1. část

1. Udejte příklad afinity s charakteristikou k = -2 v A_2

2. Rovnice otočení o 270^{o} kolem bodu [0,-2]

3. Udejte příklad lineárního zobrazení s vlastními čísly -1 a -3.

4. Napište definici slabě samodružné množiny při afinním zobrazení *f*.

1. Udejte příklad afinity s charakteristikou k = 2 v A_2

2. Rovnice otočení o 30^{o} kolem bodu [-1,1]

3. Udejte příklad lineárního zobrazení s vlastními čísly 0 a 1.

4. Napište předpis pro obraz vektoru $\overline{AB}$ v asociovaném lin. zobrazení k af. zobrazení *f*.

1. Udejte příklad elace v A_3

2. Rovnice otočení o 330^{o} kolem bodu [1,0]

3. Udejte příklad lineárního zobrazení s vlastními čísly -2 a 0.

4. Napište definici silně samodružné množiny při afinním zobrazení *f*.

1. Zvolte body a jejich obrazy tak, aby zobrazení které určují , bylo projekcí.

2. Rovnice otočení o 45^{o} kolem bodu [1,0]

3. Udejte příklad lineárního zobrazení s vlastními čísly 2 a -3.

4. Napište definici slabě samodružné množiny při afinním zobrazení *f*.

5. V kruhové inverzi sestrojte obraz kružnice, která prochází středem kruhové inverze.

6. Napište definici ortogonálního zobrazení.

7. Co platí pro modul afinního zobrazení *h*, které vznikne složením afinního zobrazení *g* a *f*.

8. Co platí pro vlastní směry $\underline{u}$ lineárního zobrazení φ.

1. Udejte příklad afinity s charakteristikou k = -2 v A_2.

2. Rovnice otočení o 60^{o} kolem bodu [0,-1].

3. V kruhové inverzi sestrojte obraz kružnice, která neprochází středem kruhové inverze.

4. Napište definici podobného zobrazení. Kdy podobné zobrazení nazýváme podobnost?

5. Napište podmínky, aby zobrazení φ: V--> W vektorových prostorů bylo lineární zobrazení.

6. Co platí pro vlastní směry ortogonálního zobrazení?

7. Napište definici modulu afinního zobrazení *f*.

8. Co musí splňovat afinní zobrazení, aby bylo základním afinním zobrazením?

1. Udejte příklad elace v A_3.

2. Rovnice otočení o 270^{o} kolem bodu [0,1].

3. V kruhové inverzi sestrojte obraz přímky, která neprochází středem kruhové inverze.

4. Napište definici silně samodružné množiny při afinním zobrazení *f*.

5. Kdy je lineární zobrazení φ: V--> W vektorových prostorů izomorfismus?

6. Jak je definováno sčítání vektorů v prostoru V^{C}.

7. Napište definici hodnosti lineárního zobrazení φ.

8. Jaké jsou typy základních afinních zobrazení?

1. Zvolte body a jejich obrazy tak, aby zobr. které určují , byla souměrnost podle nadroviny.

2. Rovnice středové souměrnosti se středem S=[3,0].

3. V kruhové inverzi sestrojte obraz přímky, která prochází středem kruhové inverze.

4. Napište definici shodného zobrazení. Kdy shodné zobrazení nazýváme shonost?

5. Napište definici invariantního podprostoru při lineární transormaci φ vektorového prost. V.

6. Jak je definováno násobení vektoru komplexním číslem v prostoru V^{C}.

7. Je dáno afinní zobrazení f: $X' = AX+B$. Jaký je význam sloupcové matice B?

8. Co musí splňovat afinita *f* afinního prostoru A_n, aby byla homotetií afinního prostoru A_n?

1. Jak je definováno jádro lineárního zobrazení φ ?

2. Napište rovnice posunutí o vektor (3,-1,2).

3. V kruhové inverzi zadané kružnicí *k*(S,r) sestrojte libovolně kružnici *l* tak, aby byla v dané kruhové inverzi samodružná.

4. Jaké jsou typy základních afinních zobrazení?

5. Udejte příklad afinity s charakteristikou k = 1/2 v A_2.

6. Napište definici modulu a hodnosti afinního zobrazení *f*.

7. Napište definici ortogonálního zobrazení.

8. Napište definici podobného zobrazení. Kdy shodné zobrazení nazýváme podobnost?

2. část

Určete rovnice afinního zobrazení, které je dáno body a jejich obrazy. Pro jaké hodnoty parametru je toto zobrazení afinitou.

Určete vlastní čísla a vlastní směry lin. zobrazení.

Rozložte vekt. prostor na ivariantní podprostory vzhledem k danému lin. zobrazení.

Určete bázi vekt. prostoru, ve které se matice rozpadá na diagonální bloky. Napište matice přechodu mezi bázemi.

Ověřte, že dané lin. zobrazení *f* je ortogonální a určete ivariantní podprostory vzhledem k *f*.

Jsou dány rovnice afinního zobrazení repéru *R*. Určete rovnice tohoto lin. zobr. v repéru *R´*. Určete modul a hodnost tohoto af. zobrazení.

Určete samodružné prvky a vlastní směry afinního zobrazení.

Rozložte af. zobrazení na základní afinity (případně i na projekci, pokud je hodnost af. zobrazení 0). (vědět, využít potřebné věty o počtech zobrazení a věty o modulech).

Rozložte shodnost na symetrii podle nadrovin.(využít větu o modulech - počet zobr., přímá nepřímá shodnost).

Určete rovnice af. zobrazení, které je posunutím o daný vektor a rozložte na souměrnosti podle nadrovin (využít vlastnosti, že nadroviny jsou rovnoběžné a mají poloviční vzdálenost, zadání lze obrátit).

Určete rovnice af. zobrazení, které je otočením o daný úhel a rozložte na souměrnosti podle nadrovin (využít vlastnosti, že nadroviny jsou různoběžné a svírají poloviční úhel, zadání lze obrátit).

Určete rovnice daných dvou af. zobrazení (nabídka: posunutí, symetrie, stejnolehlost, otočení, střed. souměrnost..) a určete zobrazení, které vznikne jejich složením. (využít znalosti o daných zobrazení, vl. směry a samodružné body).

Určete parametr, tak aby dané zobrazení bylo shodné, shodnost, podobné, podobnost (uvědomit si rozdíly).

Určete typ shodnosti v rovině, prostoru (tabulka ve skriptech, využití vl. směrů, sam. prvků, modulu).

Nějaký příklad na kruhovou inverzi.

Příklady

1.

Určete parametry p,q,r tak, aby zobrazení *f* byla podobnost. S vypočtenými hodnotami rozložte podobnost *f* na shodnost *g* a stejnolehlost *h* tak, aby platilo *f* = *h* o *g*.

$$\begin{aligned} x' &= x - 2y + 2z + 1 \\ y' &= px + 2y + z + 3 \\ z' &= qx + ry + 2z - 3 \end{aligned}$$

2.

Určete rovnice afinního zobrazení *f* v repéru $R\ \langle P, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle$ pokud platí: $\bar{f}\ (\bar{e}_1) = (-1,2,3)_R$, $\bar{f}\ (\bar{e}_2) = (0,2,-2)_R$, $\bar{f}\ (\bar{e}_3) = (3,-1,1)_R$, $\bar{f}\ (P) = [1,2,0]_R$. Určete modul a hodnost tohoto afinního zobrazení. Nakonec určete rovnice afinního zobrazení *f* v repéru $R^*\ \langle B, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3 \rangle$ když $\bar{u}_1 = (1,1,1)_R$, $\bar{u}_2 = (1,0,2)_R$, $\bar{u}_1 = (0,-1,0)_R$, $B = [0,1,0]_R$

3.

V E_3 určete rovnice posunutí ***t*** o vektor (4,-2,0) a rovnice souměrnosti ***s*** podle nadroviny $\gamma \equiv x - y + z = 0$ a určete zobrazení ***f*** = ***t*** o ***s***. Zobrazení *f* rozložte na souměrnosti podle nadrovin. Určete samodružné body.
.

4.

Rozložte shodnost *f* na souměrnosti podle nadrovin. *f*: x′ = y y′ = -x + 1

5.

Určete rovnice afinního zobrazení A_3 do A_3, je-li dáno: bod A[2,0,1] je samodružný. Vektory (1,0,0) a (1,1,0) jsou vlastní vektory příslušné k vlastnímu číslu 2 a vektor (0,1,2) se zobrazuje na opačný vektor. Nakonec napište rovnice tohoto zobrazení v repéru *R* {A, (0,1,2), (1,1,0) , (1,0,0) }.

6.

Sestrojte čtverec KLMN, jehož strana KL leží na základně AB rovnoramenného trojúhelníka ABC a vrchol M resp. N na protilehlé straně čtverce, leží na rameni BC resp. AC trojúhelníka ABC.

7.

Rozložte afinní zobrazení *f* na základní afinity. *f*: $x' = 2x - y + 1 \quad y' = x + y + 3$.

8.

Vypočtěte rovnice souměrnosti *f* podle roviny o rovnici $x + 2y - z + 4 = 0$ a složte ji se souměrností *g*, která zobrazuje bod B[1,2,-2] na bod *g*(B) = [3,2,0]. Nakonec určete samodružné prvky zobrazení, vlastní čísla a vlastní směry. O jaké zobrazení se jedná?

9.

Jsou dány trojúhelníky *ABC* a *KLM*, které se neprotínají. Mezi nimi je dán bod S. Veďte tímto bodem přímku tak, aby úsečka ohraničená danými trojúhelníky byla bodem *S* půlena.

10.
Určete rovnice afinního zobrazení A_3 do A_3, je-li dáno: bod A[1,0,2] je samodružný. Vektory (1,0,0) a (1,1,0) jsou vlastní vektory příslušné k vlastnímu číslu 2 a vektor (0,1,2) se zobrazuje na opačný vektor. Nakonec napište rovnice tohoto zobrazení v repéru *R* {A, (1,1,0), (0,1,2) , (1,0,0) }.

11.
V prostoru E_3 jsou dány roviny o rovnicích $x - y - 1 = 0$ a $x + y - 1 = 0$. Vypočtěte rovnice souměrností podle těchto rovin. Dále vypočtěte rovnice zobrazení, které vznikne jejich složením. Jaké zobrazení tímto složení vznikne? (určete s pomocí samodružných prvků, vlastních čísel, vlastních směrů).

12.

Určete rovnice shodného obrazení v E_3, které je otočením o 60^o kolem přímky *p*: $x'=1$ $y'=0$ $z'=t$, jako složení dvou souměrností podle nadrovin, které svírají úhel 30^o a prochází přímkou p.

13.

Určete rovnice afinního zobrazení, které je dáno body a jejich obrazy A = [1,1,1] , B = [1,2,-1], C=[0,-1,0], D = [1,0,-2] , *f*(A) = [3,3+ t,0], *f*(B) = [0,-2+ t,1-3t], *f*(C) = [2,1+ t,1+t], a *f*(D) = [1,-2+ t, -1-2t]. Pro jaké hodnoty parametru t je toto zobrazení afinitou.

14.

Sestrojte kružnici, která se dotýká soustředných kružnic k_1 a k_2 a prochází bodem *A*.

15.

Rozložte afinní zobrazení *f* na základní afinity. *f*: x′ = -x + 3y + 1 y′ = 2x - 2y + 3.
Určete obraz počátku v afinitě *f*.

16.

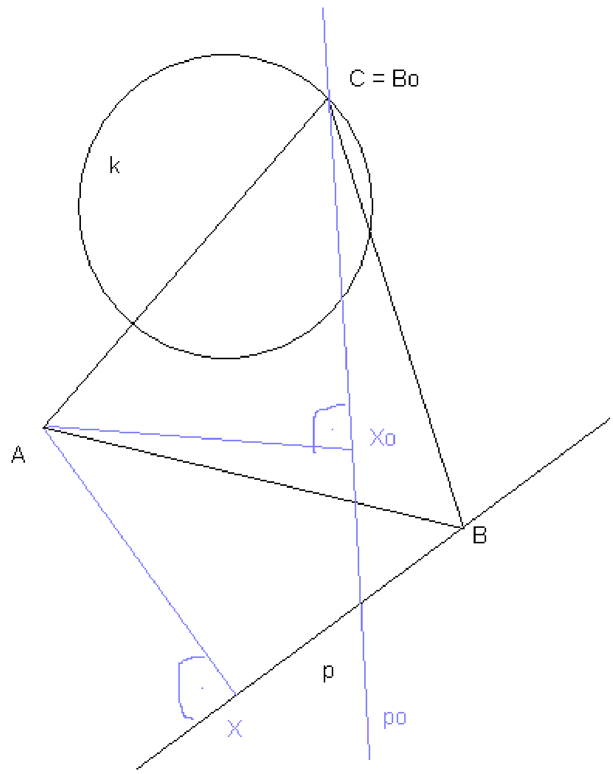
Afinní zobrazení *f*: E_2 --> E_2 zobrazí body *A*[10,0] a *B*[25,20] na body *A*′[0,0] a *B*′[0,25]. Určete rovnice afinního zobrazení *f*, tak aby bylo shodností.

17.
Jsou dány dvě kružnice *k* a *l* a úsečka *AB*. Na kružnici *k* určete bod *K* a na kružnici *l* zvolte bod *L* tak, aby přimky *KL* a *AB* byly rovnoběžné a úsečky *KL* a *AB* měly stejnou nvelikost.

Konstrukční úloha - vzor

Sestrojte rovnostranný trojúhelník s jedním daným vrcholem *A*. Vrchol *B* leží na přímce *p* a vrchol *C* leží na kružnici *k*.

Rozbor (včetně náčrtku!):



Uvažujme rotaci *R* se středem v bodě A a úhlem otočení 60 stupňů (přesněji otočení o orientovaný úhel *BAC*). Bod B_0 - otočený vrchol *B* pak splyne s vrcholem *C* (<-- troj. *ABC* je rovnostranný). Bod *B* leří na přímce *p*, proto otočený bod B_O musí ležet na otočené přímce p_0.

Bod C, který splyne s bodem B_O leží na kružnici k, proto bod $B_O=C$ leží v průsečíku kružnice k a přímky p_O - otočené přímky p. Odtud plyne postup konstrukce.

Popis konstrukce:

(A,p,k zadáno)
1. p_O ; p_O - otočená přímka pv rotaci R(A,60°) (na VŠ lze považovat za jeden krok :))
2. C; $C \in p_O \cap k$
3. B; bod B je obraz bodu C v rotaci R(A,-60°) (pozor na znaménko minus - invrerzní rotace)
4. troj. ABC

Diskuze:

Každé řešení je jednoznačně určeno získáním bodu C - průsečíku kružnice k a otočené přímky p. Dle počtu průsečíků (0,1,2) lze pak uvažovat 0,1,2 řešení. Rotaci kolem bodu A však musíme uvažovat o 60° a -60° . Úloha tak může mít 0,1,2,3 nebo 4 řešení.

(lze také postup, ve kterém otáčíme kružnici k)