FA, 7. 3. 2013

1. Ukažte, že norma $\|f\| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$ v $C[0,1]$ není vytvořena skalárním součinem.

2. Určete vzdálenost funkce $x(t) = t^2$ od podprostoru Lin $\{1, t\}$ v prostoru $L^2(0,1)$. Učete projekci této funkce na tento podprostor.

3. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je pevně zvoleno,
$$L = \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} :\ \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\}.$$
Určete bázi a dimenzi ortogonálního doplňku $L^\perp$.

4. Nechť $H^1(0,1)$ je zúplnění prostoru $C^1[0,1]$ v normě vytvořené skalárním součinem
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 [f(t)g(t) + f'(t)g'(t)]\ dt.$$
Pro množinu
$$M = \{x \in H^1(0,1) :\ x(0) = 0 = x(1)\}$$
učete bázi a dimenzi $M^\perp$. Návod, integrujte vhodně per partes.

5. Nechť a_k, $k \in \mathbb{N}$, je posloupnost kladných čísel, pro níž $\inf_{k\in\mathbb{N}} a_k > 0$. Pak množina
$$A = \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2 :\ |x_k| < a_k\}$$
je otevřená v l^2. Dokažte