

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava  
Hornicko – geologická fakulta  
Institut geodézie a důlního měřictví

# **ZÁKLADNÍ SOUŘADNICOVÉ VÝPOČTY**

učební texty

**Autor : Ing. Václav Mikulénka, Ph.D.**

**Ostrava 2002**

# ZÁKLADNÍ SOUŘADNICOVÉ VÝPOČTY

## ÚVOD

Poloha bodů základního a podrobného bodového polohového pole se vyjadřuje pravoúhlými souřadnicemi v kartézském souřadnicovém systému, ve kterém je vybudována celá síť.

V České republice se používá obvykle souřadnicový systém S-JTSK. Výpočetní vzorce, které budou v dalších částech odvozeny, platí i pro jiný libovolně orientovaný místní souřadnicový systém, ve kterém budou dodrženy stejné zásady orientace os.

Základní souřadnicové výpočty můžeme rozdělit následujícím způsobem:

1. Dvě základní souřadnicové úlohy
2. Určování polohy bodů protínáním
3. Určování polohy bodů polygonometricky
4. Transformace souřadnic
5. Metoda trojúhelníkových řetězců
6. Další výpočty v souřadnicové síti
7. Kritéria přesnosti polohového bodového pole

# 1. Dvě základní souřadnicové úlohy

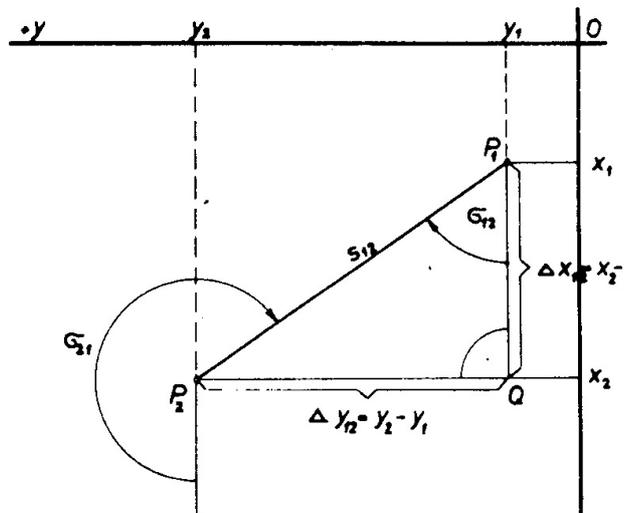
## 1.1 Prvá souřadnicová úloha

(Výpočet směrníku a délky strany)

Směrník je úhel, který svírá strana s kladným směrem osy x.

Dáno: Souřadnice bodů  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$

Určujeme: Směrník strany  $\sigma_{1,2}$ , délku strany  $S_{1,2}$



Obr. č. 1.1 Prvá a druhá souřadnicová úloha

Postup řešení:

Z obrázku vyplývá, že:

$$\operatorname{tg} \sigma_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y_{12}}{\Delta x_{12}}$$

$$\sigma_{12} = \operatorname{arctg} \frac{\Delta y_{12}}{\Delta x_{12}} = \operatorname{arctg} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} + 200^{\text{gon}}$$

Obecně platí, že  $\sigma_{ki} = \sigma_{ik} \pm 200^{\text{gon}}$

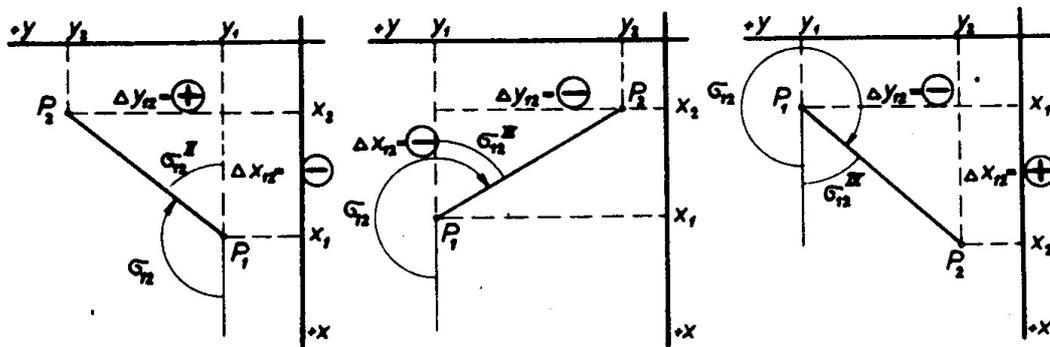
Směrník  $\sigma_{12}$  může být v libovolném kvadrantu. Leží-li v jiném kvadrantu než v I., pak podle výše uvedeného vztahu vypočteme ve skutečnosti tabulkové úhly  $\sigma_{12}^{II}$ ,  $\sigma_{12}^{III}$ ,  $\sigma_{12}^{IV}$ , z kterých pak vypočteme směrník  $\sigma_{12}$  podle vztahu:

$$\text{II. kv.} \quad \sigma_{12} = 200^{\text{gon}} - \sigma_{12}^{II}$$

$$\text{III. kv.} \quad \sigma_{12} = 200^{\text{gon}} + \sigma_{12}^{III}$$

$$\text{IV. kv.} \quad \sigma_{12} = 400^{\text{gon}} - \sigma_{12}^{IV}$$

Směrníky strany v různých kvadrantech ukazuje obr. č. 1.2.



Obr. č. 1.2 Směrníky stran v různých kvadrantech

O tom, ve kterém kvadrantu směrník  $\sigma_{12}$  leží, rozhoduje znaménko  $\text{tg} \sigma_{12}$  a dále znaménka souřadnicových rozdílů  $\Delta y_{12}$  (odpovídá  $\sin \sigma_{12}$ ) a  $\Delta x_{12}$  (odpovídá  $\cos \sigma_{12}$ ).

Platí jednoduchý přehled:

$$\text{tg} \sigma_{12} = \frac{\Delta y_{12}}{\Delta x_{12}} = \frac{\sin \sigma_{12}}{\cos \sigma_{12}} \quad \begin{array}{c|c|c|c} + & + & - & - \\ + & - & - & + \\ \hline \text{I.kv.} & \text{II.kv.} & \text{III.kv.} & \text{IV.kv.} \end{array}$$

Délku strany  $s_{1,2}$  vypočteme ze vztahů:

$$s_{12} = \frac{\Delta y_{12}}{\sin \sigma_{12}} = \frac{\Delta x_{12}}{\cos \sigma_{12}} = \sqrt{\Delta y_{12}^2 + \Delta x_{12}^2}$$

$$s_{12} = \frac{y_2 - y_1}{\sin \sigma_{12}} = \frac{x_2 - x_1}{\cos \sigma_{12}} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

*Poznámka: ze souřadnic vypočteme vždy délku vodorovnou.*

## **1.2 Druhá souřadnicová úloha**

### **1.2.1 Výpočet souřadnic bodu**

Dáno: souřadnice bodu  $P_1(x_1, y_1)$ , strana  $s_{12}$ , směrnik strany  $\sigma_{12}$

Určujeme: souřadnice bodu  $P_2$

Postup řešení:

Podle obr. č. 1.1 lze napsat:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \Delta y_{12} \\ x_2 &= x_1 + \Delta x_{12} \end{aligned}$$

kde:

$$\begin{aligned} \Delta y_{12} &= s_{12} \cdot \sin \sigma_{12} \\ \Delta x_{12} &= s_{12} \cdot \cos \sigma_{12} \end{aligned}$$

konečný tvar navíc má tvar:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + s_{12} \cdot \sin \sigma_{12} \\ x_2 &= x_1 + s_{12} \cdot \cos \sigma_{12} \end{aligned}$$

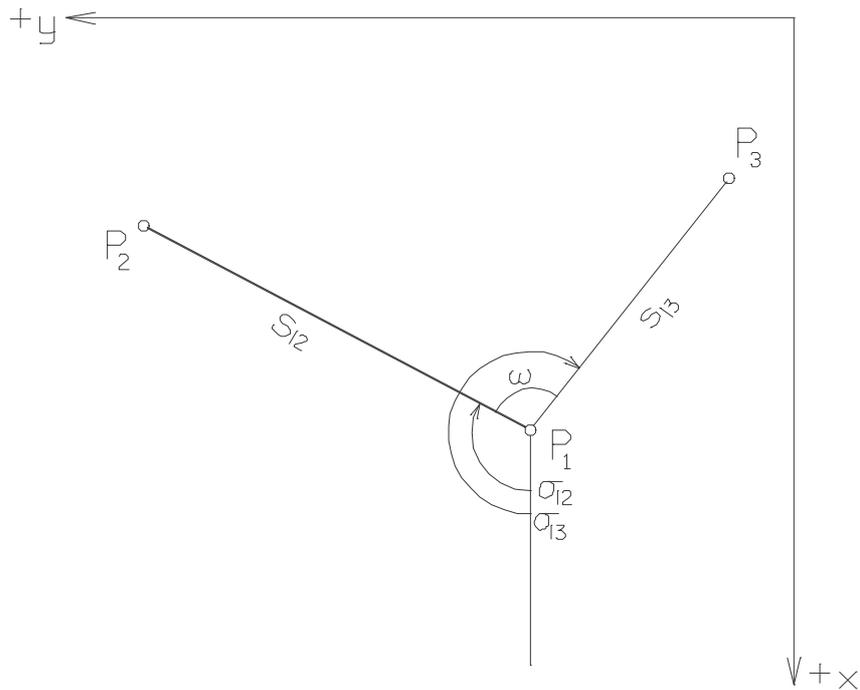
V praxi bývá toto zadání do jisté míry odlišné – viz kapitoly 1.2.2 a 1.2.3.

### **1.2.2 Výpočet koncového bodu rajonu určeného polární metodou**

Dáno: souřadnice bodů  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$

Zaměřeno: úhel  $\omega$ , délka strany  $s_{13}$

Určujeme: souřadnice bodu  $P_3$



Obr. č. 1.2.2.1 Výpočet rajonu určeného polární metodou

Postup řešení:

$$\sigma_{12} = \operatorname{arctg} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{12} + \omega$$

$$y_3 = y_1 + s_{13} \cdot \sin \sigma_{13}$$

$$x_3 = x_1 + s_{13} \cdot \cos \sigma_{13}$$

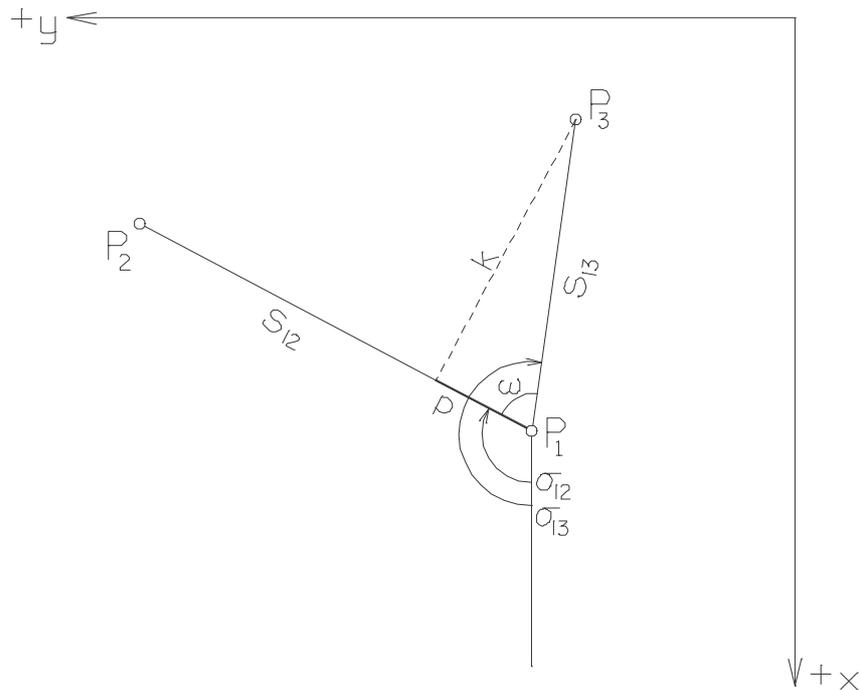
### 1.2.3 Výpočet koncového bodu rajonu určeného ortogonální metodou

Dáno: souřadnice bodů  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$

Zaměřeno: délky stran  $p$ ,  $k$

Určujeme: souřadnice bodu  $P_3$

Postup řešení: výpočet je převeden na výpočet bodu určeného polární metodou.



Obr. č. 1.2.3.1 Výpočet rajonu určeného ortogonální metodou

$$\sigma_{12} = \operatorname{arctg} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\omega = \operatorname{arctg} \frac{k}{p}$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{12} + \omega$$

$$s_{13} = \frac{k}{\sin \omega} = \frac{p}{\cos \omega} = \sqrt{k^2 + p^2}$$

$$y_3 = y_1 + s_{13} \cdot \sin \sigma_{13}$$

$$x_3 = x_1 + s_{13} \cdot \cos \sigma_{13}$$

## 2. Určování polohy bodů protínáním

Určuje-li se poloha bodů z bodů známých - jde o protínání vpřed; určuje-li se poloha bodů neznámých záměrami na body známé - jedná se o protínání zpět. Podle měřených parametrů (úhlů nebo délek) rozlišujeme protínání úhlové nebo délkové.

### 2.1 Protínání vpřed

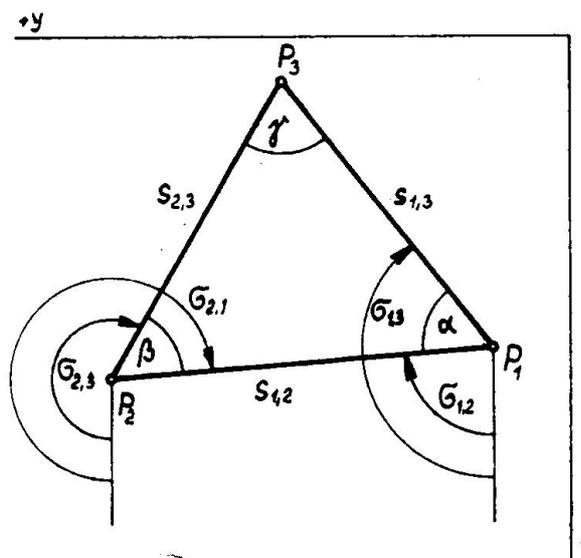
#### 2.1.1 Protínání vpřed z úhlů

Dáno: souřadnice bodů  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$

Zaměřeno: úhly  $\alpha$ ,  $\beta$  na bodech  $P_1$ ,  $P_2$

Určujeme: souřadnice bodu  $P_3(x_3, y_3)$

Postup řešení:



Obr. č. 2.1.1.1 Protínání vpřed z úhlů

$$1) \quad \sigma_{12} = \arctg \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} \pm 200^{gon}$$

$$\gamma = 200^{gon} - (\alpha + \beta)$$

2) Souřadnice bodu  $P_3$  lze určit dvojím nezávislým způsobem, a to z bodů  $P_1$  a  $P_2$

$$\sigma_{13} = \sigma_{12} + \alpha$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{21} - \beta$$

$$s_{13} = \frac{s_{12}}{\sin \gamma} \cdot \sin \beta$$

$$s_{23} = \frac{s_{12}}{\sin \gamma} \cdot \sin \alpha$$

$$s_{13} = \frac{s_{12} \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad s_{23} = \frac{s_{12} \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$3) \quad \Delta y_{13} = s_{13} \cdot \sin \sigma_{13} \quad \Delta y_{23} = s_{23} \cdot \sin \sigma_{23}$$

$$\Delta x_{13} = s_{13} \cdot \cos \sigma_{13} \quad \Delta x_{23} = s_{23} \cdot \cos \sigma_{23}$$

$$y_3 = y_1 + s_{13} \cdot \sin \sigma_{13} \quad y_3 = y_2 + s_{23} \cdot \sin \sigma_{23}$$

$$x_3 = x_1 + s_{13} \cdot \cos \sigma_{13} \quad x_3 = x_2 + s_{23} \cdot \cos \sigma_{23}$$

*Poznámka:* Je-li možno provést zaměření všech tří úhlů ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) porovnáme rozdíl jejich součtu od  $200^{\text{gon}}$  a do výpočtu zavedeme úhly opravené o třetinu zjištěné odchylky.

Z hlediska přesnosti určení polohy bodu  $P_3$  je nejvhodnější, aby určovací trojúhelník byl přibližně rovnostranný.

### 2.1.2 Protínání vpřed z orientovaných směrů

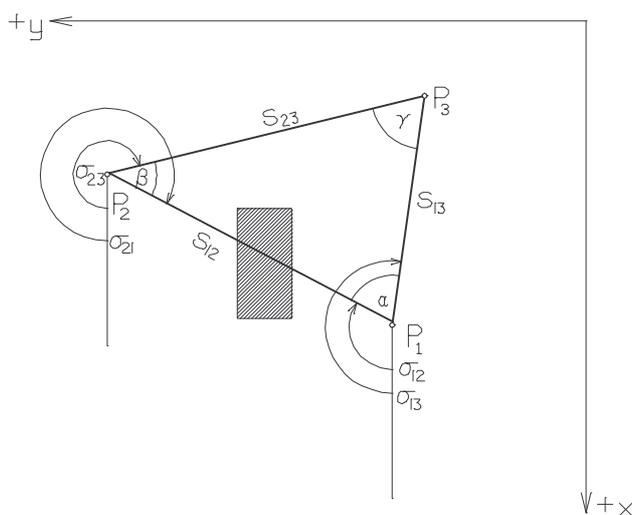
Mezi body  $P_1$ ,  $P_2$  není možná záměra (nelze přímo změřit úhly  $\alpha$ ,  $\beta$ ).

Dáno: souřadnice bodů  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$

souřadnice orientačních bodů (např.  $A$ ,  $B$ )

Zaměřeno: orientační úhly  $\omega$

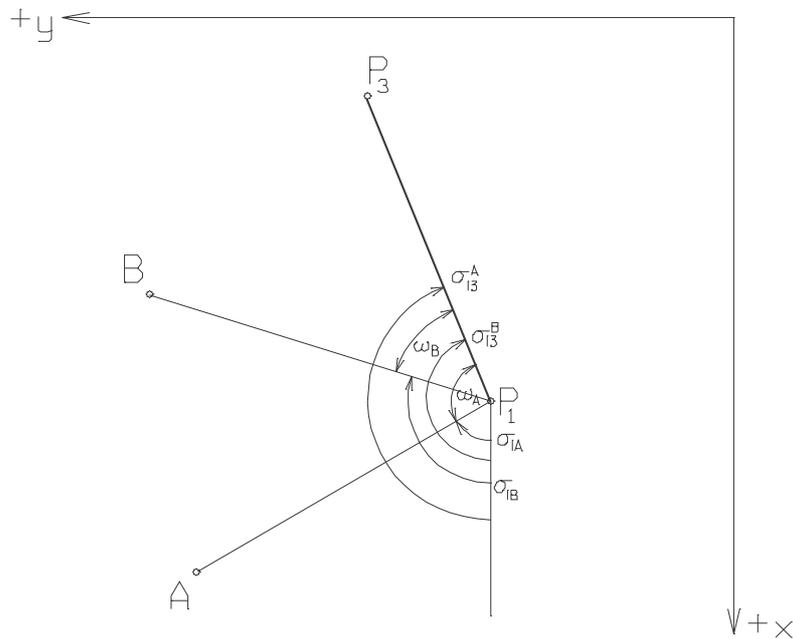
Určujeme: souřadnice bodu  $P_3$



Obr. č. 2.1.2.1 Protínání vpřed ze směrů

Postup řešení:

1) Určení orientovaných směrů  $\sigma_{13}$  a  $\sigma_{23}$  na bodech  $P_1$  a  $P_2$



Obr. č. 2.1.2.2 Orientace směrů

Z obr. č. 2.1.2.2 vyplývá, že:

$$\sigma_{13}^A = \sigma_{1A} + \omega_A$$

$$\sigma_{13}^B = \sigma_{1B} + \omega_B$$

$$\sigma_{13} = \frac{\sigma_{13}^A + \sigma_{13}^B}{2}$$

obecně:

$$\sigma_{13} = \frac{[\sigma_{13}^i]_A^N}{r}$$

kde  $r$  je celkový počet orientovaných směrů na bod  $P_3$ .

Směrníky  $\sigma_{1A}$ ,  $\sigma_{1B}$  se vypočtou ze souřadnic bodů  $P_1$ ,  $A$ ,  $B$ .

Analogicky se vypočte orientovaný směr  $\sigma_{23}$  z bodu  $P_2$ .

$$2) \quad \alpha = \sigma_{13} - \sigma_{12}$$

$$\beta = \sigma_{2,1} - \sigma_{2,3}$$

3) Další postup je shodný jako v protínání vpřed z úhlů.

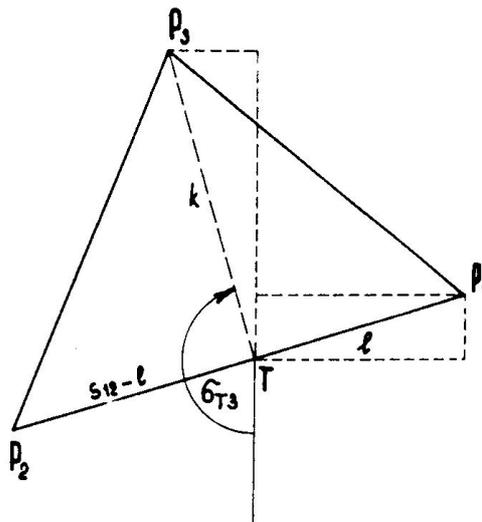
*Poznámka:* Dalším možným řešením je vypočítat souřadnice bodu  $P_3$  jako průsečík dvou přímk, které prochází body  $P_1$  a  $P_2$  přičemž jejich směry  $\sigma_{13}$  a  $\sigma_{23}$  jsou známy.

### 2.1.3 Protínání vpřed z měřených délek

Dáno: souřadnice bodů  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$

Zaměřeno: délky  $S_{13}$ ,  $S_{23}$

Určujeme: souřadnice bodu  $P_3$



Obr. č. 2.1.3.1 Protínání vpřed z měřených délek

Postup řešení:

1) Převedením na protínání vpřed z úhlů:

$$\operatorname{tg} \sigma_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad s_{12} = \frac{y_2 - y_1}{\sin \sigma_{12}} = \frac{x_2 - x_1}{\cos \sigma_{12}}$$

Ze známých vzorců v trojúhelníku vypočteme:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s - s_{13})(s - s_{12})}{s(s - s_{23})}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s - s_{23})(s - s_{12})}{s(s - s_{13})}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s - s_{23})(s - s_{13})}{s(s - s_{12})}}$$

$$2s = s_{12} + s_{23} + s_{13}$$

nebo použijeme kosinových vět:

$$\cos \alpha = \frac{s_{12}^2 + s_{13}^2 - s_{23}^2}{2s_{12} \cdot s_{13}}$$

$$\cos \beta = \frac{s_{12}^2 + s_{23}^2 - s_{13}^2}{2s_{12} \cdot s_{23}}$$

$$\cos \gamma = \frac{s_{13}^2 + s_{23}^2 - s_{12}^2}{2s_{13} \cdot s_{23}}$$

musí platit  $\alpha + \beta + \gamma = 2R$

b) Výpočtem z měřených délek

Dle obr. č. 2.1.3.1 platí:

$$\ell^2 + k^2 = s_{13}^2 \qquad (s_{12} - \ell)^2 + k^2 = s_{23}^2$$

$$\ell = \frac{s_{12}^2 + s_{13}^2 - s_{23}^2}{2s_{12}} \quad k^2 = \sqrt{s_{13}^2 - \ell^2} \quad \sigma_{1T} = \sigma_{12}$$

Souřadnice bodu  $T$  se vypočtou ze vztahů:

$$\begin{aligned} x_T &= x_1 + \ell \cdot \cos \sigma_{12} \\ y_T &= y_1 + \ell \cdot \sin \sigma_{12} \end{aligned}$$

Souřadnice bodu  $P_3$  se určí z bodu  $T$ :

$$x_3 = x_T + k \cdot \cos \sigma_{T3} \quad y_3 = y_T + k \cdot \sin \sigma_{T3}$$

$$x_3 = x_T + \ell \cdot \cos \sigma_{12} + k \cdot \cos \sigma_{T3}$$

$$y_3 = y_T + \ell \cdot \sin \sigma_{12} + k \cdot \sin \sigma_{T3}$$

protože platí, že  $\sigma_{T3} = \sigma_{12} + 100^{\text{gon}}$ ,

takže:  $\sin \sigma_{T3} = \cos \sigma_{12}$   $\cos \sigma_{T3} = -\sin \sigma_{12}$

mají rovnice pro výpočet souřadnice bodu  $P_3$  tvar:

$$x_3 = x_1 + \ell \cdot \cos \sigma_{12} - k \cdot \sin \sigma_{12}$$

$$y_3 = y_1 + \ell \cdot \sin \sigma_{12} + k \cdot \cos \sigma_{12}$$

Po dosazení vztahů:

$$\sin \sigma_{12} = \frac{\Delta x_{12}}{s_{12}} \quad \cos \sigma_{12} = \frac{\Delta y_{12}}{s_{12}}$$

Ize souřadnice bodu  $P_3$  vypočíst z rovnic:

$$x_3 = x_1 + \frac{\ell \cdot \Delta y_{12} - k \cdot \Delta x_{12}}{s_{12}} \quad y_3 = y_1 + \frac{\ell \cdot \Delta x_{12} - k \cdot \Delta y_{12}}{s_{12}}$$

kontrolně:

$$s_{13}^2 = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

## 2.2 Protínání zpět

(Úloha Sneliova, Pothenotova)

Dáno: souřadnice nepřístupných bodů  $P_1, P_2, P_3$ .

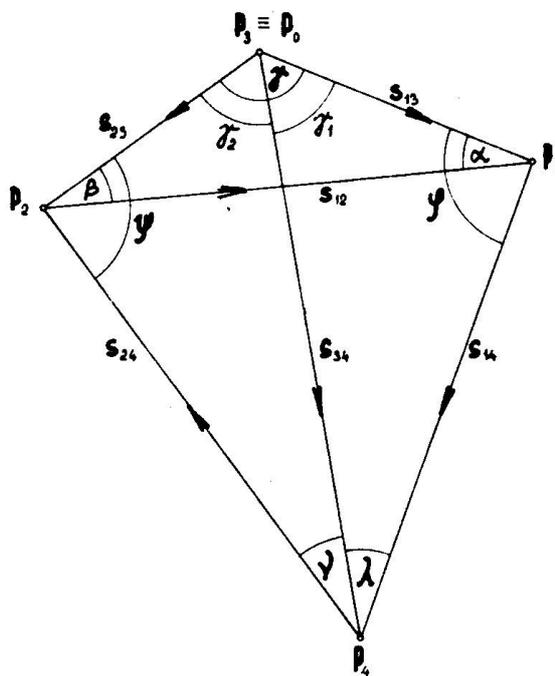
Zaměřeno úhly  $\lambda, \nu$  na hledaném bodě  $P_4$ .

Určujeme: souřadnice bodu  $P_4$

Řešení:

- Lze využít některou z následujících variant
- Využitím pomocného úhlu  $\mu$
- Cassiniho řešení
- Pomocí Collinsova bodu

### 2.2.1 Využití pomocného úhlu $\mu$



Obr. č. 2.2.1.1 Protínání zpět

Postup řešení:

- Vypočteme směrníky  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{21}$ ,  $\sigma_{23}$ ,  $\sigma_{32}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{31}$  a délky stran  $s_{12}$ ,  $s_{13}$ ,  $s_{23}$  dle I. geodetické úlohy

$$\sigma_{12} = \operatorname{arctg} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad s_{12} = \frac{y_2 - y_1}{\sin \sigma_{12}} = \frac{x_2 - x_1}{\cos \sigma_{12}}$$

$$\alpha = \sigma_{13} - \sigma_{12} \qquad \beta = \sigma_{21} - \sigma_{23} = \sigma_{12} - \sigma_{23} \pm 200^{\text{gon}}$$

$$\gamma = \sigma_{32} - \sigma_{31} = \sigma_{23} - \sigma_{13}$$

- Výpočet úhlů  $\varphi$ ,  $\psi$

Ve čtyřúhelníku  $P_1, P_2, P_3, P_4$  platí:

$$\varphi + \psi = 400^{\text{gon}} - (\gamma + \lambda + \nu)$$

Dle obecné sinové věty pro pól  $P_0$ , který je totožný s bodem  $P_3$  platí

$$\sin \varphi \cdot \sin \nu \cdot \sin \beta = \sin \psi \cdot \sin \alpha \cdot \sin \lambda$$

tedy

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \lambda}{\sin \beta \cdot \sin \nu}$$

tuto číselnou hodnotu položíme rovnou tangentě pomyslného úhlu  $\mu$ ,

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \operatorname{tg} \mu$$

Uvedený vztah můžeme určit i pomocí sinové věty:

$$S_{34} = S_{23} \cdot \frac{\sin \psi}{\sin \nu} = S_{13} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \lambda}$$

a odtud

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{S_{23}}{S_{13}} \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin \nu} = \operatorname{tg} \mu$$

Z této rovnice je možno odvodit druhou potřebnou rovnici pro výpočet úhlů  $\varphi$  a  $\psi$

Vztah tvaru  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  lze upravit na  $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$

Rovnici  $\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \operatorname{tg} \mu$  upravíme  $\frac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \varphi + \sin \psi} = \frac{\operatorname{tg} \mu - 1}{\operatorname{tg} \mu + 1}$

Levou stranu upravíme podle součtových pouček a za 1 dosadíme  $\operatorname{tg} 50^{\text{gon}}$ .

$$\frac{2 \sin \frac{\varphi - \psi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi + \psi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi - \psi}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \mu - \operatorname{tg} 50^{\text{gon}}}{1 + \operatorname{tg} \mu \cdot \operatorname{tg} 50^{\text{gon}}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \operatorname{tg} (\mu - 50^{\text{gon}})$$

Budeme-li znát  $\frac{\varphi + \psi}{2} = p$  a  $\frac{\varphi - \psi}{2} = q$

Pak  $\varphi = p + q$   $\psi = p - q$

Po výpočtu úhlů  $\varphi$  a  $\psi$ , určíme úhly  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$

$$\gamma_1 = 200^{\text{gon}} - (\varphi + \lambda) \quad \gamma_2 = 200^{\text{gon}} - (\psi + \nu)$$

Ze sinových vět určíme délky stran a jejich směrníky

$$s_{14} = \frac{s_{13}}{\sin \lambda} \cdot \sin \gamma_1, \quad s_{24} = \frac{s_{23}}{\sin \nu} \cdot \sin \gamma_2$$

$$s_{34} = \frac{s_{13}}{\sin \lambda} \cdot \sin \varphi = \frac{s_{23}}{\sin \nu} \cdot \sin \psi$$

$$\sigma_{14} = \sigma_{13} - \varphi \quad \sigma_{24} = \sigma_{23} + \psi$$

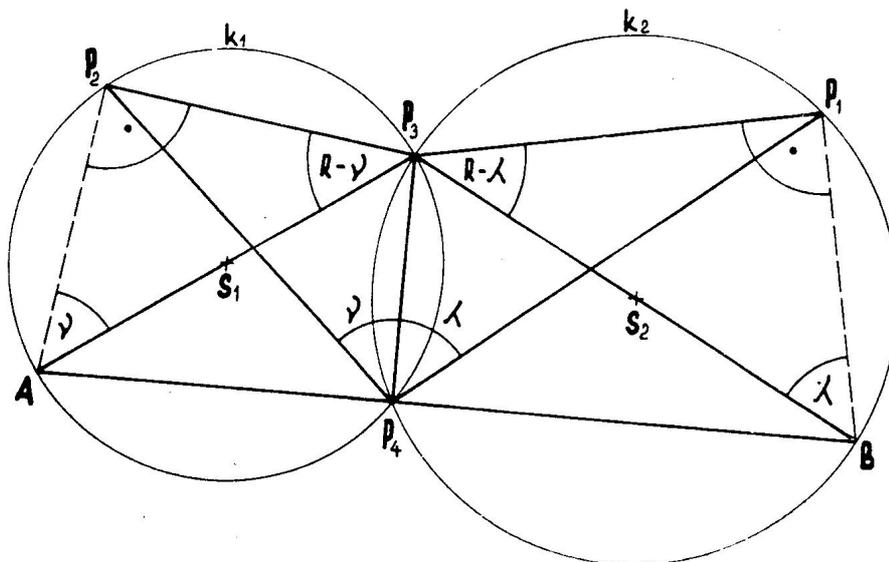
$$\sigma_{34} = \sigma_{31} + \gamma_1 = \sigma_{32} - \gamma_2$$

Druhou souřadnicovou úlohou určíme souřadnice hledaného bodu  $P_4$  ze všech tří známých bodů.

$$\begin{aligned} y_4 &= y_1 + s_{14} \cdot \sin \sigma_{14} & x_4 &= x_1 + s_{14} \cdot \cos \sigma_{14} \\ y_4 &= y_2 + s_{24} \cdot \sin \sigma_{24} & x_4 &= x_2 + s_{24} \cdot \cos \sigma_{24} \\ y_4 &= y_3 + s_{34} \cdot \sin \sigma_{34} & x_4 &= x_3 + s_{34} \cdot \cos \sigma_{34} \end{aligned}$$

### 2.2.2 Cassiniho řešení

Cassiniho řešení určuje bod  $P_4$  jako průsečík kružnic  $k_1$  a  $k_2$ . Kružnice  $k_1$  a  $k_2$  se středy  $S_1$  a  $S_2$  sestrojíme pomocí obvodových úhlů  $\lambda$  a  $\nu$  nad tětivami  $S_{13}$  a  $S_{23}$ . Průměry  $P_3 S_1$  a  $P_3 S_2$  protnou obě kružnice v bodech  $A$  a  $B$ . Body  $A$ ,  $B$  a  $P_4$  budou ležet na přímce, protože úhel  $P_3 P_4 A$  a úhel  $P_3 P_4 B$  jsou úhly pravé (obvodové úhly nad průměrem jsou pravé).



Obr. č. 2.2.2.1 Řešení protínání zpět Cassiniho postupem.

Postup řešení:

Vypočteme souřadnice bodů  $A$  a  $B$

$$y_A - y_2 = S_{A2} \cdot \sin \sigma_{2A} \quad x_A - x_2 = S_{A2} \cdot \cos \sigma_{2A}$$

Dle obr. 2.2.2.1 platí:

$$S_{2A} = S_{23} \cdot \cot g \nu \quad \sigma_{2A} = \sigma_{23} + R$$

Po dosazení obdržíme:

$$y_A - y_2 = S_{23} \cdot \cos \sigma_{23} \cdot \cot g \nu$$

$$x_A - x_2 = -S_{23} \cdot \sin \sigma_{23} \cdot \cot g \nu$$

$$y_A - y_2 = (x_3 - x_2) \cdot \cot g \nu$$

$$x_A - x_2 = -(y_3 - y_2) \cdot \cot g \nu$$

Pro souřadnice bodu  $B$  obdobně bude platit

$$y_B - y_1 = (x_1 - x_3) \cdot \cot g \lambda \quad x_B - x_1 = -(y_1 - y_3) \cdot \cot g \lambda$$

Souřadnice bodu  $P_4$  vypočteme jako průsečík přímek  $\overline{AB}$  a  $\overline{P_3P_4}$ .

Přímky mají rovnice

$$y_4 - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x_4 - x_A)$$

Protože směr  $\overline{P_3P_4}$  je kolmý na  $\overline{AB}$  platí  $\operatorname{tg} \sigma_{34} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \sigma_{AB}}$

Proto rovnice druhé přímky je  $y_4 - y_3 = -\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} (x_4 - x_3)$

Pro kontrolu vypočteme směrníky  $\sigma_{42}, \sigma_{43}, \sigma_{41}$  a z nich úhly  $\nu$  a  $\lambda$ , které musí souhlasit s měřeními.

$$\nu = \sigma_{43} - \sigma_{42} \quad \lambda = \sigma_{41} - \sigma_{43}$$

Pokud body  $P_1, P_2, P_3, P_4$  leží na kružnici, nemá úloha řešení, jedná se o tzv. nebezpečnou kružnici.

### 2.2.3 Řešení pomocí Collinsova bodu

Autor řešení převedl na dvojitě protínání vpřed.

Postup řešení:

Collinsov bod  $C$  leží na kružnici opsané bodům  $P_1, P_2, P_4$  a na prodloužené straně  $P_3, P_4$ . Jeho souřadnice určíme protínáním vpřed z bodů  $P_1, P_2$  a úhlů  $\lambda, \nu$  (obvodové úhly proti týmž tětivám jsou stejné – proti tětivě  $P_1C$  úhel  $\lambda$  a proti  $P_2C$  úhel  $\nu$ ).

Z daných bodů  $P_1, P_2, P_3$  a souřadnic Collinsova bodu určíme směrníky  $\sigma_{C,1}, \sigma_{C,2}, \sigma_{C,3}$ , ze kterých vypočteme úhly  $\varphi$  a  $\psi$ :

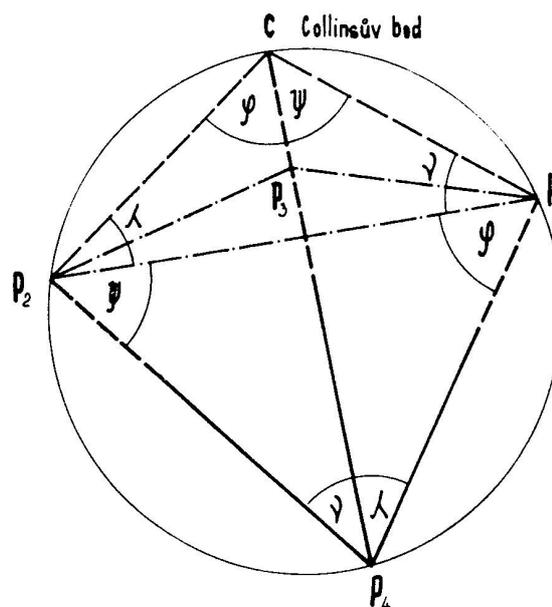
$$\varphi = \sigma_{C,2} - \sigma_{C,3}$$

a

$$\psi = \sigma_{C,3} - \sigma_{C,1}$$

Potom dalším protínáním vpřed ze základny  $P_1, P_2$  určíme souřadnice bodu  $P_4$ .

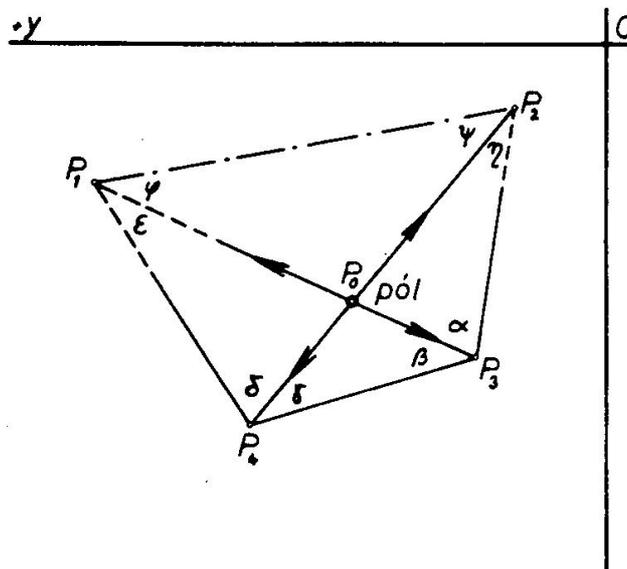
Řešení není možné, leží-li body  $P_4, P_1, P_2$  v jedné přímce. V tomto případě se jedná o tzv. nebezpečnou přímku.



Obr. č. 2.2.3.1 Řešení protínání zpět Collinsovým bodem.

### 2.3 Hansenova úloha

(Současné určení souřadnic dvou nepřístupných bodů).



Obr. č. 2.3.1 Hansenova úloha

Dáno: souřadnice nepřístupných bodů  $P_1, P_2$

Zaměřeno: úhly  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

Určujeme: souřadnice bodů  $P_3, P_4$

Postup řešení:

Body  $P_3, P_4$  se určí dvojitým protínáním vpřed z bodů  $P_1, P_2$ .

Výpočet úhlů  $\varepsilon, \eta$

$$\varepsilon = 200^{\text{gon}} - (\beta + \gamma + \delta)$$

$$\eta = 200^{\text{gon}} - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Výpočet úhlů  $\varphi, \psi$

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = 200^{\text{gon}} - \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \eta}{2}$$

nebo také

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2}$$

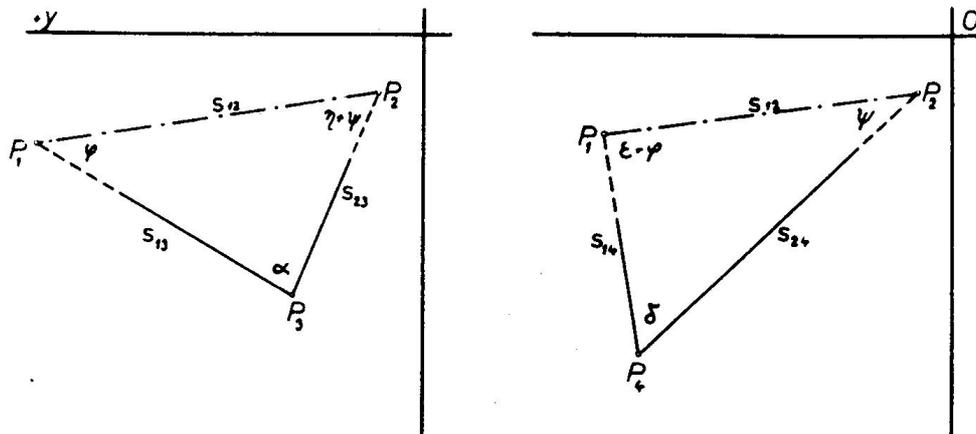
Z obecné věty sinové pro pól v průsečíku úhlopříček platí:

$$\frac{\sin \varphi \cdot \sin \eta \cdot \sin \beta \cdot \sin \delta}{\sin \psi \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \sin \varepsilon} = 1$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \sin \varepsilon}{\sin \beta \cdot \sin \delta \cdot \sin \eta} = \operatorname{tg} \mu$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg}(\mu - 50^{\text{gon}}) \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2}$$

Obdobně jako u protínání zpět vypočteme úhly  $\varphi, \psi$ . Ze dvou protínání vpřed můžeme určit souřadnice bodů  $P_3$  a  $P_4$ . Viz obr. č. 2.3.2.



Obr. č. 2.3.2 Dvě úlohy protínání vpřed z Hansenovy úlohy.

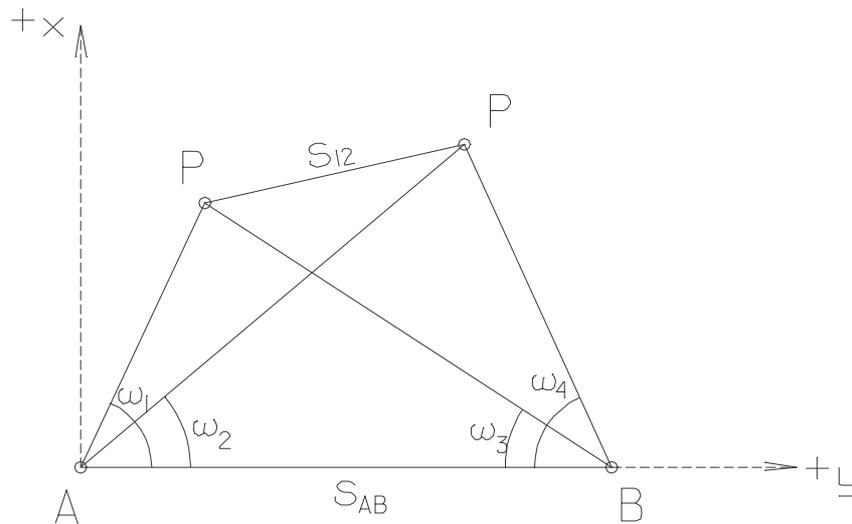
#### 2.4 Určení nepřístupné vzdálenosti Krasovského metodou

Metodu lze využít potřebujeme-li určit vzájemnou vzdálenost dvou nepřístupných bodů  $P_1, P_2$  jejich souřadnice neznáme.

Dáno: nepřístupné body  $P_1, P_2$  o neznámých souřadnicích

Měříme: úhly  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ , délku základny  $S_{AB}$

Určujeme: délku  $S_{12}$



Obr. č. 2.4.1 Určení nepřístupné vzdálenosti

Postup řešení:

Využijeme pomocnou základnu  $A, B$ , kterou zvolíme pokud možno rovnoběžně s nepřístupnou délkou a v takové vzdálenosti, aby úhly  $\omega_1$  až  $\omega_4$  nebyly příliš ostré ani tupé. Délku základny změříme.

Výpočet provádíme v pomocné souřadnicové soustavě  $x, y$ . Úloha se rozpadá na určení polohy bodů  $P_1, P_2$  v této souřadnicové soustavě, kde:

$$y_A = 0 \quad y_B = S_{AB} \quad x_A = 0 \quad x_B = 0$$

Protínáním vpřed z úhlů v trojúhelnících  $ABP_1, ABP_2$  vypočteme souřadnice bodů  $P_1, P_2$  a následně vzdálenost  $S_{12}$

$$S_{12} = \sqrt{\Delta x_{12}^2 + \Delta y_{12}^2}$$

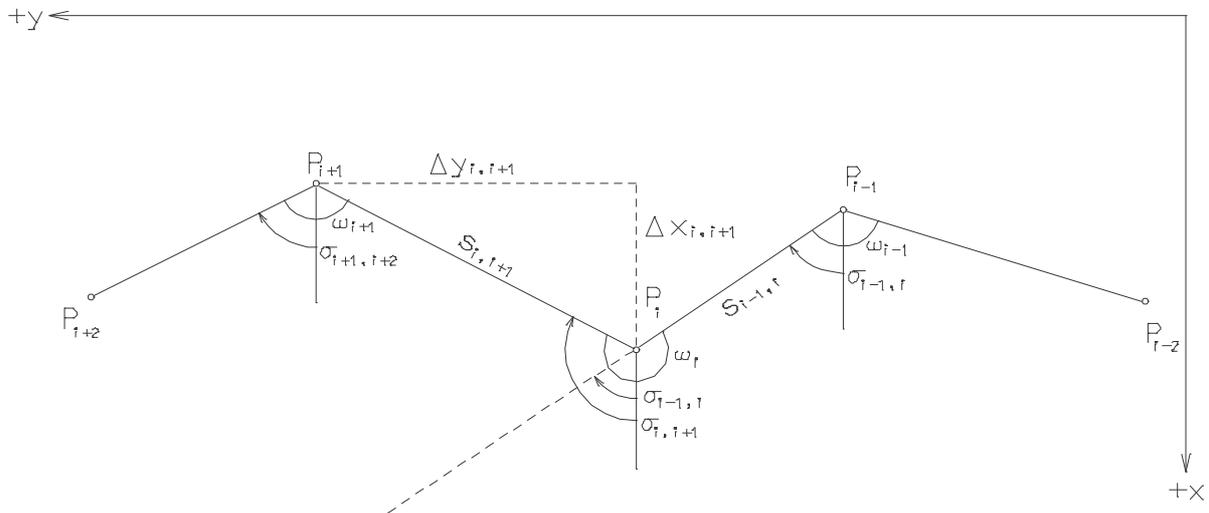
### **3. Určování polohy bodů polygonometricky**

Jednou z nejdůležitějších metod určení souřadnic bodů podrobného bodového pole je metoda polygonových pořadů.

Postupným zaměřováním levostranných vrcholových úhlů ( $\omega$ ) a délek ( $s$ ) propojujeme nové a dané body do určitého celku polygonového pořadu.

### 3.1 Princip výpočtu

Spočívá v řešení vztahů mezi polárními a pravouhlými souřadnicemi dle obr. č. 3.1.1. Jedná se tedy o využití druhé geodetické úlohy.



Obr. č. 3.1.1 Určování polohy bodů polygonometricky

Známe-li souřadnice bodu  $P_i(x_i, y_i)$  a směrnik strany předcházející  $\sigma_{i-1, i}$  můžeme ze změřeného úhlu  $\omega_i$  a délky strany  $s_{i, i+1}$  vypočíst souřadnice bodu  $P_{i+1}$

$$y_{i+1} = y_i + s_{i, i+1} \cdot \sin \sigma_{i, i+1}$$

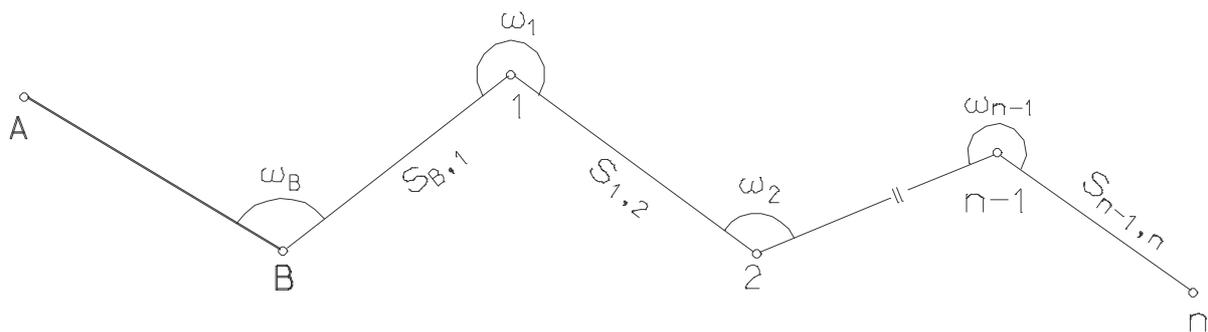
$$x_{i+1} = x_i + s_{i, i+1} \cdot \cos \sigma_{i, i+1}$$

kde  $\sigma_{i, i+1} = \sigma_{i-1, i} + \omega_i - 200^{gon}$  když  $\sigma_{i-1, i} + \omega > 200^{gon}$

nebo  $\sigma_{i, i+1} = \sigma_{i-1, i} + \omega_i + 200^{gon}$  když  $\sigma_{i-1, i} + \omega < 200^{gon}$

Obecný postup řešení:

Mějme dva známé body  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$  a další po sobě následující body **1 2, 3 ... n** – obr. č. 3.1.2.



Obr. č. 3.1.2 Polygonový pořad

Měřením určíme vrcholové úhly  $\omega_B$  až  $\omega_{n-1}$  a vodorovné délky  $S_{B1}$  až  $S_{n-1,n}$ .

Nejprve stanovíme směrnik  $\sigma_{AB}$  výchozí strany  $AB$ .

$$\sigma_{AB} = \arctg \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Směrníky dalších stran vypočteme ze vztahů:

$$\sigma_{B1} = \sigma_{AB} + \omega_B - 200^{gon}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{B1} + \omega_1 - 200^{gon}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{12} + \omega_2 - 200^{gon}$$

⋮

$$\sigma_{n-1,n} = \sigma_{n-2,n-1} + \omega_{n-1} - 200^{gon}$$

Kontrola je 
$$\sigma_{n-1,n} = \sigma_{AB} + [\omega]_B^{n-1} - k \cdot 200^{gon}$$

Pro souřadnice bude platit:

$$y_1 = y_B + s_{B1} \cdot \sin \sigma_{B1}$$

$$x_1 = x_B + s_{B1} \cdot \cos \sigma_{B1}$$

$$y_2 = y_1 + s_{12} \cdot \sin \sigma_{12}$$

$$x_2 = x_1 + s_{12} \cdot \cos \sigma_{12}$$

$$y_3 = y_2 + s_{23} \cdot \sin \sigma_{23}$$

$$x_3 = x_2 + s_{23} \cdot \cos \sigma_{23}$$

⋮

$$y_n = y_{n-1} + s_{n-1,n} \cdot \sin \sigma_{n-1,n}$$

$$x_n = x_{n-1} + s_{n-1,n} \cdot \cos \sigma_{n-1,n}$$

kontrola:

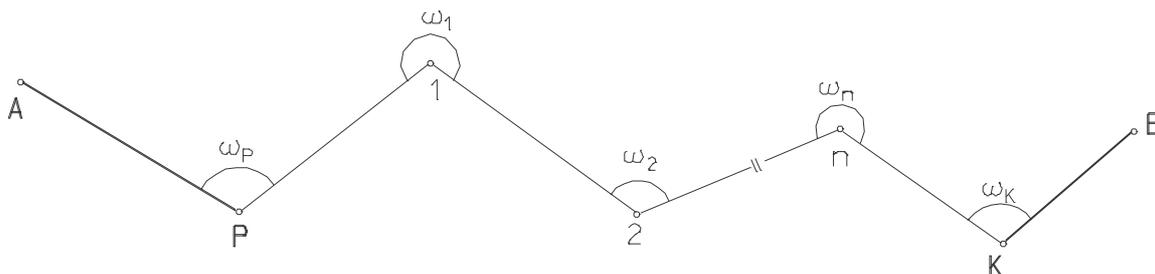
$$y_n = y_B + [s \cdot \sin \sigma]_{B1}^{n-1,n}$$

$$x_n = x_B + [s \cdot \cos \sigma]_{B1}^{n-1,n}$$

### 3.2 Druhy polygonových pořadů

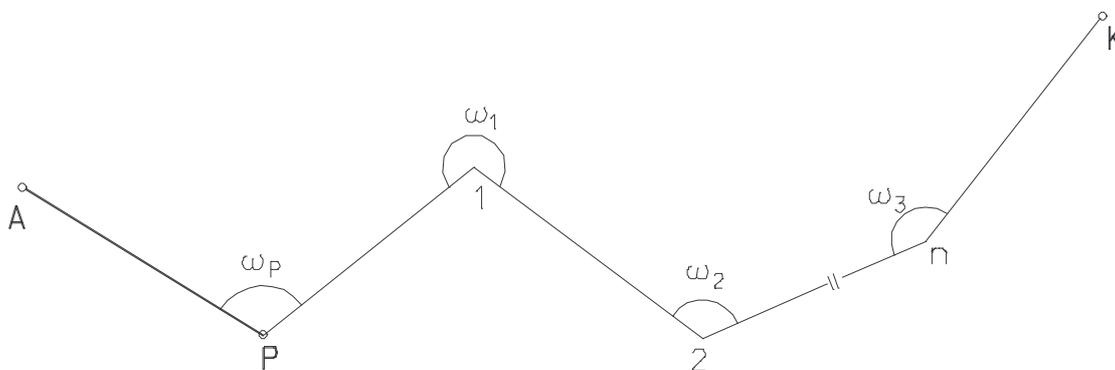
Podle tvaru rozdělujeme polygonové pořady na otevřené (obr. č. 3.2.1) a uzavřené (obr. č. 3.2.2). Podle způsobu připojení ke stávajícím bodům rozlišujeme tyto typy:

1. Polygonový pořad oboustranně připojený a orientovaný (vetknutý), který začíná a končí na známých stranách daných body  $P, A$  a  $K, B$ .



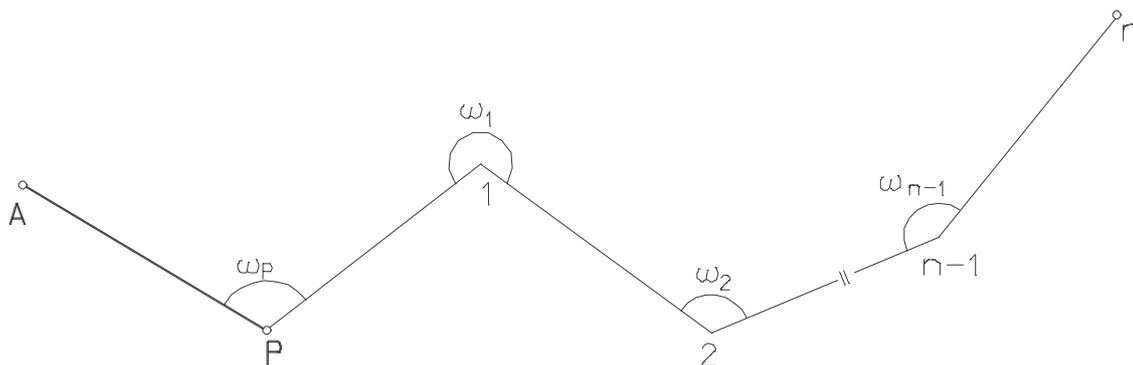
Obr. č. 3.2.1 Polygonový pořad oboustranně připojený orientovaný

2. Polygonový pořad oboustranně připojený a jednostranně orientovaný (vetknutý). Tento pořad začíná na známé straně dané body  $P, A$  a končí v bodě  $K$ .



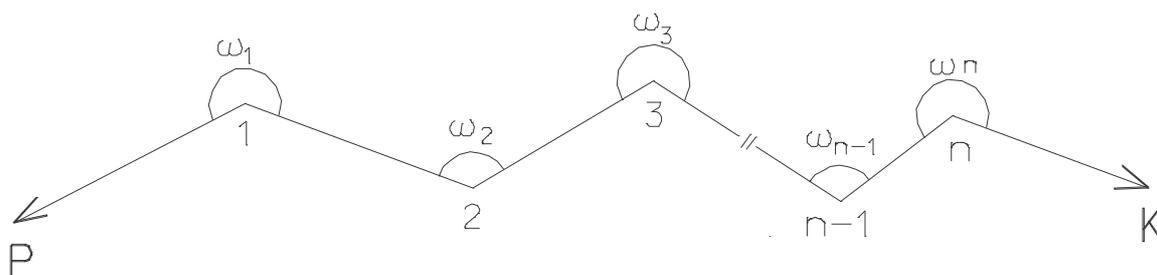
Obr. č. 3.2.2 Polygonový pořad oboustranně připojený a jednostranně orientovaný

3. Polygonový pořad jednostranně připojený a orientovaný (volný, otevřený). Polygonový pořad začíná na známé straně dané body  $A, P$ . Posledním bodem je bod jehož polohu určujeme.



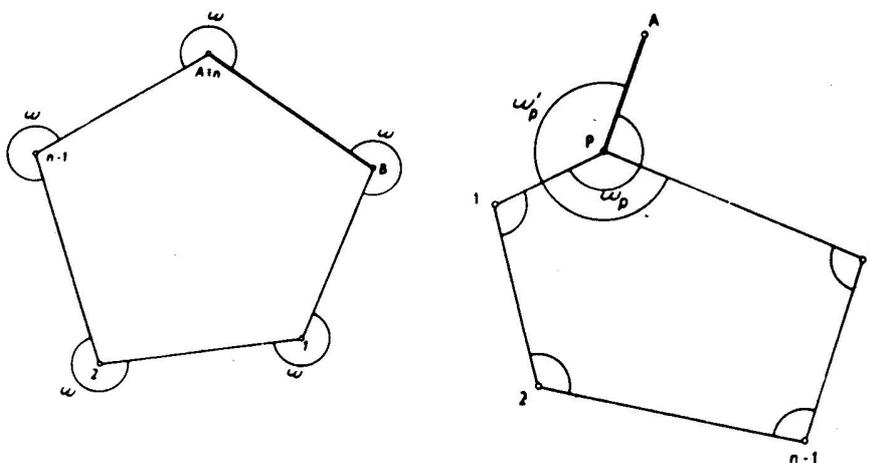
Obr. č. 3.2.3 Polygonový pořad jednostranně připojený a orientovaný

4. Polygonový pořad oboustranně připojený a neorientovaný (vsunutý), který začíná a končí na známém bodě – body  $(P, K)$ .



Obr. č. 3.2.4 Polygonový pořad vsunutý

5. Polygonový pořad uzavřený – s orientací nebo bez orientace na počátečním bodě. Polygonový pořad začíná a končí na téže straně.



a) bez orientace

b) s orientací

Obr. č. 3.2.5 Polygonový pořad uzavřený

U všech polygonových pořadů je výpočet v zásadě shodný, avšak u jednotlivých typů jsou částečně rozdílné výpočetní postupy vyrovnání.

### 3.3 Výpočet a vyrovnání polygonových pořadů

V důsledku připojení a orientace polygonového pořadu a vlivem náhodných odchylek měřených prvků (úhlů a délek) budou zpravidla na koncovém bodě odchylky od hodnot daných. Pokud tyto odchylky nepřekročí určitou mez, můžeme je vyrovnat, a to buď přibližným způsobem, nebo případně metodou nejmenších čtverců. V dalších kapitolách se využívá terminologie dle [1] a [2].

#### 3.3.1 Výpočet a přibližné vyrovnání oboustranně připojeného a orientovaného polygonového pořadu

Nejprve se provede úhlové vyrovnání a následně vyrovnání souřadnicové.

1. Vypočteme prozatímní směrnik poslední strany  $\sigma'_{KB}$

$$\sigma' = \sigma_{AP} + [\omega'_i] - k \cdot 200^{gon}$$

kde:  $\sigma_{AP}$  - směrnik počáteční strany,  $\omega'_i$  - měřené úhly

2. Výpočet skutečné úhlové odchylky  $O_\omega$

$$O_\omega = \sigma_{KB} - \sigma'_{KB}$$

Je-li  $O_\omega$  menší než odchylky povolené dle [2] můžeme ji za předpokladu, že poměr nejkratší a nejdelší strany pořadu nepřekročí  $\frac{1}{4}$ , rovnoměrně rozdělit na všechny měřené vrcholové úhly pomocí opravy:

je-li  $O_\omega \leq D\omega$

pak 
$$v_\omega = -\frac{O_\omega}{(n+2)}$$

kde (n+2) ..... počet měřených vrcholových úhlů

opravený úhel pak bude  $\omega_i = \omega'_i + v_\omega$

Klesne-li poměr nejkratší a nejdelší strany pod hodnotu  $\frac{1}{4}$ , pak odchylku rozdělíme nepřímou úměrou délkám polygonových stran svírajících jednotlivé polygonové úhly.

3. Vypočteme opravené směrníky stran:

$$\sigma_{P1} = \sigma_{AP} + \omega_P + v_\omega$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{P1} + \omega_1 + v_\omega - 200^{gon}$$

⋮

$$\sigma_{KB} = \sigma_{n,k} + \omega_k + v_\omega - 200^{gon}$$

Hodnota směrníku  $\sigma_{KB}$  takto získaná musí být rovna směrníku vypočtenému ze souřadnic.

4. Z vyrovnaných směrníků a měřených délek stanovíme předběžné souřadnicové rozdíly:

$$\Delta y'_{i,1+1} = s'_{i,i+1} \cdot \sin \sigma_{i,i+1} \qquad \Delta x'_{i,1+1} = s'_{i,i+1} \cdot \cos \sigma_{i,i+1}$$

5. Výpočet souřadnicových odchylek  $O_y, O_x$

$$O_y = y_k - y'_K \qquad O_x = x_k - x'_K$$

kde:

$$y'_k = y_P + [\Delta y'_{i,i+1}] \qquad x'_k = x_P + [\Delta x'_{i,i+1}]$$

Celková souřadnicová odchylka  $O_{xy} = \sqrt{O_x^2 + O_y^2}$

Nepřekračuje-li tato odchylka odchylku povolenou ( $D_{x,y}$ ) stanovenou dle výše uvedených předpisů, opravíme jednotlivé souřadnicové rozdíly některým z dále uvedených způsobů.

6. Vyrovnání souřadnicových rozdílů provádíme tak, že souřadnicové odchylky

$O_x, O_y$  rozdělíme v podobě oprav na jednotlivé předběžně vypočtené souřadnicové rozdíly.

$$\Delta y_{i,i+1} = \Delta y'_{i,i+1} + v^y_{i,i+1} \qquad \Delta x_{i,i+1} = \Delta x'_{i,i+1} + v^x_{i,i+1}$$

Opravy  $v^y, v^x$  se počítají buď úměrně k absolutním hodnotám souřadnicových rozdílů podle vztahů:

$$v^y_{i,i+1} = - \frac{O_y}{[\Delta y'_{i,i+1}]} \cdot [\Delta y'_{i,i+1}]$$

$$v^x_{i,i+1} = - \frac{O_x}{[\Delta x'_{i,i+1}]} \cdot [\Delta x'_{i,i+1}]$$

nebo úměrně k délkám stran, tedy:

$$v^y_{i,i+1} = - \frac{O_y}{[s_{i,i+1}]} \cdot s_{i,i+1}$$

$$v_{i,i+1}^x = - \frac{O_x}{[S_{i,i+1}]} \cdot S_{i,i+1}$$

O tom, kterého způsobu použití rozhoduje zpravidla přesnost délkového a úhlového měření nebo i tvar polygonového pořadu. Důležitější polygonové pořady se vyrovnávají metodou největších čtverců. Lze přitom využívat výhodný software, např. Kokeš, Groma, Geus atd..

Polygonový pořad oboustranně připojený a jednostranně orientovaný se vyrovnává obdobně, ale odpadá zde úhlové vyrovnání.

Uzavřený polygonový pořad se vyrovnává stejně jako oboustranně vetknutý. Úhlovou odchylku  $O_\omega$  určíme z podmínek pro součet úhlů v mnohoúhelníku.

Pro vnitřní úhly platí:

Pro vnější úhly platí:

$$[\omega_i] = (n - 2) \cdot 200^{gon}$$

$$[\omega_i] = (n + 2) \cdot 200^{gon}$$

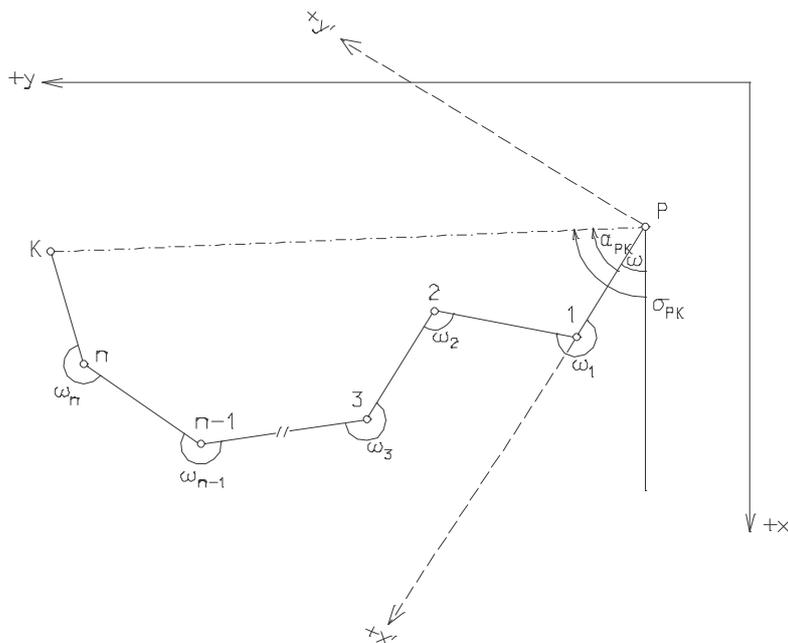
Dále platí:

$$[\Delta y_{i,i+1}] = O$$

$$[\Delta x_{i,i+1}] = O$$

Protože tyto podmínky nebudou vlivem nahodilých chyb v měření úhlů a délek splněny, obdržíme tak odchylky  $O_y, O_x$ .

### 3.3.2 Výpočet a přibližné vyrovnání polygonového pořadu oboustranně připojeného a neorientovaného (vsunutého)



Obr. č. 3.3.2.1 Polygonový pořad vsunutý

Postup řešení:

1. Nejprve vypočteme souřadnice bodů v pomocném souřadnicovém systému  $x', y'$  jejíž počátek je v bodě  $P$  a osa  $x'$  je totožná s prvou stranou pořadu. Pro směrníky  $\alpha$  v této souřadnicové soustavě platí:

$$\alpha_{P1} = 0$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{P1} + \omega'_1 - 200^{gon}$$

⋮

$$\alpha_{nk} = \alpha_{n-1,n} + \omega'_n - 200^{gon}$$

kde  $\omega'_i$  jsou měřené úhly.

2. Z měřených délek  $s'_{i,+1}$  a směrníků  $\alpha'_{i,+1}$  vypočteme přibližné souřadnicové v souřadnicové soustavě  $x', y'$

$$\Delta y'_{P1} = s'_{P1} \cdot \sin \alpha_{P1} = 0$$

$$\Delta x'_{P1} = s'_{P1} \cdot \cos \alpha_{P1} = s'_{P1}$$

$$\Delta y'_{12} = s'_{12} \cdot \sin \alpha_{12}$$

$$\Delta x'_{12} = s'_{12} \cdot \cos \alpha_{12}$$

⋮

⋮

$$\Delta y'_{nk} = s'_{nk} \cdot \sin \alpha_{nk}$$

$$\Delta x'_{nk} = s'_{nk} \cdot \cos \alpha_{nk}$$

Platí:

$$[\Delta y'_{i,i+1}] = y'_B$$

$$[\Delta x'_{i,i+1}] = x'_B$$

3. Při dalším postupu můžeme postupovat buď pomocí transformace souřadnic nebo výpočtem úhlu pootočení a přibližným souřadnicovým vyrovnáním. Využijeme-li druhou možnost postupujeme následujícím způsobem.
4. Výpočet úhlu natočení  $\omega$

$$\omega = \sigma_{PK} - \alpha_{PK}$$

kde:

$$\sigma_{PK} = \operatorname{arctg} \frac{y_K - y_P}{x_K - x_P}$$

$$\alpha_{PK} = \operatorname{arctg} \frac{y'_K - y'_P}{x'_K - x'_P}$$

$$S_{PK} = \frac{\Delta y_{PK}}{\sin \sigma_{PK}} = \frac{\Delta x_{PK}}{\cos \sigma_{PK}}$$

$$S'_{PK} = \frac{\Delta y'_{PK}}{\sin \alpha_{PK}} = \frac{\Delta x'_{PK}}{\cos \alpha_{PK}}$$

Má platit:

$$O_S = s_{PK} - S_{PK} \leq D_S$$

kde:  $O_S$  = skutečná odchylka

$D_S$  = povolená odchylka

5. Výpočet směrníku  $\sigma_{i,i+1}$  v dané souřadnicové soustavě  $x, y$

$$\sigma_{i,i+1} = \alpha_{i,i+1} + \omega$$

6. Výpočet a vyrovnání souřadnicových rozdílů:

$$\Delta y'_{i,i+1} = s'_{i,i+1} \cdot \sin \sigma_{i,i+1} \quad \Delta x'_{i,i+1} = s'_{i,i+1} \cdot \cos \sigma_{i,i+1}$$

Dále:

$$\Delta y'_{PK} = [\Delta y_{i,i+1}] \quad \Delta x'_{PK} = [\Delta x'_{i,i+1}]$$

$$\Delta y_{PK} = y_K - y_P \quad \Delta x_{PK} = x_K - x_P$$

$$O_y = \Delta y_{PK} - \Delta y'_{PK} \quad O_x = \Delta x_{PK} - \Delta x'_{PK}$$

Další postup je obdobný jako u polygonového pořadu oboustranně připojeného a orientovaného.

Při výpočtu tohoto typu polygonového pořadu lze s výhodou využít transformace souřadnic.

### 3.3.3 Výpočet polygonového pořadu jednostranně připojeného a orientovaného

Situace je zřejmá z obrázků č. 3.1.2, případně 3.2.3. Postupem odvozeným v kapitole 3.1 vypočteme souřadnice posledního bodu pořadu  $(x_n, y_n)$  a směrník poslední strany  $\sigma_{n-1,n}$  protože neexistují žádné podmínky pro úhlové nebo souřadnicové vyrovnání, musí se vždy provádět dvojí nezávislé měření všech úhlů a délek a dvojí výpočet.

Rozdíl směrníku poslední strany polygonového pořadu, který je vypočítán z výsledků prvního  $\sigma'_{n-1,n}$  a druhého měření  $\sigma''_{n-1,n}$ , musí splňovat podmínku:

$$O_\omega = \sigma'_{n-1,n} - \sigma''_{n-1,n} \leq D_\omega$$

kde  $D_\omega$  je povolená odchylka podle [1]. Odchylka  $O_{xy}$  v poloze koncového bodu polygonálního pořadu vypočtená z rozdílu souřadnic dle vztahů

$$\begin{aligned} O_y &= y'_n - y''_n \\ O_x &= x'_n - x''_n \\ O_{xy} &= \sqrt{O_x^2 + O_y^2} \end{aligned}$$

musí vyhovovat podmínce:

$$O_{xy} \leq D_{xy}$$

kde  $D_{xy}$  je povolená odchylka dle výše uvedené vyhlášky. Souřadnice jednotlivých bodů se mohou vypočíst jako aritmetický průměr z výsledků obou měření:

$$y_i = \frac{y'_i + y''_i}{2} \qquad x_i = \frac{x'_i + x''_i}{2}$$

### 3.4 Přesnost polygonových pořadů

Vlivem náhodných odchylek úhlového a délkového měření nebude směr poslední strany a souřadnice posledního bodu přesně určeny. Míru přesnosti lze v zásadě určit dvěma způsoby:

- Skutečnou přesnost polygonálního pořadu určíme ze zjištěných odchylek ve směru poslední strany a ze souřadnicové odchylky v poloze koncového bodu;
- Očekávanou přesnost můžeme stanovit á priori na podkladě přesnosti dosavadních známých měření;

Důležitými kritérii pro posouzení přesnosti polygonových pořadů jsou:

- Přesnost ve směru poslední strany,
- Podélná a příčná odchylka,
- Přesnost v poloze koncového bodu

Rovněž při zpracování kapitoly 3.4 se využívá terminologie dle [1] a [2].

#### 3.4.1 Přesnost ve směru poslední strany

Přesnost ve směru poslední strany je dána střední chybou směrníku této strany ( $m\sigma_{n-1,n}$ ). Směrník poslední strany se vypočte ze vztahu:

$$\sigma_{n-1,n} = \sigma_{AP} + [\omega_i] - k \cdot 200^{gon}$$

Podle zákona o hromadění chyb a za předpokladu, že směrník výchozí strany považujeme za bezchybný platí:

$$\pm m\sigma_{n-1,n} = \pm m\omega_p \pm m\omega_1 \pm m\omega_2 \pm \dots \pm m\omega_{n-1}$$

$$m^2\sigma_{n-1,n} = m\omega_p + m^2\omega_1 + m^2\omega_2 + \dots + m^2\omega_{n-1}$$

Měříme-li úhly se stejnou přesností:

$$m\omega_p = m\omega_1 = m\omega_2 = \dots = m\omega_{n-1} = m\omega$$

$$m\sigma_{n-1,n} = \pm m\omega\sqrt{n}$$

kde:

$m\omega$ ..... střední chyba měřeného úhlu

$n$ ..... počet měřených úhlů

### 3.4.2 Podélná a příčná odchylka polygonového pořadu

Vlivem chyb délkového a úhlového měření bude koncový bod polygonového pořadu určen s určitou chybou. Jeho poloha bude dle obr. 3.4.2.1 v bodě  $P'_n$ . Odchylku  $O_{x,y}$  můžeme rozložit, buď do složek  $O_x, O_y$  ve směru souřadnicových os, nebo do generálního směru polygonového pořadu  $\Delta L$  a směru na něj kolmého  $Q$ .

$\Delta L$  .....podélná odchylka (vzniká převážně vlivem chyb délkového měření)

$Q$  .....příčná odchylka (uplatňují se zejména chyby úhlového měření)

Z obrázku 3.4.2.1 lze odvodit:

$$\Delta L = \overline{P_n A'} + \overline{A' B'} = O_y \cdot \sin \sigma_{o,n} + O_x \cdot \cos \sigma_{o,n}$$

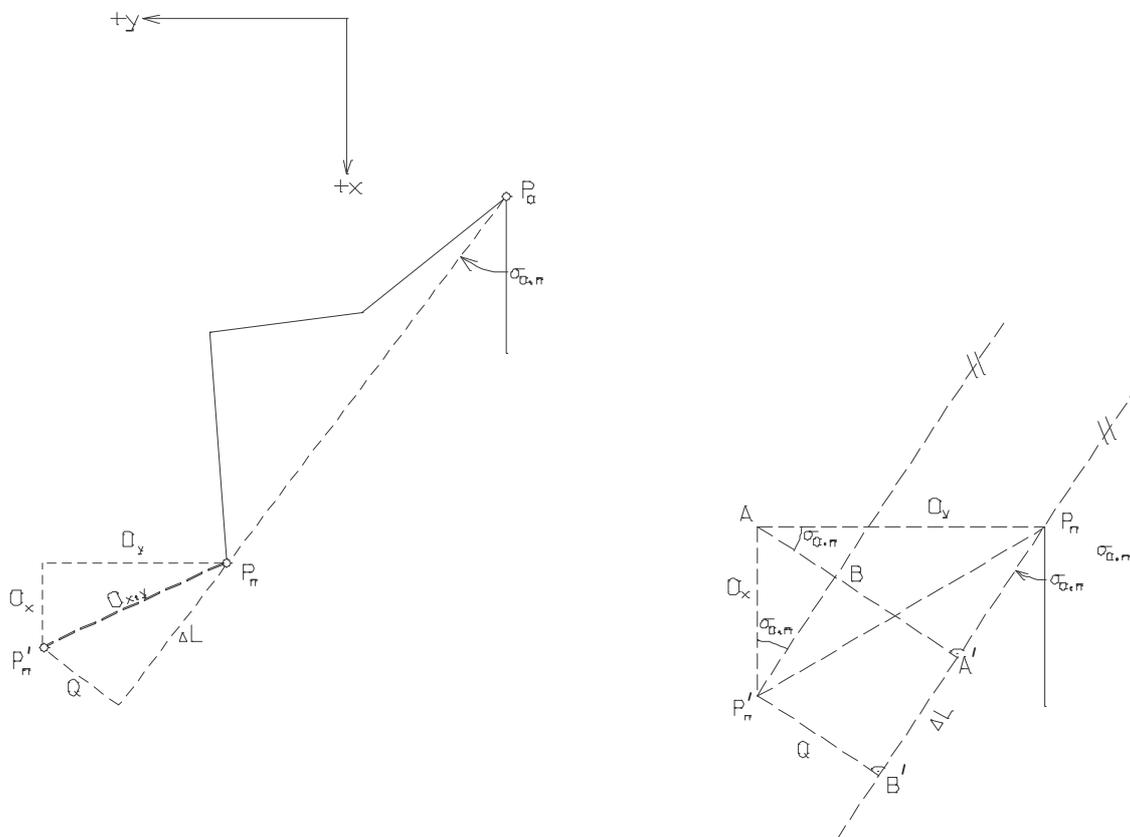
$$Q = \overline{AA'} - \overline{AB} = O_y \cdot \cos \sigma_{on} - O_x \cdot \sin \sigma_{o,n}$$

Protože:

$$\sin \sigma_{o,n} = \frac{\Delta y_{o,n}}{S_{o,n}} \qquad \cos \sigma_{o,n} = \frac{\Delta x_{o,n}}{S_{o,n}}$$

$$\Delta L = O_y \cdot \frac{\Delta y_{o,n}}{S_{o,n}} + O_x \cdot \frac{\Delta x_{o,n}}{S_{o,n}} = \frac{1}{S_{o,n}} \cdot (O_y \cdot \Delta y_{o,n} + O_x \cdot \Delta x_{o,n})$$

$$Q = O_y \cdot \frac{\Delta x_{o,n}}{S_{o,n}} - O_x \cdot \frac{\Delta y_{o,n}}{S_{o,n}} = \frac{1}{S_{o,n}} \cdot (O_y \cdot \Delta x_{o,n} - O_x \cdot \Delta y_{o,n})$$



Obr. č. 3.4.2.1 Podélná a příčná odchylka v polygonovém pořadu

Podélná odchylka je tvořena chybami délkového měření. Jestliže chyby v jednotlivých stranách polygonového pořadu budou

$$\pm m_{o1}, \quad \pm m_{12} \dots \dots \dots \pm m_{n-1,n},$$

pak celková podélná odchylka  $\Delta L$  bude

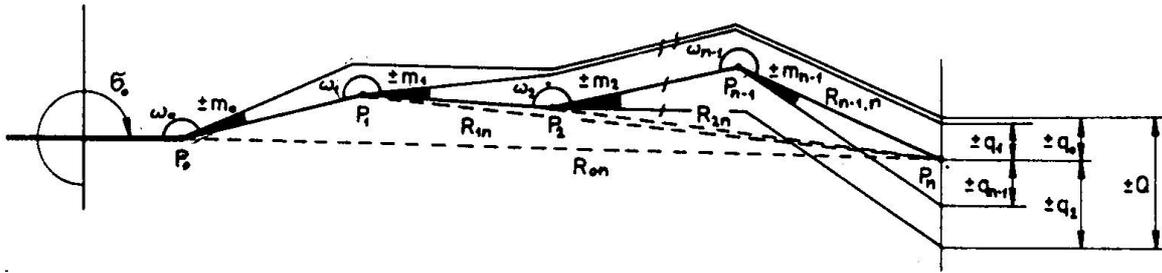
$$\Delta L = \pm \sqrt{[m_s^2]}$$

Tento výraz můžeme s použitím střední jednotkové chyby délkového měření  $\pm \lambda$  napsat jako

$$\Delta L = \pm \lambda \sqrt{L}$$

$L$  je celková délka polygonového pořadu.

Příčnou odchylku u přímého polygonového pořadu můžeme stanovit z obr. č. 3.4.2.2 následující úvahou:



Obr. č. 3.4.2.2 Příčná odchylka přímého polygonového pořadu

Dopustíme-li se chyby v prvním měřeném úhlu  $\omega_0 \pm m_0$  a ostatní úhly jsou měřeny bezchybně, způsobí tato chyba příčnou odchylku v koncovém bodě  $\pm q_0$ .

$$q_0 = \pm \frac{m''_0}{\rho''} (S_{0,1} + S_{1,2} + \dots + S_{n-1,n}) = \pm \frac{m''_0}{\rho''} R_{0n}$$

Budou-li se postupně měřit s chybami další úhly  $\omega_1 \pm m_1$ ,  $\omega_2 \pm m_2$  až po poslední úhel  $\omega_{n-1} \pm m_{n-1}$ , zatímco zbývající úhly pořadu budou bezchybné, obdržíme další příčné odchylky.

$$q_1 = \pm \frac{m''_1}{\rho''} (S_{1,2} + S_{2,3} + \dots + S_{n-1,n}) = \pm \frac{m_1}{\rho''} \cdot R_{1n}$$

$$q_2 = \pm \frac{m''_2}{\rho''} (S_{2,3} + S_{3,4} + \dots + S_{n-1,n}) = \pm \frac{m_2}{\rho''} \cdot R_{2n}$$

$$q_{n-1} = \pm \frac{m''_{n-1}}{\rho''} (S_{n-1,n}) = \pm \frac{m''_{n-1}}{\rho''} \cdot R_{n-1,n}$$

Pro celkovou příčnou odchylku platí:

$$Q = \pm q_0 \pm q_1 \pm \dots \pm q_{n-1}$$

Budou-li chyby v měřených úhlech přibližně stejné potom platí:

$$\pm m_0 = \pm m_1 = \pm m_2 = \pm \dots \pm m_{n-1} = \pm m_\omega$$

$$Q^2 = q_0^2 + q_1^2 + \dots + q_{n-1}^2$$

Budou-li i délky stran přibližně stejné:

$$S_{01} = S_{12} = S_{n-1,n} = S$$

Potom po dosazení jednotlivých příčných odchylek obdržíme:

$$Q^2 = \frac{m''^2}{\rho''^2} \cdot n^2 \cdot s^2 + \frac{m''^2}{\rho''^2} (n-1)^2 \cdot s^2 + \frac{m''^2}{\rho''^2} (n-2)^2 \cdot s^2 + \dots + \frac{m''^2}{\rho''^2} \cdot 1^2 \cdot s^2$$

$$Q^2 = \frac{m''^2}{\rho''^2} s^2 [n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 2^2 + 1^2]$$

Součet posloupnosti

$$[n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 2^2 + 1^2] \cong \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$Q^2 = \frac{m''^2}{\rho''^2} \cdot s^2 \left( \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right)$$

Po zaokrouhlení:

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \cong \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} \cong n^2 \frac{n + \frac{3}{2}}{3}$$

Dostaneme pro příčnou odchylku výraz

$$Q = \pm \frac{m''}{\rho''} \cdot s \cdot n \cdot \sqrt{\frac{n + \frac{3}{2}}{3}} \quad \text{a protože } s \cdot n = L$$

$$Q = \pm \frac{m''}{\rho''} \cdot L \sqrt{\frac{2n + \frac{3}{2}}{6}}$$

Příčnou odchylku můžeme určit i na základě délek průvodičů R (vzdálenosti jednotlivých bodů od posledního bodu polygonového pořadu). Zde platí:

$$Q^2 = \frac{m''^2}{\rho''^2} \cdot R_{1n}^2 + \frac{m''^2}{\rho''^2} \cdot R_{2n}^2 + \dots + \frac{m''^2}{\rho''^2} \cdot R_{n-1,n}^2$$

$$Q^2 = \frac{m''^2_{\omega}}{\rho''^2} \cdot (R_{1n}^2 + R_{2n}^2 + \dots + R_{n-1,n}^2)$$

$$Q^2 = \frac{m''^2_{\omega}}{\rho''^2} \cdot [RR]$$

### 3.4.3 Střední chyba v poloze koncového bodu

Je způsobena vlivem chyb délkového a úhlového měření. Podle obr. č. 3.4.2.1 bude

$$m_{xy} = \pm \sqrt{\Delta L^2 + Q^2}$$

po dosazení:

$$m_{xy} = \pm \sqrt{\lambda^2 \cdot L + \frac{m''^2_{\omega}}{\rho''^2} \cdot [RR]}$$

Je zřejmé, že střední chyba v poloze koncového bodu závisí na přesnosti úhlového a délkového měření  $(m''_{\omega}, \lambda)$  a na délce a tvaru polygonového pořadu  $(L, [RR])$ .

## 4. Transformace souřadnic

Pod tímto pojmem rozumíme převod souřadnic jednoho souřadnicového systému do druhého. Obvykle transformujeme do souřadnicového systému S-JTSK.

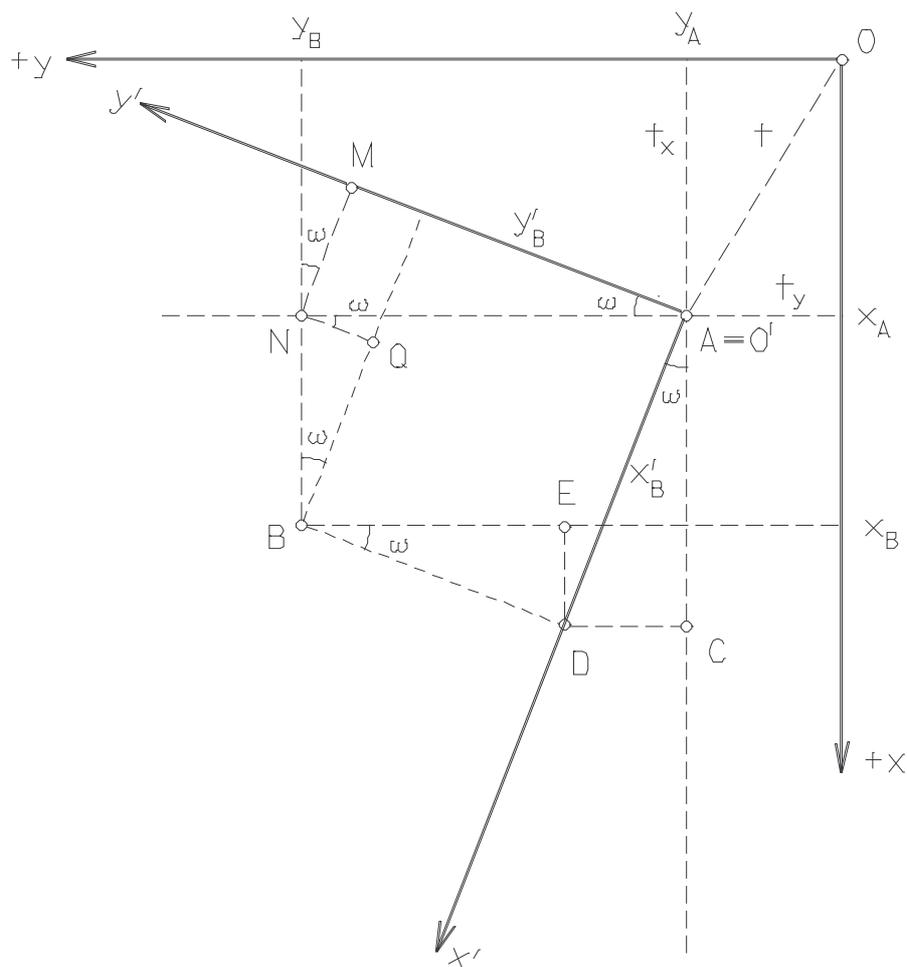
Podle typu rozlišujeme transformace prostorové, rovinné, lineární, shodnostní, podobnostní atd. Pro jednoduchost je uveden příklad rovinné konformní transformace.

Transformace je charakterizována:

- Úhlem natočení  $\omega$  obou soustav
- Posunem počátku souřadnice  $t_x, t_y$  (transformační koeficienty)
- Délkovým modulem  $q$  (poměr délek prvního a druhého souřadnicového systému).

K určení transformačního klíče  $(\omega, t_x, t_y, q)$  potřebujeme znát minimálně čtyři souřadnice, tedy minimálně dva identické body.

Rovnice umožňující transformace souřadnic lze odvodit z obr. č. 4.1.



Obr. č. 4.1 Transformace souřadnic (rovinná, konformní)

Délkový modul 
$$q = \frac{S_{AB}}{S'_{AB}}$$

Pro  $q = 1$  (shodnostní transformace) mají transformační rovnice tvar

Převod z  $x', y'$  do  $x, y$ :

$$y_B = y_0 + \overline{CD} + \overline{EB} = y_0 + x'_B \cdot \sin \omega + y'_B \cdot \cos \omega$$

$$x_B = x_0 + \overline{OC} + \overline{DE} = x_0 + x'_B \cdot \cos \omega - y'_B \cdot \sin \omega$$

Převod z  $x, y$  do  $x', y'$ :

$$y' = \overline{OM} - \overline{NQ} = (y_B - y_0) \cdot \cos \omega - (x_B - x_0) \sin \omega$$

$$x' = \overline{MN} - \overline{QB} = (y_B - y_0) \cdot \sin \omega + (x_B - x_0) \cos \omega$$

Pokud  $q \neq 1$  (Podobnostní transformace) platí vztahy

Převod z  $x', y'$  do  $x, y$ :

$$y_B = y_0 + q(x'_B \sin \omega + y'_B \cos \omega)$$

$$x_B = x_0 + q(x'_B \cos \omega - y'_B \sin \omega)$$

Převod z  $x, y$  do  $x', y'$ :

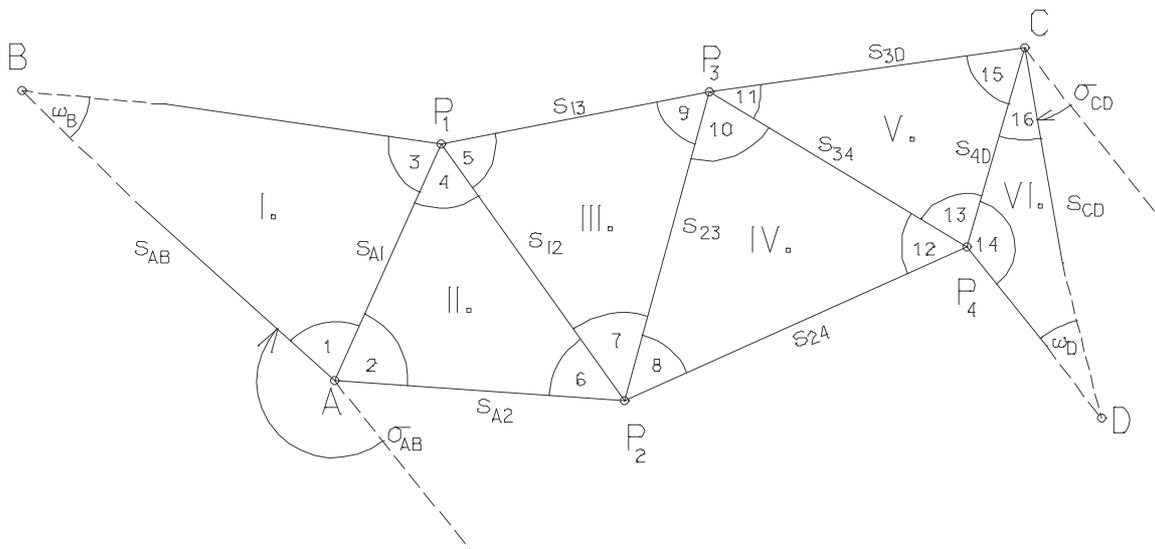
$$y' = \frac{1}{q} \left[ (y_B - y_0) \cdot \cos \omega - (x_B - x_0) \cdot \sin \omega \right]$$

$$x' = \frac{1}{q} \left[ (y_B - y_0) \cdot \sin \omega + (x_B - x_0) \cdot \cos \omega \right]$$

## 5. Metoda trojúhelníkových řetězců

Jedná se o kombinovanou metodu, vhodnou při měřeních na povrchu, kdy změřením úhlů v řetězci a jeho připojením získáme prvky (vrcholové úhly, délky stran) potřebné na vytvoření polygonového pořadu vedeného danými body.

Nejčastěji se bude vyskytovat případ trojúhelníkového řetězce připojeného na obou koncích (viz obr. č. 5.1).



Obr. č. 5.1 Trojúhelníkový řetězec

Výpočet se provádí:

1. převedením na výpočet polygonového pořadu s přibližným vyrovnáním

## 2. postupným protínáním vpřed

Před výpočtem se měřené vnitřní úhly jednotlivých trojúhelníků opraví o 1/3 uzávěru  $U$ , kdy:

$$U = 200^{\text{gon}} - [\omega]$$

K výpočtu polygonovým pořadem se délky stran postupně vypočtou pomocí sinové věty, např.

$$S_{A1} = S_{AB} \cdot \frac{\sin \omega_B}{\sin \omega_3}$$

⋮

atd.

Řetězec na obr. č. 5.1 sestává z 6 trojúhelníků připojených na začátku a na konci mezi dané body A, B, C, D.

Aby řetězec úhlově délkově zapadl mezi dané body musí měření splňovat následující podmínky:

1. Úhlové podmínky: součet vnitřních úhlů v trojúhelnících se rovná  $200^{\text{gon}}$ . Případná odchylka se vyrovná způsobem uvedeným výše.
2. Základová podmínka: vyplývá ze sinových vět pro výpočet délek stran:

$$S_{CD} = \frac{\sin \omega_B \cdot \sin(2) \cdot \sin(5) \cdot \sin(8) \cdot \sin(11) \cdot \sin(14)}{\sin(3) \cdot \sin(6) \cdot \sin(9) \cdot \sin(12) \cdot \sin(15) \cdot \sin \omega_D} \cdot S_{AB}$$

3. Směrníková podmínka:

$$\sigma'_{CD} = \sigma_{AB} + [\omega] - i \cdot 200^{\text{gon}} = \sigma_{CD}$$

Směrník vypočtený z měřených úhlů se musí rovnat směrníku vypočtenému ze souřadnic.

4. Dvě souřadnicové podmínky:

$$x_C = x_A + [\Delta x] \qquad y_C = y_A + [\Delta y]$$

Odchylky z daných podmínek se odstraní vyrovnáním např. přibližnou metodou následujícím způsobem:

- a) Jednotlivé trojúhelníky vyrovnáme úhlově – tzn., že odchylku od  $200^{\text{gon}}$  rozdělíme na třetiny a o ty opravíme naměřené úhly.
- b) Vypočteme z vyrovnaných úhlů délku strany  $S'_{CD}$ , určíme poměr mezi skutečnou délkou a vypočtenou

$$q = \frac{S_{CD}}{S'_{CD}}$$

kterým vynásobíme všechny ze sinových vět vypočtené délky.

- c) Propočítáme a vyrovnáme polygonový pořad ,  $P_1 P_2 P_3 P_4 C$  podle postupu pro oboustranně připojený a orientovaný polygonový pořad.

Pokud by trojúhelníkový řetězec byl připojen na tři body odpadá vyrovnání délek stran.

Kdyby řetězec byl připojen pouze na 2 body provedl by se výpočet podobně jako polygonový pořad vsunutý.

Při postupném protínání vpřed se souřadnicová odchylka rozdělí úměrně počtu určovaných bodů.

## 6. Další výpočty v souřadnicové síti

V geodézii a důlním měřictví je někdy nutné řešit i jiné úlohy v souřadnicové síti.

### 6.1 Určení souřadnic průsečíku dvou měřických přímek

Podle obr. č. 6.1.1 jsou dány souřadnice koncových bodů dvou přímek.

$$P_1(x_1, y_1), \quad P_2(x_2, y_2)$$

a

$$P_3(x_3, y_3), \quad P_4(x_4, y_4).$$

Je třeba určit souřadnice průsečíku  $P_0(x_0, y_0)$ .

Souřadnice průsečíku vypočteme jako řešení dvou rovnic o dvou neznámých  $x_0$  a  $y_0$ .

Zde platí, že  $\sigma_{10} = \sigma_{12}$  a  $\sigma_{30} = \sigma_{34}$

Souřadnice průsečíku leží na obou přímkách, proto musí vyhovovat oběma rovnicím přímek.

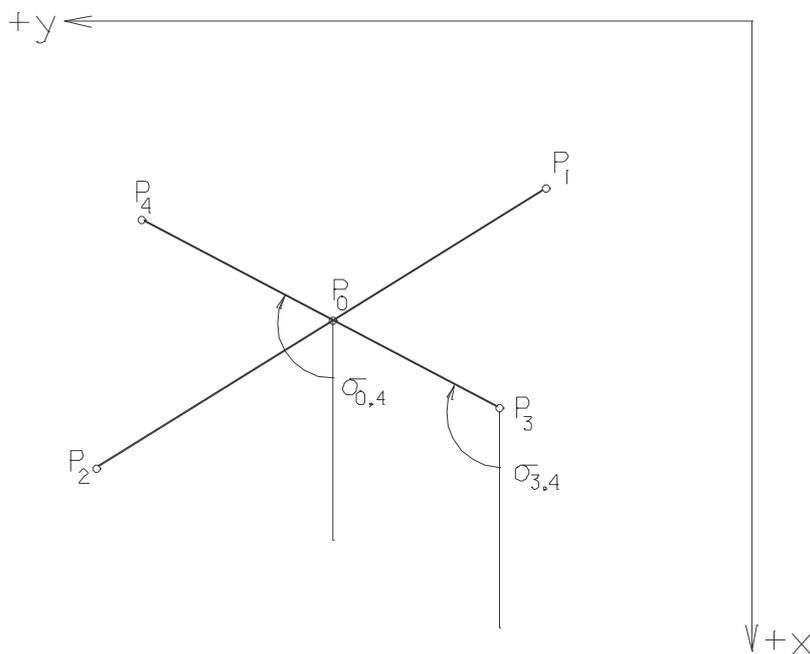
$$y_0 - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_0 - x_1), \quad y_0 - y_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}(x_0 - x_3)$$

Řešením dostáváme:

$$y_0 = y_3 + q(x_0 - x_3) \qquad x_0 = \frac{y_3 - y_1 + px_1 - qx_3}{p - q}$$

kde:

$$p = \operatorname{tg} \sigma_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad q = \operatorname{tg} \sigma_{34} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$



Obr. č. 6.1.1 Průsečík dvou přímek

## 6.2 Výpočet souřadnicových bodů na měřické přímce

Podle obr. č. 6.2.1 jsou dány souřadnice koncových bodů přímky **AB** a měřené délky

$$S_{B1}, S_{12} \dots S_{nA}$$

Je třeba určit souřadnice bodů  $P_1, P_2 \dots P_n$  mezi body **AB**.

Souřadnicové rozdíly spočteme:

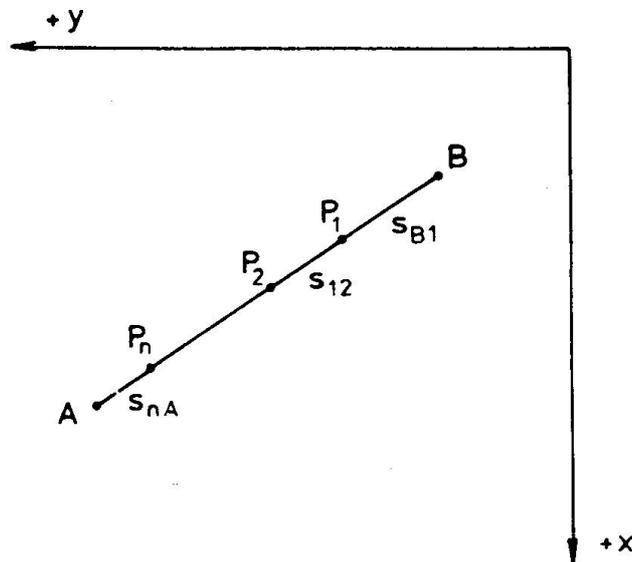
$$\Delta x_{i,i+1} = \frac{x_A - x_B}{[S]} \cdot S_{i,i+1} \qquad \Delta y_{i,i+1} = \frac{y_A - y_B}{[S]} \cdot S_{i,i+1}$$

a souřadnice hledaných bodů

$$\begin{aligned} x_1 &= x_B + \Delta x_{B1} & y_1 &= y_B + \Delta y_{B1} \\ x_2 &= x_1 + \Delta x_{12} & y_2 &= y_1 + \Delta y_{12} \\ \vdots & & \vdots & \\ x_A &= x_n + \Delta x_{nA} & y_A &= y_n + \Delta y_{nA} \end{aligned}$$

Musí však být splněna podmínka:

$$[S] = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Obr. č. 6.2.1 Souřadnice mezibodů na měřické přímce

## 7. Kritéria přesnosti polohového bodového pole

Odchyly zjištěné při určování polohy vlivem středních chyb měřených veličin musí vyhovovat kritériím přesnosti, které mají pro různé kategorie přesnosti a použité metody rozdílné hodnoty.

V důlním měřictví se povolené odchyly stanoví dle Vyhlášky č. 435/1992 Sb. Českého báňského úřadu. V geodézii se kritéria přesnosti stanoví v souladu s Vyhláškou č. 190/1996 Sb. Českého úřadu zeměměřického a katastrálního.

Poznámka:

U polygonových pořadů a trojúhelníkových řetězců se odchyly odstraňují převážně vyrovnáním. U metod protínání a rajónu určujeme dané body nejméně ze dvou kombinací, kdy rozdíly ve vypočtených souřadnicích z jednotlivých kombinací musí vyhovovat příslušné kategorii přesnosti.

## SEZNAM LITERATURY

- [1] Tyrner, M., Štěpánková, H.: Vyrovnávací počet, VSB Ostrava, 1993
- [2] Vyhláška č. 435/1992 Sb. ČBÚ, Montanex, Ostrava, 1997
- [3] Kubečka, E.: Geodézie a důlní měřictví, VŠB Ostrava, 1992
- [4] Kovanič, L., Matouš, J., Mučka, A.: Důlní měřictví, SNTL, Praha, 1990
- [5] Ratiborský, J.: Geodézie, ČVUT, Praha, 1995
- [6] Novák, Z., Procházka, J.: Inženýrská geodézie č. 10, ČVUT, Praha, 1995
- [7] Vyhláška č. 190/1996 Sb. Českého úřadu zeměměřického a katastrálního