KRIGING – geostatistické metody interpolace

Krigování je základní geostatistickou metodou určování lokálního odhadu. Metoda se často označuje akronymem **BLUE** (Best Linear Unbiased Estimator – tedy nejlepší lineární nezkreslený odhad). Toto označení má vystihnout výchozí podmínky krigování:

- odhadovaná hodnota je vypočtena jako lineární kombinace vstupních hodnot:

  $$\hat{z}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot z(x_i)$$

  kde pro váhy platí

  $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

- nezkreslený (nestranný) odhad značí, že průměrná chyba tohoto odhadu je rovna nule

  $$\sum (\hat{z}_i - z_i) = 0$$

- je minimalizován rozptyl odhadu

  $$\sum (\hat{z}_i - z_i)^2 = \min.$$

Pokud prostorově závislá náhodná kolísání nejsou překryta nekorelovaným šumem, potom může být semivariogram využit k určení vah λ_i potřebných pro interpolaci. Procedura je podobná jako v případě metody vážených klouzavých průměrů s tím rozdílem, že právě váhy jsou odhadnuty geostatistickými metodami. Váhy λ_i jsou zvoleny tak, aby odhad $\hat{z}(x_0)$ byl nestranný a odhad rozptylu σ_e^2 byl menší, než jakákoliv jiná lineární kombinace pozorovaných hodnot (minimální).

Přitom pro minimální rozptyl hodnot $\hat{z}(x_0)$ platí výraz :

$$\hat{\sigma}_e^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma(x_i, x_0) + \phi$$

kde:

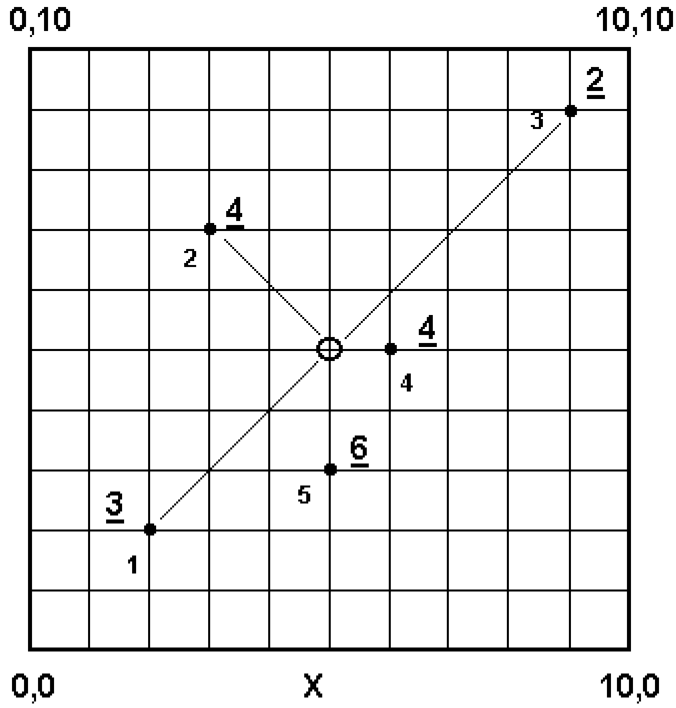
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma(x_i, x_j) + \phi = \gamma(x_j, x_0) \text{ pro všechna } j.$$

Hodnota $\gamma(x_i, x_j)$ je semivariance proměnné *z* mezi body x_i a x_j. Hodnota $\gamma(x_i, x_0)$ je semivariance proměnné *z* mezi bodem x_i a bodem x_0, pro který je hodnota proměnné *z* zjišťována. Obě hodnoty lze získat z vhodného teoretického modelu semivariogramu. Hodnota ϕ je tzv. Lagrangeův multiplikátor, který zajišťuje požadavek minimalizace odchylek a zároveň podmínku, že suma vah je rovna jedné.

Uvedená metoda se označuje jako **základní (ordinary) kriging** a je možné ji použít pro interpolaci v pravidelné mřížce hodnot, ke konstrukci map (např. izolinií).

PŘÍKLAD: Výpočet neznámé hodnoty v bodě metodou základního krigingu.

Na základě změřených hodnot veličiny *Z* v pěti bodech (*i=1,…, 5*) (viz. obrázek) máme za úkol odhadnout hodnotu *Z* bodě (*i=0*) o souřadnicích (*x=5, y=5*) metodou krigingu.



Obr. 1 Vstupní data pro lokální odhad metodou základního krigování (podtržená čísla značí hodnotu atributu v bodě)

Na základě předem provedené strukturní analýzy použijeme **sférický semivariogram.**

$$\gamma(h) = c_0 + c_1 * \left[\frac{3}{2}\frac{h}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^3 \right] \quad \text{……….. pro } h \le a$$

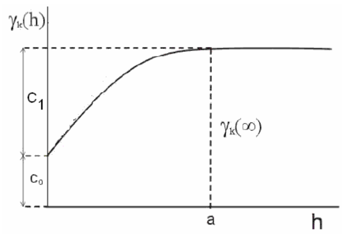
$$\gamma(h) = c_0 + c_1 \quad \text{……….. pro } h > a$$

Parametry použitého teoretického semivariogramu jsou:

c_0 = 2,5

c_1 = 7,5

a = 10,0 (dosah)



Data v pěti měřených bodech mají následující souřadnice

i	x	y	z
1	2	2	3
2	3	7	4
3	9	9	2
4	6	5	4
5	5	3	6

Pokud budeme dále značit:

A – matice semivariancí mezi všemi dvojicemi bodů

b – vektor semivariancí mezi všemi body a bodem predikovaným

λ – vektor vah jednotlivých bodů

Φ – tzv. Lagrangeův člen

potom základní vztah pro odhad metodou krigování lze psát jako:

$$A \cdot \lambda = b$$

Pro vlastní řešení je nutné vypočítat váhy λ, které musí splňovat podmínku $\sum \lambda = 1$
Uvedený základní vztah lze vyjádřit jako soustavu rovnic:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & . & . & . & \gamma_{1n} & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & . & . & . & \gamma_{2n} & 1 \\ . & . & & & & & . \\ . & . & & & & & .. \\ . & . & & & & & . \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & . & . & . & \gamma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_n \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \\ . \\ . \\ . \\ \gamma_{n0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

V tomto zápisu poslední řádek a poslední sloupec v první matici a hodnota Lagrangeova členu *Φ* jsou použity pro zajištění podmínky sumy vah $\sum \lambda = 1$. Hodnota Lagrangeova multiplikátoru *Φ* také slouží pro výpočet rozptylu odhadnuté hodnoty. Uvedená soustava rovnic nám poskytne hodnoty všech vah λ a hodnotu *Φ*. V maticovém zápisu lze tedy psát:

$$A^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} \lambda \\ \phi \end{bmatrix}$$

Aby bylo možné vyčíslit hodnoty semivariancí, je v prvním kroku zapotřebí vytvořit matici vzdáleností mezi datovými body:

i	1	2	3	4	5
1	0,000	5,099	9,899	5,000	3,162
2	5,099	0,000	6,325	3,606	4,472
3	9,899	6,325	0,000	5,000	7,211
4	5,000	3,606	5,000	0,000	2,236
5	3,162	4,472	7,211	2,236	0,000

Vektor vzdáleností mezi měřenými body a bodem predikovaným:

i	0
1	4,234
2	2,828
3	5,657
4	1,000
5	2,000

Těchto vzdáleností využijeme k výpočtu semivariancí pro sférický model semivariogramu s výše uvedenými parametry c_0 , c_1 , *a* – tedy k sestavení matice *A* a vektoru *b*:

Matice A:

i	1	2	3	4	5	6
1	2,500	7,739	9,999	7,656	5,939	1,000
2	7,739	2,500	8,667	6,381	7,196	1,000
3	9,999	8,667	2,500	7,656	9,206	1,000
4	7,656	6,381	7,656	2,500	4,936	1,000
5	5,939	7,196	9,206	4,936	2,500	1,000
6	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,000

Ve výše uvedené matici má řádek navíc (i=6) zajistit podmínku, že váhy budou mít sumu rovnu jedné.

Vektor *b*:

i	0
1	7,151
2	5,597
3	8,815
4	3,621
5	4,720
6	1,000

Inverzní matce A^{-1}:

i	1	2	3	4	5	6
1	-,172	,050	,022	-,026	,126	,273
2	,050	-,167	,032	,077	,007	,207
3	,022	,032	-,111	,066	-,010	,357
4	-,026	,077	,066	-,307	,190	,030
5	,126	,007	-,010	,190	-,313	,134
6	,273	,207	,357	,003	,134	-6,873

Řešením výše uvedené soustavy rovnic lze pro jednotlivé vzdálenosti získat hodnoty vah λ:

i	λ	
1	0,0175	
2	0,2281	
3	-0,0891	vypočtené hodnoty vah
4	0,6437	
5	0,1998	
6	0,1182	vypočtená hodnota *Φ*

Pro váhy *i=1,…5* platí, že jejich suma se rovná jedné, v posledním řádku je hodnota Lagrangeova členu *Φ*.

Vzdálenosti měřených bodů od bodu predikovaného, již přísluší výše určené váhy:

i	0
1	4,234
2	2,828
3	5,657
4	1,000
5	2,000

Potom odhad hodnoty Z v bodě (i=0) o souřadnicích (x=5, y=5):

$Z(x_{i=0}) = 0{,}0175*3+0{,}2281*4-0{,}0891*2+0{,}6437*4+0{,}1998*6 =$

$Z(x_{i=0}) = \mathbf{4{,}560}$

Rozptyl odhadu:

$\sigma_e^2 = [0{,}0175*7{,}151+0{,}2281*5{,}597-0{,}0891*8{,}815+0{,}6437*3621+0{,}1998*4{,}720]+ \varphi =$

$\sigma_e^2 = 3{,}890 + 0{,}1182 =$

$\sigma_e^2 = \mathbf{4{,}008}$