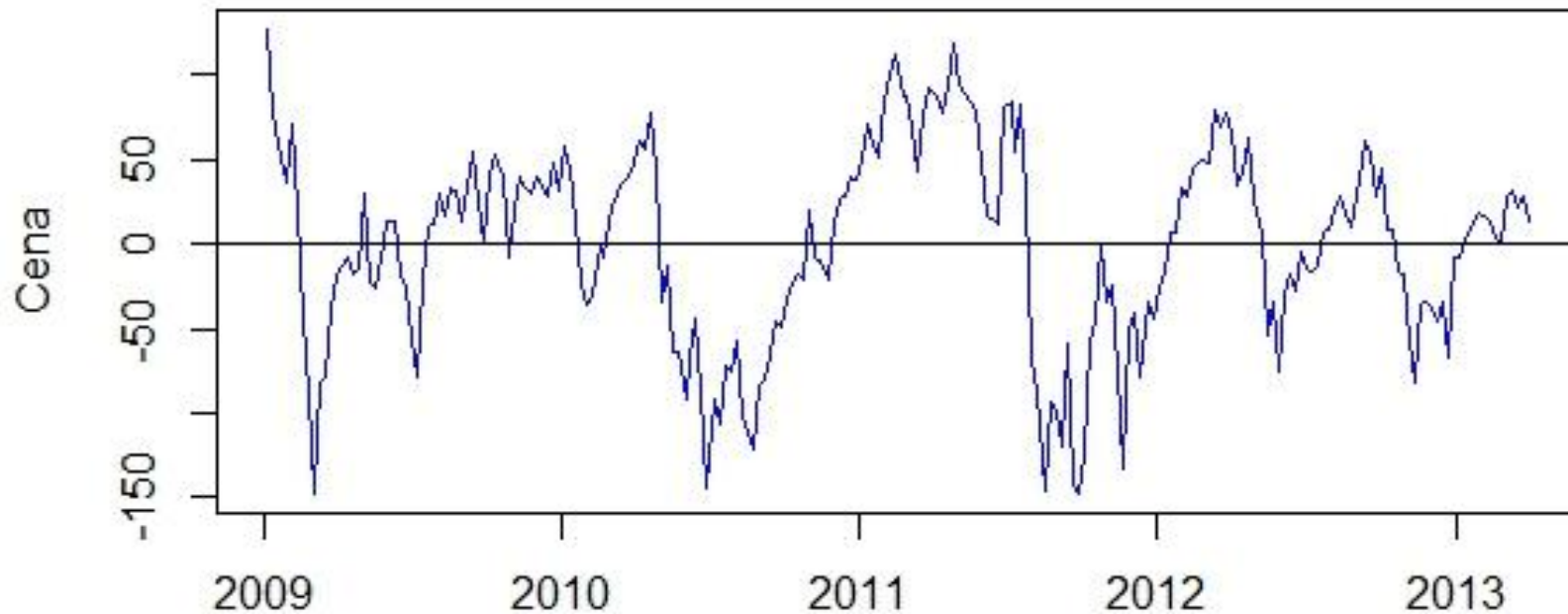
Reálny príklad

Model S&P500 - polynomický trend



Reálny príklad

Reziduá - polynomický trend



Problémy

- Autokorelácia reziduí
- Heteroskedasticita
- Predikcie najlepšie vnútri pozorovaného okna → slabá vypovedacia schopnosť

ARIMA(p, d, q) modely

Majme časovú radu Y_t . Potom definujeme operátor spätného chodu:

$$BY_t = Y_{t-1}$$

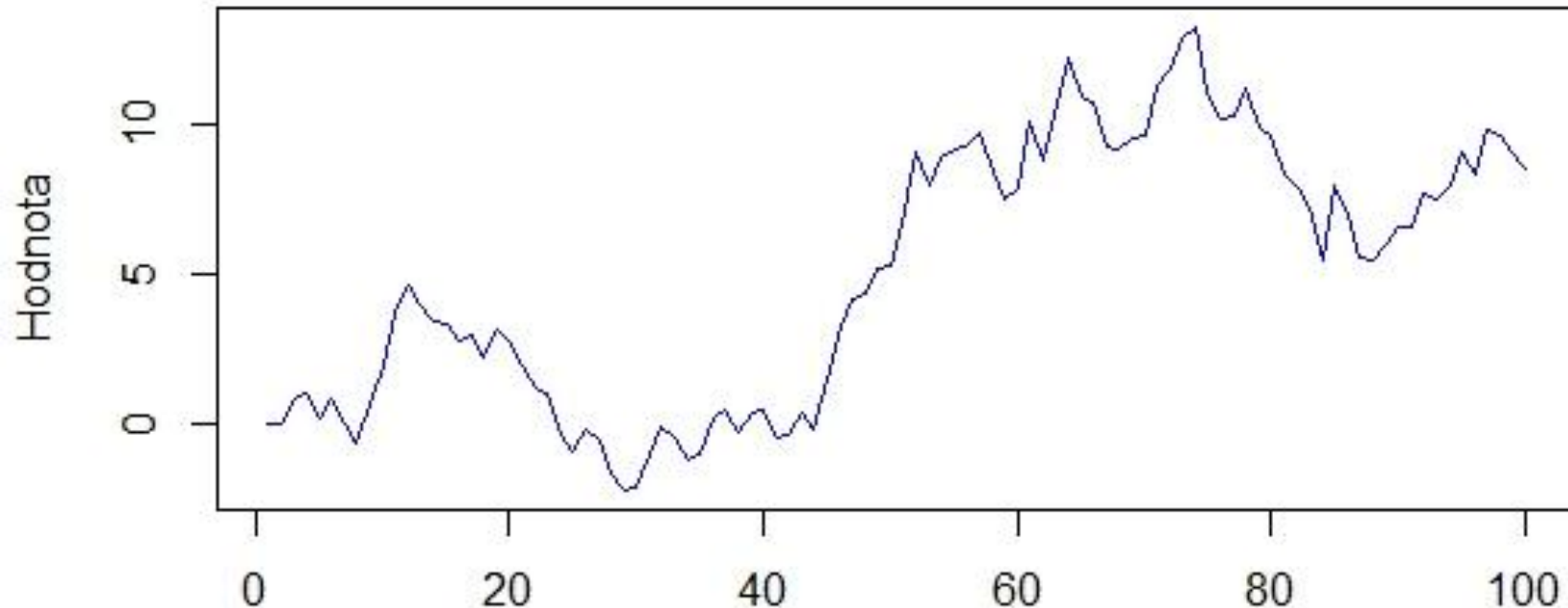
Ďalej definujeme ARIMA(p, d, q) proces ako:

$$\varphi(B)(1 - B)^d Y_t = \theta(B)\varepsilon_t,$$

kde $\varepsilon_t \sim \text{iid. } N(0, \sigma^2)$ je biely šum a $\varphi(B), \theta(B)$ sú polynómy stupňa p, q.

Príklad: proces $I(1)$

Náhodná prechádzka



ARCH(p) model

(Autoregressive conditional heteroskedasticity)

Model tvaru:

$$Y_t = \mathbf{X}_t' \boldsymbol{\beta} + u_t,$$

kde \mathbf{X}_t je vektor pozorování nejakej časovej rady (pokojne aj Y_t),
ďalej:

$$u_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t$$
$$h_t = \tau + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p u_{t-p}^2,$$

kde $\varepsilon_t \sim \text{iid. } N(0, 1)$ je nezávislá na \mathbf{X}_t a Y_t až do času $1 - p$ a
platí, že $\tau \geq 0, \alpha_i \geq 0$.

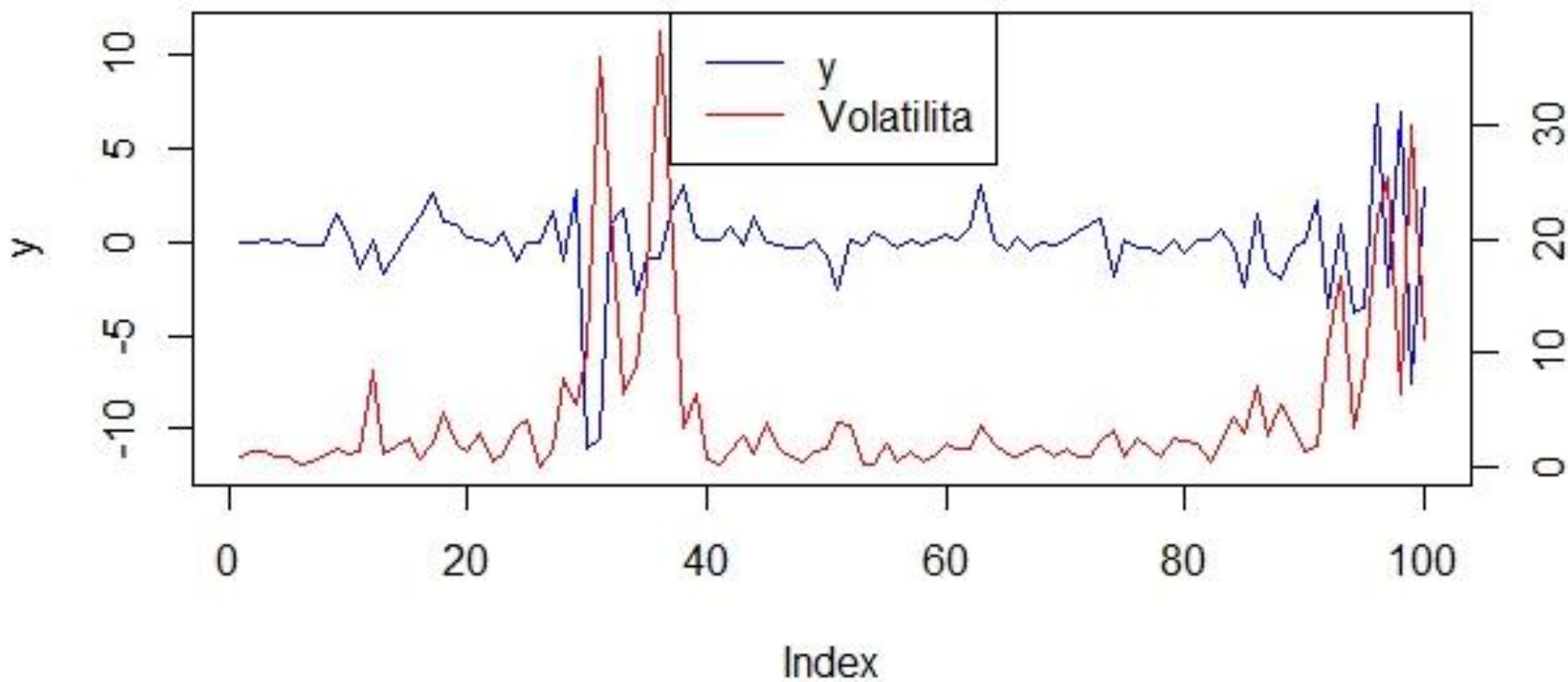
Generovanie ARCH(1) procesu

Namodelujeme jednoduchý ARCH proces tvaru $Y_t = u_t$, teda bez vysvetľujúcej premennej:

1. Položíme $Y_0 = 0, u_0 = 1, h_0 = 1, \tau = 1$ a $\alpha_1 = 1$.
2. Ďalej $h_1 = \tau + \alpha_1 u_0^2 = 2$.
3. Vygenerujeme $u_1 = \sqrt{h_1} \varepsilon_1$, kde $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$.
4. Konečne dostaneme $Y_1 = u_1$.
5. Opakujeme.

Výsledok

ARCH proces



Skript v R

```
y<-0
u<-1
h<-1
tau<-1
alpha<-1
i<-1
pp<-100 #pocet pozorovani (cas, do ktoreho pozorujeme)

#Generovanie procesu
for (i in 1:(pp-1)){h<-c(h, tau+(alpha*u[length(u)]^2)) #generujeme h(t), aj s nahodou musi byt
kladne!
      u<-c(u, sqrt(h[length(h)])*rnorm(mean=0, sd=1, n=1)) #generujeme u(t)
      y<-c(y, rnorm(mean=0, sd=abs(u[length(u)]), n=1)) #generujeme y(t)
    }

#Obrazok volatility
plot(y, ylim=c(min(y)-1, max(y)+4), type="l", col="blue", main="ARCH proces")
par(new=TRUE)
plot(h, type="l", col="red", xaxt="n", yaxt="n", xlab="", ylab="")
axis(4)
mtext("Volatilita", side=4, line=3)
legend("top", col=c("blue","red"), lty=1, legend=c("y","Volatilita"), border=FALSE)
```

ARCH test

Najprv odhadneme model pomocou OLS a uložíme si reziduá, ktoré potom modelujeme v kvadráte ako AR proces s konštantou:

$$u_t^2 = \tau + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p u_{t-p}^2.$$

Ak $u_t \sim \text{iid. } N(0, \sigma^2)$, potom $R_u^2 \approx \chi^2(p)$.

Odhad ARCH(p)

Označme $\boldsymbol{\delta} = (\tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)'$ a odhadovaný parameter:

$$\boldsymbol{\Theta} = (\boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\delta}')'$$

Potom

$$L(\boldsymbol{\Theta}) = \prod_{t=1}^T f(Y_t | \mathbf{X}_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{1-m}; \boldsymbol{\Theta}) \rightarrow \max$$

je maximálne vierohodný odhad modelu, kde:

$$f(Y_t | \mathbf{X}_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{1-m}; \boldsymbol{\Theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(\frac{-(Y_t - \boldsymbol{\beta}\mathbf{X}_t)^2}{2h_t}\right)$$

Optimalizácia sa potom prevádza numerickými metódami.

Model výnosov S&P500

Model 7: GARCH, using observations 2-431 (T = 430)

Dependent variable: $ld_s\&p500$

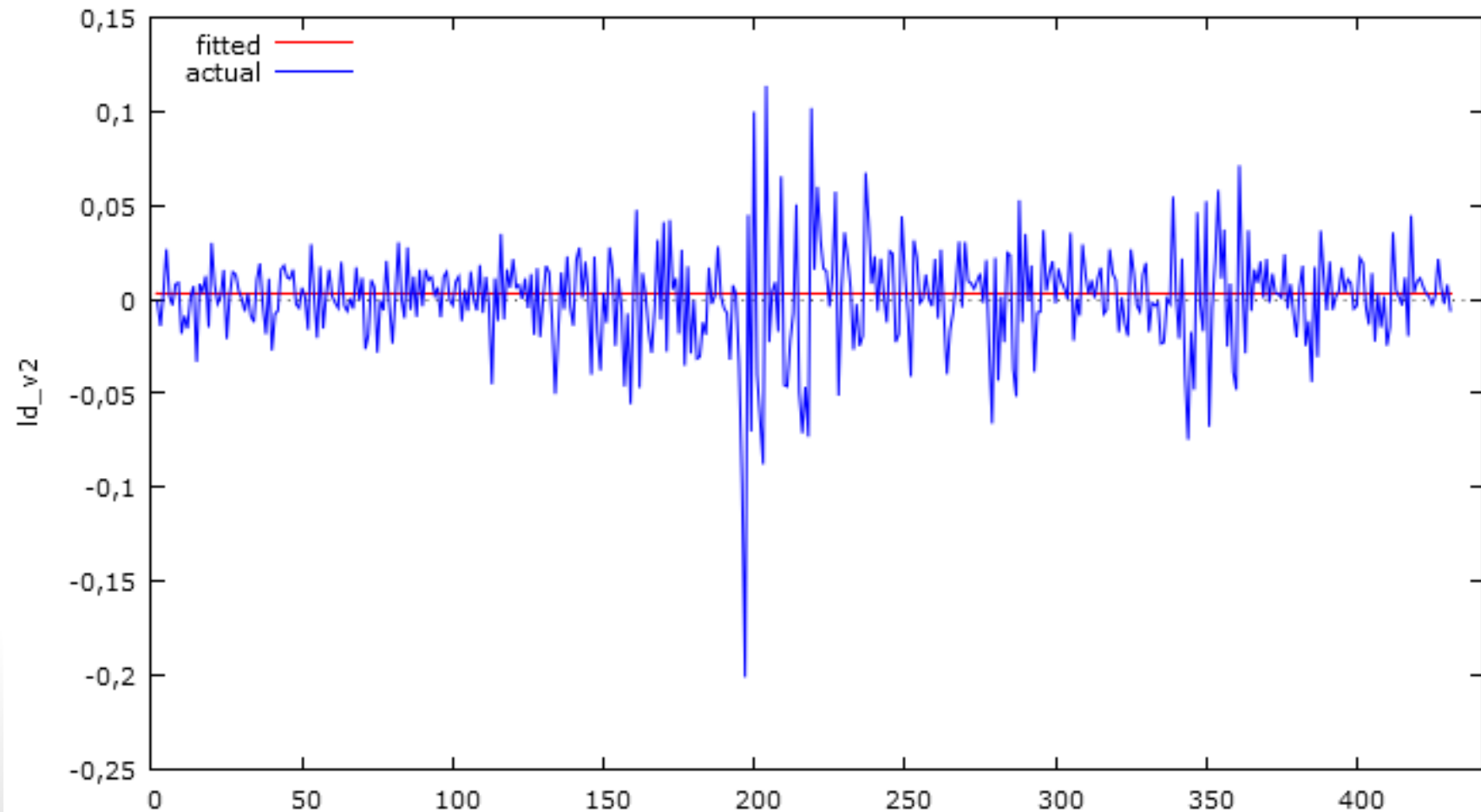
Standard errors based on Hessian

	<i>Coefficient</i>	<i>Std. Error</i>	<i>z</i>	<i>p-value</i>	
const	0,0032794	0,000901217	3,6389	0,00027	***
alpha(0)	0,000320483	3,2117e-05	9,9786	<0,00001	***
alpha(1)	0,560133	0,101895	5,4972	<0,00001	***
Mean dependent var		0,000637	S.D. dependent var	0,027195	
Log-likelihood	1011,816	Akaike criterion	-2015,633		
Schwarz criterion	-1999,378	Hannan-Quinn	-2009,214		

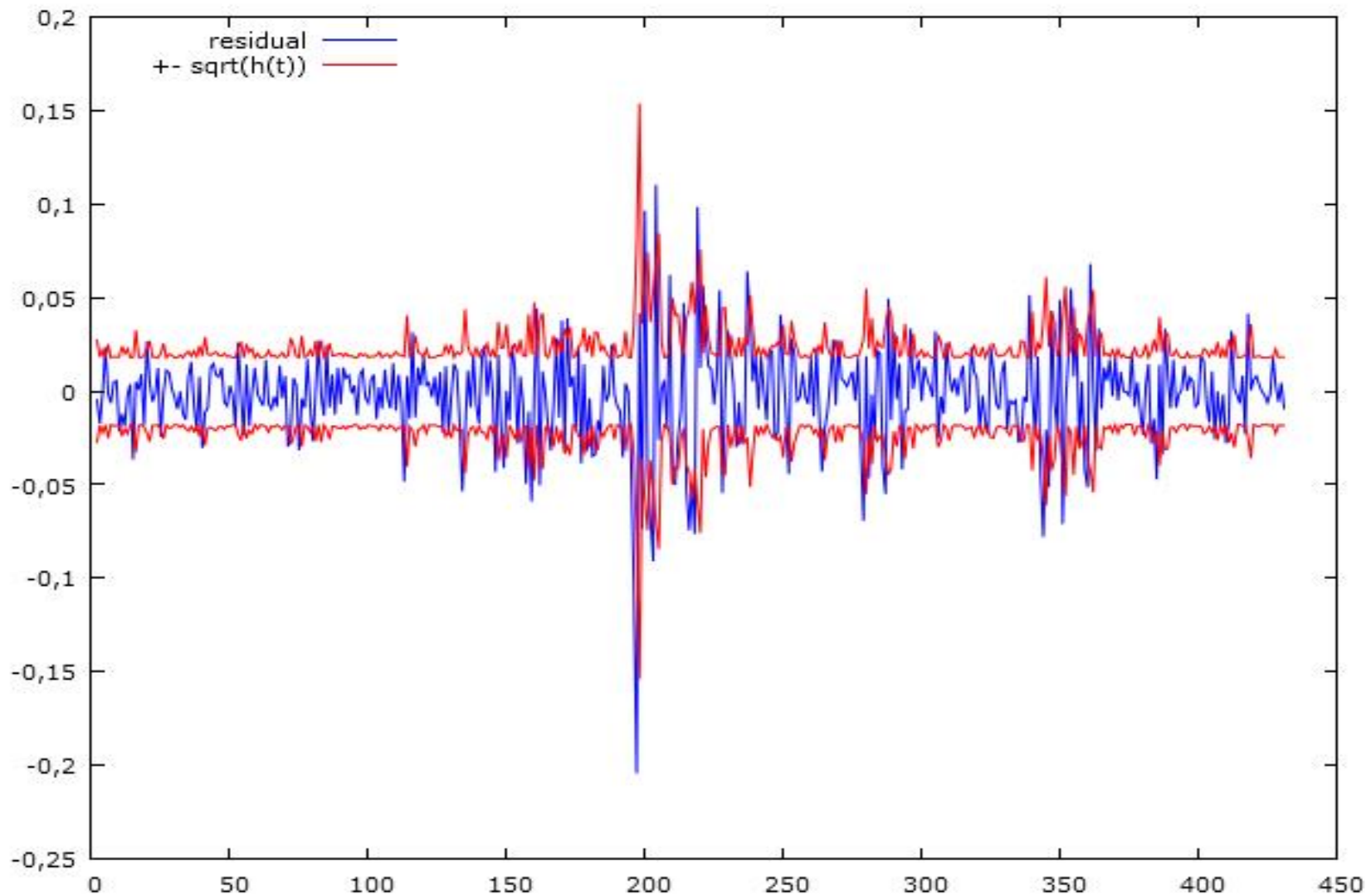
Unconditional error variance = 0,000728592

Predikcia

Actual and fitted Id_v2



Volatilita



GARCH(p, q)

Oproti ARCH modelu, špecifikácia volatility ako ARMA procesu:

$$h_t = \tau + \delta_1 h_{t-1} + \delta_2 h_{t-2} + \dots + \delta_p h_{t-p} + \\ + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \omega_t$$

(predpoklady podobne ako u ARCH).

Výhody oproti ARCH:

- Z AR procesu do ARMA → viac informácií
- Nespôsobuje „overfitting“
- Menej pravdepodobné porušenie nezápornosti

Odhad GARCH

Model 9: GARCH, using observations 2-431 (T = 430)

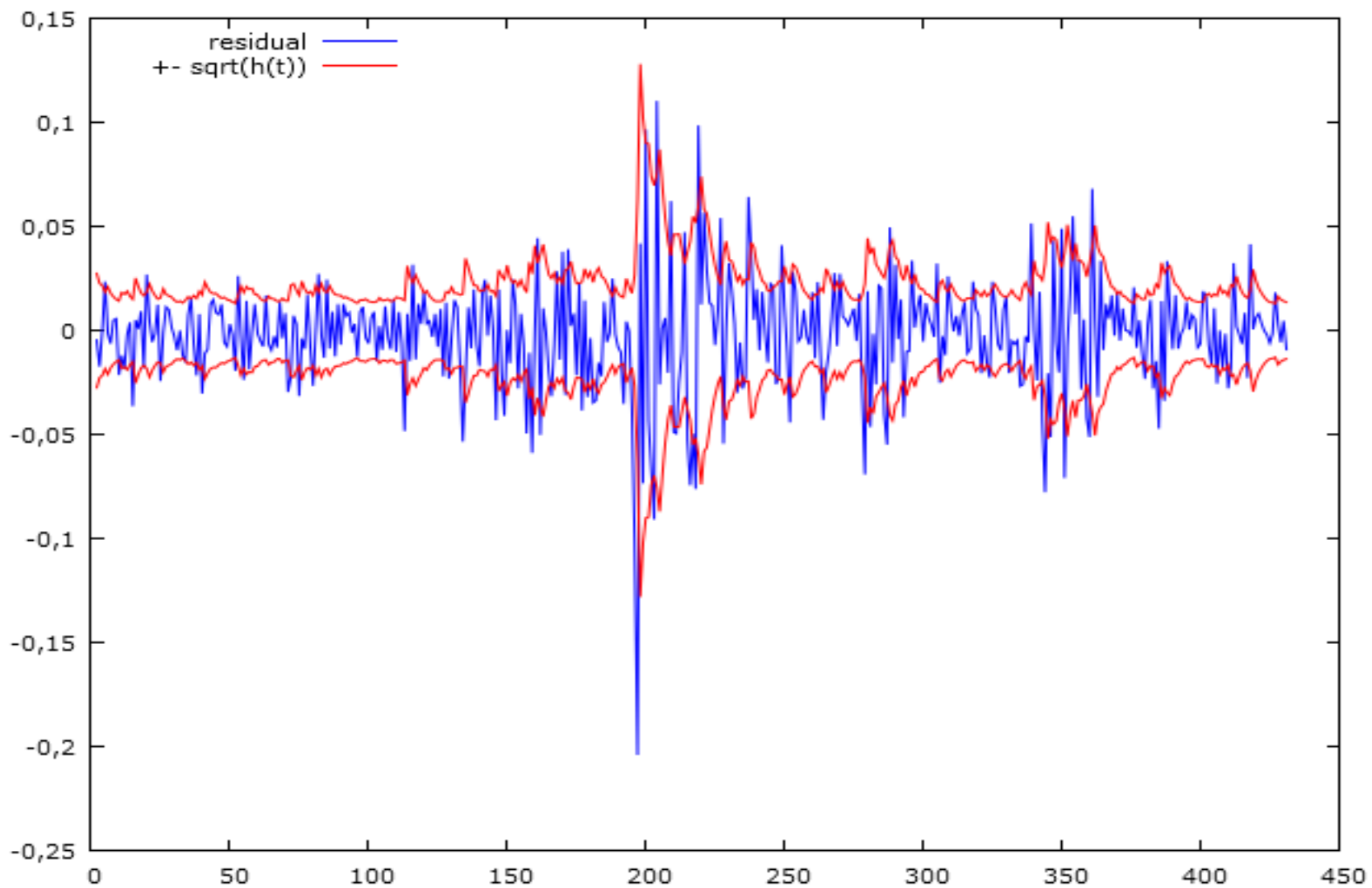
Dependent variable: Id_s&p500

Standard errors based on Hessian

	<i>Coefficient</i>	<i>Std. Error</i>	<i>z</i>	<i>p-value</i>	
const	0,00320584	0,000869426	3,6873	0,00023	***
alpha(0)	5,75626e-05	1,9074e-05	3,0178	0,00255	***
alpha(1)	0,335457	0,0705311	4,7562	<0,00001	***
beta(1)	0,598431	0,0686838	8,7128	<0,00001	***
Mean dependent var		0,000637	S.D. dependent var	0,027195	
Log-likelihood	1030,579	Akaike criterion	-2051,157		
Schwarz criterion	-2030,838	Hannan-Quinn	-2043,134		

Unconditional error variance = 0,000870688

Volatilita



Ďalšie modely

- Iné rozdelenia (často t-rozdelenie)
- ARCH-M (GARCH-M) – teória naznačuje, že za vyššie podstupené riziko očakávajú investori väčší zisk
- EGARCH – neočakávaný pád akcie spôsobuje oveľa vyššiu volatilitu ako neočakávaný rast
- Modely stochastickej volatility

Nevýhody

- Modeluje sa viacero vecí naraz
- Dlhé výpočty
- Výpočty nemusia dobehnúť

Výhody

- Predikcia rizika
- Modelovanie heteroskedastických časových rád
- Oceňovanie opcií
- Množstvo variant

Zdroje

- <http://finance.yahoo.com/> - zdroj dát dostupný z domova
- [RNDr. Marie Forbelská, PhD.: Stochastické modely časových řad](#)
- James D. Hamilton – Time Series Analysis

Ďakujem za
pozornosť!