Funkce komplexní proměnné - zápočtové příklady (jaro 2014)

Pro získání zápočtu je třeba odevzdat správně vyřešené následující příklady. Je možné je odevzdat napsané na papíře nebo je naskenované poslat na mail rihacek@physics.muni.cz. V každém případě musí být čitelné.

1) Řešte rovnici

$$z^6 + 8 = 0\,.$$

2) Nechť z_1, z_2, z_3 tvoří tři vrcholy rovnoběžníku. Vyjádřete čtvrtý vrchol z_4.

3) Popište následující množiny

(a)

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \arg \frac{z+1}{z-1} = \pi \right\}\,,$$

(b)

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z|^2 = \operatorname{Im} z \right\}\,.$$

4) Dokažte následující tvrzení

(a) Nechť holomorfní funkce f nabývá na oblasti D pouze imaginárních hodnot. Pak f je konstantní funkce.
Hint: použijte Cauchyho-Riemannovy podmínky.

(b) Nechť $f(z) = u(x) + \mathrm{i}\, v(y)$ je holomorfní na $\mathbb{C}$. Pak f je polynom stupně nejvýše 1.

5) Nalezněte holomorfní funkci $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\, v(x,y)$, znáte-li:

(a)

$$v(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2\right) + x - 2y\,,$$

(b)

$$u(x,y) = x^3 - 3xy - 2y\,.$$

6) Nechť $\mathcal{C}$ je jednoduchá, uzavřená a kladně orientovaná křivka neprocházející body $\pm\mathrm{i}\, a$, $a > 0$. Zjistěte všechny hodnoty integrálu

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2 + a^2}$$

v závislosti na křivce $\mathcal{C}$.

7) Rozviňte následující funkce v mocninnou řadu se středem v z_0 a určete poloměr konvergence

(a)

$$f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}\,, \qquad z_0 = 1\,,$$

(b)

$$f(z) = \int_0^z \frac{\sin\zeta}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta\,, \qquad z_0 = 0\,,$$

(c)

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 5}\,, \qquad z_0 = 1\,.$$

8) Určete obor konvergence Lautrentovy řady

(a)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-n}}\, z^n\,,$$

(b)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{|n|}(z - 2\mathrm{i}\,)^n\,.$$

9) Nalejděte Laurentovu řadu se středem v zadané oblasti

(a)

$$f(z) = \frac{3z}{(2z-1)(2-z)}\,, \qquad P(0, 1/2, 2)\,,$$

(b)

$$f(z) = 3z \sin\frac{\pi z}{z+5}\,, \qquad \{\text{maximální možné mezikruží se středem v } z_0 = -5\}\,.$$

10) Najděte první tři členy Laurentova rozvoje funkce $f(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ se středem v bodě 0 a určete oblast konvergence.

11) Nechť funkce f je holomorfní v $P(0, r, R)$, $r < R$ a nechť

$$|f(z)| \leq M \quad \text{pro všechna } z \in P(0, r, R).$$

Pro koeficienty $\{a_n\}$ Laurentova rozvoje funkce $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ odvoďte:

$$|a_n| \leq \min\left(\frac{M}{r^n}, \frac{M}{R^n}\right) \quad \text{pro všechna } z \in \mathbb{Z}.$$

12) Besselovy funkce J_n, $n \in \mathrm{Z}$ jsou definovány jako koeficienty $a_n(b)$ v Laurentově rozvoji funkce

$$f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}b(z - \frac{1}{z})}$$

se středem v bodě 0. Vyjádřete $\mathrm{J}_n(b)$ pomocí nekonečné řady.

13) Najděte a klasifikujte izolované singularity funkcí

(a)

$$f(z) = \frac{\tan z - 1}{z - 1}\,,$$

(b)

$$f(z) = \mathrm{e}^{\tan\frac{1}{z}}\,,$$

(c)

$$f(z) = \frac{z + \pi}{z^2 \sin z}\,,$$

(d)

$$f(z) = \mathrm{e}^{1/z} \frac{1}{z(z^2 - 2\mathrm{i}\,)^2}\,.$$

14) Vypočtěte rezidua

(a)

$$\operatorname{res}_1 \left(\frac{z^2 + z - 1}{(z-1)z^2} + \frac{\sin z}{z^2} \right) ,$$

(b)

$$\operatorname{res}_0 \left(\frac{z^2 + z - 1}{(z-1)z^2} + \frac{\sin z}{z^2} \right) ,$$

(c)

$$\operatorname{res}_\infty \left(\frac{z^2 + z - 1}{(z-1)z^2} + \frac{\sin z}{z^2} \right) ,$$

(d)

$$\operatorname{res}_{k\pi} \left(\operatorname{cotan}^2 z \right) , \quad k \in \mathbb{Z} ,$$

(e)

$$\operatorname{res}_{k\pi} \left(\operatorname{cotan}^3 z \right) , \quad k \in \mathbb{Z} ,$$

(f)

$$\operatorname{res}_0 \left(\mathrm{e}^z \sin 1/z \right) .$$

15) Spočtěte integrály využitím reziduové věty

(a)

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2} , \quad a \in \mathbb{R} , \quad a \geq 0 .$$

Jaký by byl výsledek pro $a < 0$?

(b)

$$\int_0^\infty \frac{x}{\sinh x} .$$

Hint: jako integrační cestu zvolte vhodně upravený čtverec s vrcholy $R, -R, R + \pi\mathrm{i}\,, -R + \pi\mathrm{i}\,.$

(c)

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^3} , \quad a \in \mathbb{R} , \quad -1 < a < 2 .$$

Hint: je třeba vhodně definovat množinu, na teré lze hledat integrační cestu, tj. na které platí reziduová věta. Rozmyslete si, že je to množina $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

(d)

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{(z^2-1)^2(z-3)^2} , \quad \mathcal{C} \text{ je kladně orientovaná asteroida s parametrizací}$$

$$z = 2\cos^3 t + 2\mathrm{i}\, \sin^3 t , \quad t \in [0, 2\pi] .$$