Písemka z Diferenciální geometrie křivek a ploch
Termín B, 10.6.2011

Jméno a příjmení:
UČO:

1. Křivka C je dána parametrizací

$$f(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) [1b] Najděte parametrizaci křivky C obloukem.
(b) [3b] Určete křivost, torzi a inflexní a planární body.
(c) [1b] Spočtěte délku této křivky pro $t \in [-1, 1]$.

2. Uvažme plochu S s parametrizací

$$f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \ln u), \quad u > 0, v \in (-\pi, \pi).$$

(a) [2b] Určete asymptotické křivky v bodě $f(1, 1)$.
(b) [2b] Určete hlavní směry, hlavní křivky a hlavní křivosti v bodě $f(u_0, v_0)$.
(c) [1b] Spočítejte střední a Gaussovu křivost v bodě $f(u_0, v_0)$ a eliptické, hyperbolické nebo parabolické body.
(d) [3b] Uvažme křivku na ploše S procházející bodem $f(1, 0)$, která je v oblasti parametrů daná parametrizací $(u(t), v(t)) = (1 + t, 0)$. Její tečné pole označíme $U(t)$. Spočtěte kovariantní derivaci $\frac{\nabla U(t)}{dt}$ podél této křivky v bodě $t = 0$.
(e) [1b] Najděte nějakou geodetiku.
(f) [1b] Rozhodněte, zda na této ploše leží nějaká přímka.

Všechny svoje odpovědi zdůvodněte.

3. Uvažme jednotkovou sféru bez dvou bodů

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \neq \pm 1\}$$

a část válce

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1\}.$$

Zobrazení $f : S_1 \to S_2$ je definováno vztahem

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right).$$

(a) [1.5b] Ukažte, že f zachovává velikosti ploch.
(b) [0.5b] Ukažte, že f nezachovává délky křivek.
(c) [0.5b] Rozhodněte, zde existuje izometrické zobrazení $g : S_1 \to S_2$. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.

4. Řekneme, že parametrizace $f(u, v)$ pro $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ plochy S je *konformní*, jestliže úhly měřené na oblasti parametrů jsou stejné jako úhly měřené v T_pM, $p \in S$.
(a) [3b] Ukažte, že parametrizace $f(u, v)$ je konformní právě, když pro koeficenty první základní formy platí $g_{11} = g_{22}$ a $g_{12} = 0$.
(b) [1b] Najděte nějakou konformní parametrizaci válce.