Písemka z Diferenciální geometrie křivek a ploch
Termín A, 23.5.2011

Jméno a příjmení:
UČO:

1. (a) [1b] Určete délku jednoho oblouku modifikované šroubovice

$$g(t) = (\cos t, \sin t, \frac{2}{3}t^{3/2}), \quad t \geq 0.$$

(b) [3b] Určete křivost, torzi a inflexní body křivky

$$f(t) = (\cos t, \sin t, e^t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Je dána parametrizace

$$f(u,v) = (u^2 + v, u + v^2, uv), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Obraz f v $\mathbb{E}^3$ označíme jako $M = f(\mathbb{R}^2)$. V $\mathbb{E}^3$ zvolíme počátek, tj. máme identifikaci $\mathbb{E}^3 \cong \mathbb{R}^3$.
(a) [1b] Načrtněte průnik množiny M s rovinou $z = 0$.
(b) [2b] Rozhodněte, zda f parametrizuje plochu v $\mathbb{E}^3$ na dostatečně malých okolích bodů $A = f(0,0) \in M$ a $B = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in M$.
(c) [2b] Ukažte, že f parametrizuje plochu v $\mathbb{E}^3$ na dostatečně malém okolí bodu $C = f(1,1) \in M$.

3. Označme plochu s parametrizací f na okolí $D \subseteq \mathbb{R}^2$ bodu $(1,1) \in D$ jako S.
(a) [2b] Určete asymptotické směry v bodě $f(1,1)$ a normálovou křivost ve směru $(du, dv) = (1, 0)$.
(b) [2b] Určete hlavní směry a hlavní křivosti v bodě $f(1,1)$.
(c) [1b] Spočítejte střední a Gaussovu křivost v bodě $f(1,1)$ a typ tohoto bodu (eliptický, hyperbolický nebo parabolický).
(d) [3b] Uvažme křivku na ploše S procházející bodem $f(1,1)$, která je v oblasti parametrů daná parametrizací $(u(t), v(t)) = (1 + t, 1)$. Její tečné pole označíme $U(t)$. Spočtěte kovariantní derivaci $\frac{\nabla U(t)}{dt}$ podél této křivky v bodě $t = 0$.
(e) [1b] Najděte nějakou izometrii plochy S pro oblast parametrů $D = (1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \times (1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \subseteq \mathbb{R}^2$ pro dostatečně malé $\epsilon > 0$.

4. [3b] Nechť $g(s)$ parametrizace obloukem křivky bez inflexních bodů s křivostí κ a torzí τ taková, že $\tau \neq 0$ ve všech bodech. Dokažte, že jestliže tato křivka leží na sféře se středem v počátku, pak platí

$$\frac{\tau}{\kappa} + \left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)' = 0.$$

(Návod: Uvažte $g(s)$ ve tvaru $g(s) = \lambda(s)e_1(s) + \mu(s)e_2(s) + \nu(s)e_3(s)$ pro vhodné funkce $\lambda(s)$, $\mu(s)$ a $\nu(s)$, diferencujte a využijte vlastností Frenetovy báze e_1, e_2, e_3.)