FA, 28. 2. 2013

1. Nechť $X = C[0,1]$,
$$M = \{f \in C[0,1] : \int_0^1 f(t)\,dt = 0\}.$$
Určete codim M v X.

2. Rozhodněte, zda prostor
$$c = \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} : \ x_k \text{ je konvergentní } \}$$
je uzavřený podprostor v l^∞.

3. Nechť
$$X = c_0 = \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k\to\infty} x_k = 0\}, \quad \|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|,$$
$$X_1 = l^1 = \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty\}.$$
Rozhodněte, zda X_1 je uzavřený v X.

4. Určete vzdálenost funkce a) $x(t) = t$ od podprostoru konstantních funkcí, b) $x(t) = t^2$ od prostoru $\mathrm{Lin}\,\{1, t\}$, v obou případech v normě stejnoměrné konvergence prostoru $C[0,1]$.

5. V prostoru l^2 najděte vzdálenost posloupnosti $x = \{1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$ od podprostoru
$$M = \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} : x_1 + \ldots + x_n = 0\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$