

Nelineární dynamika a její aplikace

Lenka Příbylová

2. července 2012



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Dynamické systémy	4
Lineární algebra - opakování	9
Spojité dynamické systémy	10
Lineární systém - opakování	10
Nelineární autonomní systém	15
Diskrétní dynamické systémy	20
Lineární systém - opakování	20
Nelineární autonomní systém	24
Systémy závislé na parametrech, bifurkace	28
Jednparametrické bifurkace ve spojitém případě	29
Bifurkace sedlo-uzel, fold, limitní bod	30
Hystereze a náhlé skoky	34
Teorie katastrof	38
Další jednparametrické bifurkace počtu singulárních bodů	40
Hopfova bifurkace	41
Víceparametrické bifurkace	46
Redukce na centrální varietu	51
Jednparametrické bifurkace v diskretním případě	53
Bifurkace typu fold, sedlo-uzel	53
Bifurkace typu flip	54
Zdvojování periody a univerzalita	56
Deterministický chaos	57
Neimark-Sackerova bifurkace	64
Poincarého zobrazení a bifurkace cyklů	66
Chaos ve spojitých systémech	68
Model Lorenzova atraktoru	69

Dynamické systémy

Definice: Dynamickým systémem rozumíme trojici $\{T, X, \varphi^t\}$, kde T je číselná množina (čas), X je metrický prostor, který nazýváme **fázovým prostorem**, a φ^t je parametrický systém evolučních operátorů s parametrem $t \in T$ definovaných jako zobrazení $\varphi^t : X \rightarrow X$, které zobrazuje počáteční stav $x_0 \in X$ na nějaký stav $x_t = \varphi^t x_0 \in X$.

V případě, že $T = \mathbb{Z}$ mluvíme o **diskrétním** dynamickém systému, je-li $T = \mathbb{R}$ mluvíme o **spojitém** dynamickém systému.

Poznámka 1. Fakticky může jít o cokoliv měřitelného, co se mění v čase... Teplota hrnku kafe, kurz koruny, počet studentů v daném semestru...

Definice: Deterministickým dynamickým systémem rozumíme systém $\{T, X, \varphi^t\}$ splňující podmínku

$$\varphi^0 = \text{id},$$

kde id je identita na X , tj. $\forall x \in X : \text{id}x = x$. Tato vlastnost říká, že systém spontánně nemění svůj stav.

Poznámka 2. Touto podmínkou vylučujeme náhodné jevy, např. kurz koruny nebo počet studentů v daném semestru... i když prakticky vše je důsledkem toho, co již bylo... anebo tomu tak není? Z hlediska kvantové mechaniky je zase vše náhodné. Takže jde vlastně o náš přístup k věci.

Definice: Autonomním dynamickým systémem rozumíme deterministický systém $\{T, X, \varphi^t\}$ splňující podmínku

$$\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s,$$

tj. $\forall x \in X : \varphi^{t+s}x = \varphi^t(\varphi^s x)$, pokud jsou definovány obě strany rovnice. Tato vlastnost říká, že se „zákonů evoluce“ nemění během času.

Poznámka 3. Autonomní systémy jsou dány předchozími v čase měnícími se stavy, nikoliv samotným časem. Typickým spojitém příkladem je v čase měnící se stav $x(t)$ podle obyčejné diferenciální rovnice $\dot{x} = f(x)$. Typickým diskrétním příkladem je v čase skokově měnící se stav $x(n+1) = f(x(n))$.

$$\dot{x}(t) = x(t) + t \quad \text{není autonomní}$$

$$\dot{x}(t) = (x(t) + 1)^2 \quad \text{je autonomní}$$

$$x(n+1) = \frac{x(n)}{n^2} \quad \text{není autonomní}$$

$$x(n+1) = \frac{x(n)}{2} \quad \text{je autonomní}$$

Mezi autonomní rovnice se lehce zahrnou i ty, které jsou vyššího řádu, tj. obsahují v případě diferenciálních rovnic i derivace vyššího řádu nebo v případě diferenčních rovnic členy posloupnosti závisí na konečném počtu předchozích členů.

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 2x(t) = 0$$

můžeme zapsat jako systém

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) - x_2(t),\end{aligned}$$

kde $x = x_1$ a $\dot{x} = x_2$. Vektorově je to zápis

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -2x_1(t) - x_2(t) \end{pmatrix},$$

tj. $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, kde $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ a $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$. Je-li funkce \mathbf{x} lineární (jako v tomto případě), mluvíme o

lineární rovnici a lze je zapsat maticově takto $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. V našem případě je matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

V autonomním lineárním systému jsou prvky matice čísla. V obecném lineárním systému to mohou být funkce času.

$$x(n+2) + x(n+1) + 2x(n) = 0$$

můžeme zapsat jako systém

$$\begin{aligned}x_1(n+1) &= x_2(n) \\ x_2(n+1) &= -2x_1(n) - x_2(n),\end{aligned}$$

kde $x(n) = x_1(n)$ a $x(n+1) = x_2(n)$. Vektorově je to zápis

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(n), x_2(n)) \\ f_2(x_1(n), x_2(n)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(n) \\ -2x_1(n) - x_2(n) \end{pmatrix},$$

tj. $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n))$, kde $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}$ a $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$. Stejně jako ve spojitém případě mluvíme o

lineární rovnici, pokud ji můžeme zapsat maticově jako $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n)$.

Mezi autonomní systémy můžeme zahrnout i ty ODR, které původně autonomní nejsou:

$$\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) + e^t x^2(t) = 0$$

můžeme zapsat pomocí substituce $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$, $t = x_3$ jako systém

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 - e^{x_3} x_1^2 \\ \dot{x}_3 &= 1\end{aligned}$$

nebo vektorově

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 - e^{x_3} x_1^2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tj. $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, kde $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$.

Podobně pro diskrétní systémy:

$$x(n+2) - x(n+1) + nx^2(n) = 0$$

můžeme zapsat pomocí substituce $x_1(n) = x(n)$, $x_2(n) = x(n+1)$, $x_3(n) = n$ jako systém

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= x_2(n) \\ x_2(n+1) &= x_2(n) - x_3(n)x_1^2(n) \\ x_3(n+1) &= x_3(n) + 1 \end{aligned}$$

nebo vektorově

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(n), x_2(n), x_3(n)) \\ f_2(x_1(n), x_2(n), x_3(n)) \\ f_3(x_1(n), x_2(n), x_3(n)) \end{pmatrix},$$

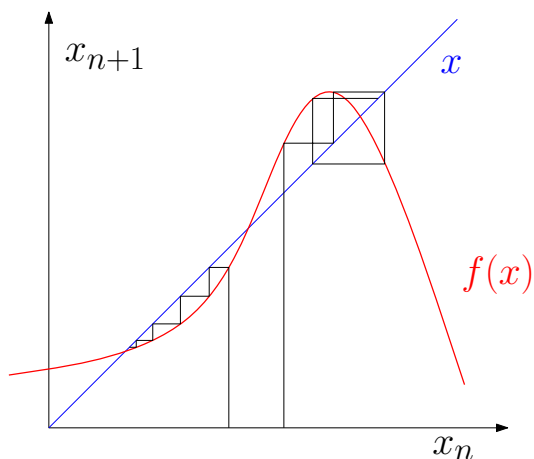
tj. $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n))$, kde $\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{pmatrix}$ a $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$.

Definice: Trajektorie s počátečním bodem $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$ je uspořádaná podmnožina fázového prostoru \mathbf{X}

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \mathbf{x} = \varphi^t \mathbf{x}_0, \forall t \in T, \text{ pro které je } \varphi^t \mathbf{x}_0 \text{ definováno}\}$$

V případě spojitého systému jde o orientované křivky v \mathbf{X} , v případě diskrétního systému jsou to posloupnosti bodů v \mathbf{X} . **Fázovým portrétem** dynamického systému rozumíme rozmístění trajektorií ve fázovém prostoru \mathbf{X} .

Trajektorie zakreslujeme často také jako funkce (posloupnosti) v $T \times \mathbf{X}$. Diskrétní trajektorie můžeme také zakreslovat pomocí tzv. pavučinového diagramu:



Příklad. Nakreslete trajektorii $\dot{x} = -x$ s počátečním bodem (podmínkou) $x_0 = 1$. Nakreslete ji v \mathbf{X} i v $T \times \mathbf{X}$.

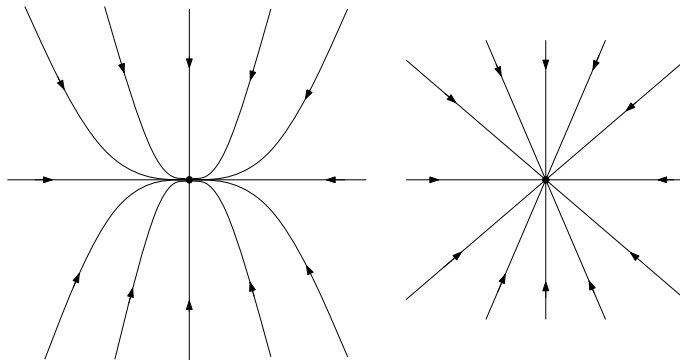
Příklad. Nakreslete trajektorii $x(n+1) = \frac{1}{2}x(n)$ s počátečním bodem (podmínkou) $x(0) = 1$. Nakreslete ji v \mathbf{X} i v $T \times \mathbf{X}$. Nakreslete také pavučinový diagram $(x(n+1))$ versus $x(n)$.

Definice: Dynamický systém $D_1 = \{T, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ se nazývá **topologicky ekvivalentní** dynamickému systému $D_2 = \{T, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$, jestliže existuje **homeomorfismus** $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, které zobrazuje trajektorie systému D_1 na trajektorie systému D_2 , přičemž zachovává jejich orientaci. Často v takovém případě mluvíme také o (topologicky) **ekvivalentních fázových portrétech**.

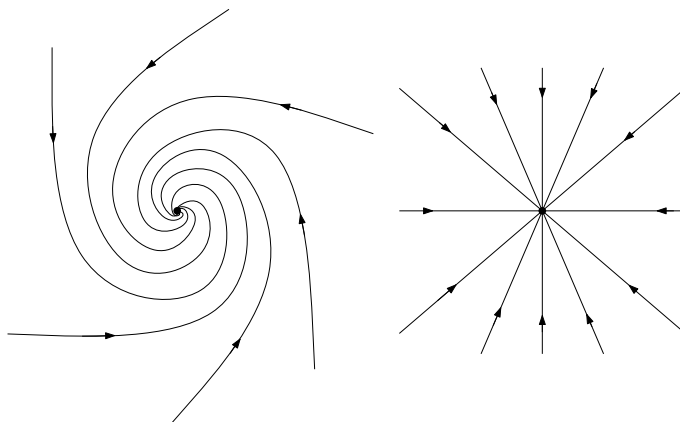
Poznámka 4. Homeomorfismus je invertibilní zobrazení, které je spojitě a jehož inverzní zobrazení je také spojitě.

Poznámka 5. Trajektorie systému D_1 se tedy dají jednoznačně přiřadit (i s orientací, resp. uspořádáním) k trajektoriím systému D_2 tak, aby si vzájemně odpovídaly „sousední“ body, lokální okolí. Nezajímají nás geometrické vzdálenosti a vztahy, ale topologické vlastnosti.

Topologicky ekvivalentní spojitá dynamika v rovině:



Topologicky ekvivalentní spojitá dynamika v rovině:



Definice: Bod $x_0 \in X$ nazýváme **singulárním bodem** (nebo též rovnovážným, stacionárním, pevným bodem) dynamického systému, jestliže pro všechna $t \in T$ platí

$$\varphi^t x_0 = x_0.$$

Definice: **Cyklem** rozumíme periodickou trajektorii L , která není singulárním bodem, splňující $\forall x_0 \in L$

$$\varphi^{t+T_0}x_0 = \varphi^t x_0,$$

pro nějaké $T_0 > 0, \forall t \in T$. Nejmenší takové T_0 nazýváme periodou cyklu L .

Poznámka 6. V systému s cyklem vznikají periodické oscilace. Cyklus spojitého systému je uzavřená křivka v X . Cyklem diskrétního systému je konečná uspořádaná k -tice bodů z X . Limitním cyklem rozumíme cyklus, v jehož okolí nejsou jiné cykly.

Poznámka 7. U diskrétního systému $x(n+1) = f(x(n))$ mluvíme často o cyklu délky $k = T_0$, protože jde o uspořádanou k -tici

$$x(0), x(1), x(2), \dots, x(k-1),$$

pro kterou platí $x(1) = f(x(0)), x(2) = f(x(1)), \dots,$
 $x(k) = x(0) = f(x(k-1))$. Uvědomme si navíc, že

$$x(0) = f(x(k-1)) = f(f(x(k-2))) = \dots = f^{(k)}(x(0))$$

a tedy $x(0)$ je nutně pevným bodem dynamického systému

$$x(n+1) = f^{(k)}(x(n)).$$

Definice: **Invariantní množinou** S rozumíme podmnožinu X splňující

$$x_0 \in S \Rightarrow \varphi^t x_0 \in S \quad \forall t \in T.$$

Poznámka 8. Singulární bod i cyklus jsou invariantní množiny.

Definice: Invariantní množina S se nazývá **stabilní**, jestliže

- $\forall U \supset S$ libovolně malé okolí invariantní množiny existuje okolí $V \supset S$ takové, že $\forall x \in V$ a $\forall t > 0$ platí $\varphi^t x \in U$ (tento typ stability nazýváme **Ljapunovskou stabilitou**),
- existuje okolí $U_0 \supset S$ takové, že $\varphi^t x \rightarrow S$ pro $x \in U_0$ a $t \rightarrow \infty$ (tento typ stability nazýváme **asymptotickou stabilitou**).

Lineární algebra - opakování

Pro vlastní číslo (vlastní hodnotu) matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ příslušné vlastnímu vektoru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

tj. vlastní čísla hledáme jako kořeny charakteristického polynomu

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Matice \mathbf{A} má v komplexním oboru n vlastních hodnot $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ a příslušné vlastní vektory $\{\mathbf{v}_{\lambda_1}, \dots, \mathbf{v}_{\lambda_n}\}$ tvoří bázi \mathbb{C}^n . Matice \mathbf{T} tvořená vlastními vektory (po sloupcích) pak splňuje

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

V případě násobných vlastních hodnot může obsahovat bloky tvaru $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, přičemž sloupce matice \mathbf{T} v tomto případě tvoří tzv. zobecněné vlastní vektory. Jde o vektor splňující $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ a další vektor \mathbf{w} , který splňuje $\mathbf{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} + \mathbf{v}$. Pokud je násobnost vlastní hodnoty vyšší než dva, bude se takto vytvářet kaskáda zobecněných vlastních vektorů \mathbf{w}_{i+1} splňující $\mathbf{A}\mathbf{w}_{i+1} = \lambda\mathbf{w}_{i+1} + \mathbf{w}_i$, která bude spolu s vektorem \mathbf{v} tvořit bázi prostoru zobecněných vlastních vektorů. Lineární regulární transformace $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ převádí na komplexní Jordanův kanonický tvar. Reálný tvar s reálným blokem $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ dostaneme, pokud použijeme místo komplexně sdružených vektorů \mathbf{v} a $\bar{\mathbf{v}}$ reálnou a imaginární část \mathbf{u} a \mathbf{w} vektoru $\mathbf{v} = \mathbf{u} + i\mathbf{w}$.

Spojité dynamické systémy

Nejprve budeme studovat deterministický autonomní dynamický systém, který je dán systémem diferenciálních rovnic:

Definice: Autonomním systémem diferenciálních rovnic rozumíme systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbf{X} = \mathbb{R}^n$ a vektorová funkce $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je dostatečně hladká. Symbolem $\dot{\mathbf{x}}$ rozumíme derivaci \mathbf{x} podle času $t \in T = \mathbb{R}$.

Poznámka 9. Singulární body autonomního systému (1) splňují systém rovnic

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Lineární systém - opakování

Uvažujme lineární autonomní systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (2)$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbf{X} = \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Necht' $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice \mathbf{A} a \mathbf{v} příslušný vlastní vektor.

- V případě $\lambda \in \mathbb{R}$ je $t \mapsto e^{\lambda t} \mathbf{v}$ reálným řešením rovnice (2).
- V případě $\lambda \in \mathbb{R}$, které je k -násobným kořenem charakteristického polynomu jsou $t \mapsto e^{\lambda t} \sum_{j=1}^i \frac{t^{i-j} \mathbf{v}_j}{(i-j)!}$, $i = 1, \dots, k$ reálnými řešeními rovnice (2), kde \mathbf{v}_i je systém k zobecněných vlastních vektorů ($\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i-1}$ pro $i > 1$).
- V případě $\lambda = \alpha \pm i\beta$ je vlastní vektor $\mathbf{v} = \mathbf{u} \pm i\mathbf{w}$ a reálnými řešeními rovnice (2) jsou pak

$$t \mapsto e^{\alpha t} (\cos \beta t \cdot \mathbf{u} - \sin \beta t \cdot \mathbf{w}), t \mapsto e^{\alpha t} (\sin \beta t \cdot \mathbf{u} + \cos \beta t \cdot \mathbf{w}).$$

Uvedená řešení jsou lineárně nezávislá a tvoří bázi prostoru řešení. Jejich lineární kombinace je také řešením (2). Maticové zobrazení $t \mapsto \Phi(t)$ těchto řešení se nazývá fundamentální matice řešení příslušného homogenního lineárního systému (2).

Singulárním bodem systému (2) je počátek, který je asymptoticky (dokonce exponenciálně) stabilní, pokud mají všechny vlastní hodnoty zápornou reálnou část. V případě, že má některá vlastní hodnota kladnou reálnou část, je počátek nutně nestabilní. V případě nulové vlastní hodnoty má systém (2) konstantní nenulová řešení (počátek tedy nemůže být asymptoticky stabilní), v případě ryze imaginárních vlastních hodnot existují periodická řešení (a také nemůže být počátek asymptoticky stabilní).

Lineární diferenciální rovnice bývají často zapsány ve tvaru

$$0 = a_m x^{(m)}(t) + a_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t).$$

V takovém případě hledáme vlastní čísla jako kořeny charakteristického polynomu

$$p(\lambda) = a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + a_0.$$

Poznámka 10. Pokud je levá strana rovnice nenulová, tj. ve tvaru $f(t) = \dots$ (nehomogenní rovnice), pak obecné řešení nehomogenní rovnice je součtem libovolného partikulárního řešení nehomogenní rovnice a obecného řešení příslušné lineární homogenní rovnice (s nulovou levou stranou).

Polynom $p(\lambda)$ je ve skutečnosti charakteristickým polynomem $\det(A - \lambda I)$ lineárního systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{m-1}(t) &= x_m(t), \\ \dot{x}_m(t) &= -\frac{1}{a_m}(a_{m-1}x_m(t) + \dots + a_0x_1(t)), \end{aligned}$$

kde $x_1(t) = x(t)$

Příklad . Dokažte uvedené tvrzení pro

$$0 = a\ddot{x} + b\dot{x} + cx$$

tj. ukažte, že kořeny $p(\lambda)$ jsou vlastní čísla Jacobiho matice jistého dvourozměrného lineárního systému.

Příklad . Najděte obecné řešení lineárního systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_1 + 5x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2. \end{aligned}$$

Řešení:

Matice systému: $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

Matice systému má vlastní čísla $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -1$ a příslušné vlastní vektory splňují $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 3: & \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = -1: & \quad \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zavedme vhodnou lineární transformaci.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{u} &\Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{T}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{u} \end{aligned}$$

Matice systému bude v Jordanově tvaru $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, pokud $\mathbf{T} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ \dot{u}_1 &= 3u_1 \\ \dot{u}_2 &= -u_2 \end{aligned}$$

Systém se tedy rozpadne na dvě samostatné rovnice.

Řešení:

$$u_1(t) = c_1 e^{3t}, \quad u_2(t) = c_2 e^{-t}$$

Řešení původního systému tedy dostaneme zpětnou transformací:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^{-t} \end{pmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} \\ -c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Příklad . Najděte obecné řešení lineárního systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 6x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + 3x_2. \end{aligned}$$

Řešení:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 6 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 15 = (\lambda - 5)(\lambda + 3) = 0.$$

Najdeme vlastní čísla a příslušné vlastní vektory.

$$\lambda_1 = 5: \quad \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -3: \quad \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Řešení je násobkem matice složené z vlastních vektorů a vektoru exponenciál:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{5t} \\ c_2 e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{5t} + 3c_2 e^{-3t} \\ c_1 e^{5t} - c_2 e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Příklad . Najděte obecné řešení lineárního systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - 1x_2. \end{aligned}$$

Řešení:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$$

Matice systému má dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_1 = 1$.

$$\lambda_1 = 1: \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektorový prostor je deficientní, nemá dimenzi 2, pouze 1, vytvoříme proto druhý vektor splňující $A\mathbf{v}_2 = \lambda_1\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$.

$$A\mathbf{v}_2 = \lambda_1\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1: \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Vektory $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ tvoří bázi tzv. zobecněného prostoru vlastních vektorů. Zavedme vhodnou lineární transformaci.

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{T}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{u} \end{aligned}$$

Pro $\mathbf{T} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ bude matice systému v Jordanově tvaru. V případě, že by šlo o nedeficientní prostor vlastních vektorů a nevytvářeli bychom zobecněný vlastní vektor, byla by v pravém horním rohu Jordanovy matice nula.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ \dot{u}_1 &= u_1 + u_2 \\ \dot{u}_2 &= u_2 \end{aligned}$$

Systém se tentokrát nerozpadne na dvě samostatné rovnice, ale lze jej "zespondu vyřešit".

Řešení:

$u_2(t) = c_2 e^t$, dosazením do první rovnice máme nehomogenní lineární diferenciální rovnici 1. řádu.

$$\dot{u}_1 - u_1 = c_2 e^t.$$

Můžeme ji řešit např. vynásobením faktorem $e^{-\lambda_1 t}$ nebo variací konstanty. Násobení faktorem e^{-t} bude rychlejší.

$$\dot{u}_1 e^{-t} - u_1 e^{-t} = \frac{du_1 e^{-t}}{dt} = c_2.$$

Odtud $u_1 = (c_1 + c_2 t)e^t$

Řešení původního systému dostaneme zpětnou transformací.

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \begin{pmatrix} (c_1 + c_2 t)e^t \\ c_2 e^t \end{pmatrix} = (c_1 + c_2 t)e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1 + c_2 t + c_2)e^t \\ (c_1 + c_2 t + \frac{1}{2}c_2)e^t \end{pmatrix}.$$

Příklad . Najděte obecné řešení lineárního systému

$$\dot{x}_1 = x_1 - 4x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2.$$

Řešení:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -4 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = 1 \pm 2i$$

Maticový systém má komplexně sdružená vlastní čísla $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$.

Příslušné komplexní vlastní vektory splňují $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = (1 + 2i)\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = (1 - 2i)\mathbf{v}_2$, jsou komplexně sdružené $\mathbf{v}_1 = \overline{\mathbf{v}_2}$

$$\lambda_1 = 1 + 2i: \quad \begin{pmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 - 2i: \quad \begin{pmatrix} 2i & -4 \\ 1 & 2i \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Řešení v komplexním oboru tedy najdeme již známou metodou vlastních vektorů, přitom $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2i & -2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{(1+2i)t} \\ c_2 e^{(1-2i)t} \end{pmatrix}.$$

Označme $\mathbf{u} = \operatorname{Re} \mathbf{v}_1$ a $\mathbf{w} = \operatorname{Im} \mathbf{v}_1$, tedy $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u} + i\mathbf{w}$ a $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u} - i\mathbf{w}$.

Pak platí

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (\mathbf{u} + i\mathbf{w}, \mathbf{u} - i\mathbf{w}) \begin{pmatrix} c_1 e^t (\cos 2t + i \sin 2t) \\ c_2 e^t (\cos 2t - i \sin 2t) \end{pmatrix} \\ &= c_1 e^t \cos 2t \mathbf{u} - c_1 e^t \sin 2t \mathbf{w} + c_2 e^t \cos 2t \mathbf{u} - c_2 e^t \sin 2t \mathbf{w} \\ &\quad + i c_1 e^t \cos 2t \mathbf{w} + i c_1 e^t \sin 2t \mathbf{u} - i c_2 e^t \cos 2t \mathbf{w} - i c_2 e^t \sin 2t \mathbf{u} \\ &= (c_1 + c_2) e^t \cos 2t \mathbf{u} - (c_1 + c_2) e^t \sin 2t \mathbf{w} \\ &\quad + i(c_1 - c_2) e^t \cos 2t \mathbf{w} + i(c_1 - c_2) e^t \sin 2t \mathbf{u} \\ &= e^t (k_1 \cos 2t + k_2 \sin 2t) \mathbf{u} + e^t (k_2 \cos 2t - k_1 \sin 2t) \mathbf{w} \end{aligned}$$

Konstanty $k_1 = c_1 + c_2$ a $k_2 = i(c_1 - c_2)$ jsou obecně komplexní, pokud jsou reálné, dostáváme reálné řešení \mathbf{x} . Maticově lze řešení zapsat jako

$$\mathbf{x} = \mathbf{TR} \begin{pmatrix} k_1 e^t \\ k_2 e^t \end{pmatrix}$$

kde $\mathbf{T} = (\mathbf{u}, \mathbf{w})$ a $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}$ je matice rotace o úhel $2t$. Řešení se budou po spirále vzdalovat od počátku. Je zřejmé, že $x_1(0) = k_1$, $x_2(0) = k_2$.

Nelineární autonomní systém

Nelineární úlohu (1) se singulárním bodem \mathbf{x}_0 lze posunutím tohoto bodu do počátku převést na tvar

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (3)$$

kde $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ je Jacobiho matice \mathbf{f} v singulárním bodě \mathbf{x}_0 a $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x}\|)$ pro $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$, což znamená, že

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0.$$

Často dokonce $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| \leq k \|\mathbf{x}\|^2$ na $\|\mathbf{x}\| < a$ ($a > 0, k > 0$). Je-li $t \mapsto \Phi(t)$ fundamentální matice řešení příslušného homogenního lineárního systému tvaru (2), pak metodou variace konstanty dostáváme řešení úlohy (3) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(t_0) = \xi$ tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\xi + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{g}(\mathbf{x}(s)) ds.$$

V případě, že \mathbf{A} má pouze vlastní hodnoty se zápornými reálnými částmi odtud lze (pomocí Gronwallova lemmatu) ukázat, že existují $a, b, c > 0$ takové, že každé řešení (3) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(0) = \xi, \|\xi\| \leq b$ splňuje pro $t \geq t_0$

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq c \|\xi\| e^{-a(t-t_0)}.$$

Dostáváme tedy následující tvrzení:

Věta (Ljapunovova věta): Uvažujme systém (1) a jeho singulární bod \mathbf{x}_0 . Označme $\mathbf{J} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ Jacobiho matici v bodě \mathbf{x}_0 . Pak \mathbf{x}_0 je stabilní, jestliže všechna vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ matice \mathbf{J} splňují $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$. (Takový singulární bod nazýváme atraktorem.)

Poznámka 11. „Obrácením běhu času“, tj. pro $t \rightarrow -\infty$, můžeme analogicky odvodit Ljapunovovu větu pro nestabilní „odpuzející“ singulární bod (tzv. repeler). V takovém případě musí všechna vlastní čísla splňovat $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$.

Definice: Singulární bod \mathbf{x}_0 systému (1) nazveme **hyperbolickým singulárním bodem**, jestliže žádná z vlastních hodnot příslušné Jacobiho matice $\mathbf{J} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ neleží na imaginární ose.

Věta (Grobmanova-Hartmanova, věta o linearizaci):

Systém (1) je v okolí svého hyperbolického singulárního bodu \mathbf{x}_0 lokálně topologicky ekvivalentní se svou linearizací

$$\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}.$$

Důkaz naleznete např. v [originálním článku](#) a také v mnoha monografiích.

Poznámka 12. Systémy tvaru (1) v okolí hyperbolických singulárních bodů \mathbf{x}_0 a \mathbf{y}_0 jsou tedy lokálně topologicky ekvivalentní právě tehdy, když tyto singulární body mají stejný počet n_- a n_+ vlastních hodnot s $\text{Re } \lambda < 0$ a $\text{Re } \lambda > 0$.

Poznámka 13. Fázové portréty v rovině.

Uvažujme dvourozměrný systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2,$$

kde \mathbf{f} je hladká funkce. Předpokládejme, že $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ je singulární bod, tj. $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$, a $\mathbf{J} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ je příslušná Jacobiho matice v tomto bodě. Matice \mathbf{J} má pak dvě vlastní hodnoty λ_1, λ_2 , které jsou kořeny charakteristické rovnice

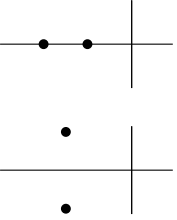
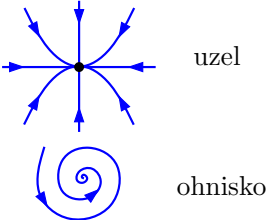
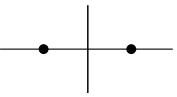
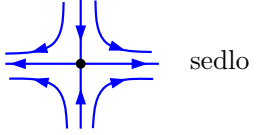
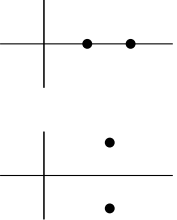
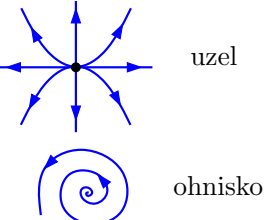
$$\det(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

kde $\sigma = \text{tr } \mathbf{J} = \lambda_1 + \lambda_2$ je stopa Jacobiho matice a $\Delta = \det \mathbf{J} = \lambda_1\lambda_2$ je její determinant.

Věta: Postačujícími podmínkami asymptotické stability singulárního bodu spojitého systému (1) v rovině jsou podmínky

$$\Delta = \det \mathbf{J} > 0 \quad \text{a} \quad \sigma = \text{tr } \mathbf{J} < 0.$$

Topologická klasifikace hyperbolického singulárního bodu v rovině:

(n_+, n_-)	Vlastní hodnoty	Fázový portrét	Stabilita
$(0, 2)$			stabilní
$(1, 1)$			nestabilní
$(2, 0)$			nestabilní

Příklad . Najděte vlastní čísla a podle nich klasifikujte systém

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y^2 \\ \dot{y} &= -y + x - 2y^2 \end{aligned}$$

v okolí jeho singulárního bodu.

Řešení:

Z nulovosti pravé strany první rovnice máme $x = -y^2$, což dává po dosazení do pravé strany druhé rovnice $-y - y^2 - 2y^2 = -y(1 + 3y) = 0$. Singulární body jsou dva $[0, 0]$ a $[-1/9, -1/3]$. Jacobiho matice je

$$\mathbf{J} = D\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 1 & -1 - 4y \end{pmatrix},$$

$$\text{tj. } \mathbf{J}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla splňují $\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = 0$,

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -(1 - \lambda)(1 + \lambda) = 0,$$

tj. $\lambda_1 = 1 > 0$, $\lambda_2 = -1 < 0$ a $[0, 0]$ je SEDLO.

$$\mathbf{J}\left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -\frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)\left(\frac{1}{3} - \lambda\right) + \frac{2}{3} = \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + 1 = 0,$$

tj. $\lambda_{1,2} = \frac{2}{3} \pm i\frac{\sqrt{5}}{3}$ a $[-1/9, -1/3]$ je NESTABILNÍ OHNISKO.

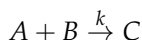
V programu XPPAUT spustte prik1ad1.ode

V tomto okamžiku shrňme informace pro spojitý autonomní systém. Na nelineární systém můžeme v okolí hyperbolických singulárních bodů hledět jako na mírně deformovaný lineární systém (mluvíme o tzv. perturbovaném systému), jehož chování se od nelineárního nijak kvalitativně neliší. Pro stabilitu či nestabilitu singulárního bodu jsou podstatná znaménka reálné části vlastních hodnot matice (pouze !!!) prvních parciálních derivací funkce f , tzv. Jacobiho matice. Oscilace jsou způsobeny komplexními vlastními hodnotami.

Nic nevíme o situaci, kdy vlastní hodnoty mají v singulárním bodě nulovou reálnou část, tj. v případě, kdy nejde o hyperbolický singulární bod.

Model Michaelis-Mentenové, enzymatická kinetika

Chemické a biochemické reakce je vhodné popisovat pomocí diferenciálních rovnic. Elementární reakce podléhají kinetické rovnici, která popisuje rychlost, se kterou interagují dvě látky a vytvářejí třetí:

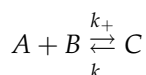


Koncentrace látek se značí v hranatých závorkách a uvedenou reakci můžeme popsat rovnicí

$$\frac{d[C]}{dt} = k[A][B],$$

kde derivace koncentrace $[C]$ je okamžitá změna koncentrace $[C]$, tedy rychlost, s jakou je tvořen produkt reakce. Konstanta k je rychlostní konstanta, která vlastně konstantou není – závisí např. na teplotě nebo homogenitě směsi. Budeme ale předpokládat, že se teplota nemění a látky jsou dobře promíchané.

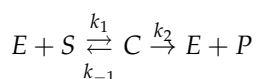
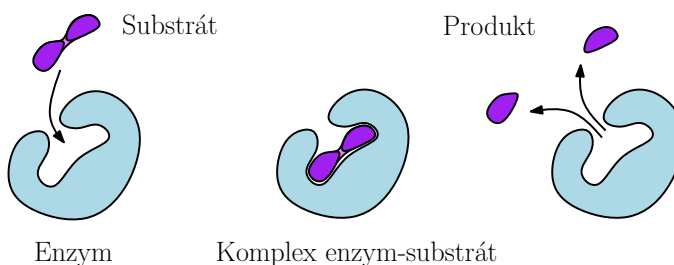
Většina biochemických reakcí probíhá oběma směry:



Změna koncentrace $[A]$ pak splňuje

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_+[A][B] + k_-[C].$$

Ve skutečnosti je většina reakcí složitější a bude tedy popsána systémem diferenciálních rovnic. Enzymy E jsou katalyzátory chemických reakcí, při kterých pomáhají ze substrátu S vytvořit produkt P , přičemž z reakce vycházejí samy v nezměněné formě.



Kinetické rovnice reakcí tedy můžeme popsat následujícími diferenciálními rovnicemi:

$$\begin{aligned} \frac{d[S]}{dt} &= k_{-1}[C] - k_1[S][E], \\ \frac{d[E]}{dt} &= (k_{-1} + k_2)[C] - k_1[S][E], \\ \frac{d[C]}{dt} &= k_1[S][E] - (k_2 + k_{-1})[C], \\ \frac{d[P]}{dt} &= k_2[C]. \end{aligned}$$

Navíc předpokládáme, že produkt P okamžitě odebíráme, aby nešel do zpětné reakce. Je evidentní, že platí

$$\frac{d[E]}{dt} + \frac{d[C]}{dt} = 0,$$

tj. $[E] + [C] = e_0$ je počáteční koncentrace enzymu, $[E]$ tedy můžeme eliminovat. Rovnici produktu můžeme oddělit a integrovat zvlášť.

Označme $[S] = s$ a $[C] = c$. Úpravou tedy dostáváme dvě diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned}\dot{s} &= k_{-1}c - k_1s(e_0 - c), \\ \dot{c} &= k_1s(e_0 - c) - (k_2 + k_{-1})c\end{aligned}$$

s počátečními podmínkami $c(0) = 0$ a $s(0) = s_0 \gg e_0$.

Příklad. Dokažte, že počátek je asymptoticky stabilní singulární bod.

Příklad. Nakreslete fázový portrét a graficky analyzujte systém a nakreslete přibližně tvar řešení s uvedenou počáteční podmínkou.

Příklad. Prozkoumejte model v programu XPPAUT. Spustte XPPAUT a otevřte soubor MichaelisMenten.ode.

[Prostudujte článek o modelu diety.](#)

Prozkoumejte model v programu XPPAUT.

Diskrétní dynamické systémy

Definice: Autonomním systémem diferenčních rovnic rozumíme systém

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n)), \quad (4)$$

kde $\mathbf{x}(n) \in \mathbf{X} = \mathbb{R}^m$ a vektorová funkce $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ je dostatečně hladká.

Poznámka 14. Pevné body \mathbf{x}_0 autonomního systému (4) splňují systém rovnic

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0.$$

Lineární systém - opakování

Uvažujme lineární diferenční autonomní systém

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n), \quad (5)$$

kde $\mathbf{x}(n) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $n \in \mathbb{N}_0$ s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Odtud $\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0$. Necht' $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice \mathbf{A} a \mathbf{v} příslušný vlastní vektor.

- V případě $\lambda \in \mathbb{R}$ je $\mathbf{x}(n) = \lambda^n \mathbf{v}$ reálným řešením rovnice (5).
- V případě $\lambda \in \mathbb{R}$, které je k -násobným kořenem charakteristického polynomu se zobecněnými vlastními vektory \mathbf{v}_i , $i = 1, \dots, k$, jsou $\mathbf{x}(n) = \sum_{j=1}^i \lambda^{n-i+j} \frac{n^{i-j} \mathbf{v}_i}{(i-j)!}$, $i = 1, \dots, k$ reálnými řešeními rovnice (5).
- V případě $\lambda = \alpha \pm i\beta$ je vlastní vektor $\mathbf{v} = \mathbf{u} \pm i\mathbf{w}$ a reálnými řešeními rovnice (5) jsou pak

$$\mathbf{x}(n) = |\lambda|^n (\cos \varphi n \cdot \mathbf{u} - \sin \varphi n \cdot \mathbf{w}), \quad \mathbf{x}(n) = |\lambda|^n (\sin \varphi n \cdot \mathbf{u} + \cos \varphi n \cdot \mathbf{w}),$$

$$\text{kde } \varphi = \arctg \frac{\beta}{\alpha}.$$

Označme vlastní hodnoty sestupně $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m|$. Protože \mathbf{x}_0 můžeme zapsat jako lineární kombinaci nezávislých vlastních vektorů $\{\mathbf{v}_{\lambda_1}, \dots, \mathbf{v}_{\lambda_m}\}$ (tvoří bázi):

$$\mathbf{x}_0 = k_1 \mathbf{v}_{\lambda_1} + k_2 \mathbf{v}_{\lambda_2} + \dots + k_m \mathbf{v}_{\lambda_m},$$

můžeme řešení $\mathbf{x}(n)$ zapsat obdobně jako v následujícím případě různých vlastních hodnot vytknutím λ_1^n takto

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= \mathbf{A}^n (k_1 \mathbf{v}_{\lambda_1} + k_2 \mathbf{v}_{\lambda_2} + \dots + k_m \mathbf{v}_{\lambda_m}) \\ &= k_1 \lambda_1^n \mathbf{v}_{\lambda_1} + k_2 \lambda_2^n \mathbf{v}_{\lambda_2} + \dots + k_m \lambda_m^n \mathbf{v}_{\lambda_m} \\ &= \lambda_1^n (k_1 \mathbf{v}_{\lambda_1} + k_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \mathbf{v}_{\lambda_2} + \dots + k_m \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^n \mathbf{v}_{\lambda_m}) \end{aligned}$$

Pevným bodem systému (5) je počátek, který je asymptoticky (dokonce exponenciálně) stabilní, pokud $|\lambda_1| < 1$. V případě $|\lambda_1| > 1$ je počátek nutně nestabilní. Je-li $|\lambda_1| = 1$, nemůže být počátek asymptoticky stabilní.

Lineární diferenční rovnice bývají často zapsány ve tvaru

$$0 = a_m x(n+m) + a_{m-1} x(n+m-1) + \dots + a_0 x(n).$$

V takovém případě hledáme vlastní čísla jako kořeny charakteristického polynomu

$$p(\lambda) = a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + a_0.$$

Poznámka 15. Pokud je levá strana rovnice nenulová, tj. ve tvaru $f(t) = \dots$ (nehomogenní rovnice), pak obecné řešení nehomogenní rovnice je součtem libovolného partikulárního řešení nehomogenní rovnice a obecného řešení příslušné lineární homogenní rovnice (s nulovou levou stranou).

Polynom $p(\lambda)$ je ve skutečnosti charakteristickým polynomem $\det(A - \lambda I)$ lineárního systému

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= x_2(n), \\ &\vdots \\ x_{m-1}(n+1) &= x_m(n), \\ x_m(n+1) &= -\frac{1}{a_m}(a_{m-1}x_m(n) + \dots + a_0x_1(n)), \end{aligned}$$

kde $x_1(n) = x(n)$.

Příklad . Najděte obecné řešení lineárního systému

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= x_1(n) + \frac{1}{2}x_2(n) \\ x_2(n+1) &= x_1(n) + \frac{3}{2}x_2(n). \end{aligned}$$

Řešení:

Matice systému: $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1 = (\lambda - 2)(\lambda - \frac{1}{2}) = 0.$$

Matice systému má vlastní čísla $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Příslušné vlastní vektory splňují $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$:

$$\lambda_1 = 2: \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}: \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zaveďme vhodnou lineární transformaci.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{u} &\Rightarrow \mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) \\ \mathbf{T}\mathbf{u}(n+1) &= \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{u}(n) \\ \mathbf{u}(n+1) &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{u}(n) \end{aligned}$$

Matice systému bude v Jordanově tvaru $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, pokud $\mathbf{T} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

$$\begin{pmatrix} u_1(n+1) \\ u_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \end{pmatrix}$$

Systém se tedy rozpadne na dvě samostatné rovnice.

$$\begin{aligned} u_1(n+1) &= 2u_1(n) \\ u_2(n+1) &= \frac{1}{2}u_2(n). \end{aligned}$$

Řešení: $u_1(n) = c_1 2^n$, $u_2(n) = c_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Řešení původního systému tedy dostaneme zpětnou transformací.

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \begin{pmatrix} c_1 2^n \\ c_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} = c_1 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 2^n + c_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ c_1 2^{n+1} - c_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Příklad . Najděte obecné řešení lineárního systému

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= -4x_1(n) + 9x_2(n) \\ x_2(n+1) &= -4x_1(n) + 8x_2(n). \end{aligned}$$

Řešení:

Matice systému: $A = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -4 - \lambda & 9 \\ -4 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

Matice systému má dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_1 = 2$

$$\lambda_1 = 2: \quad \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

s deficientním vlastním vektorovým prostorem. Vytvoříme proto druhý vektor splňující $A\mathbf{v}_2 = \lambda_1\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$.

$$A\mathbf{v}_2 = \lambda_1\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1: \quad \begin{pmatrix} -6 & 9 & 3 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektory $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ tvoří bázi zobecněného prostoru vlastních vektorů. Zavedme vhodnou lineární transformaci.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}\mathbf{u}(n+1) &= \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{u}(n) \\ \mathbf{u}(n+1) &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{u}(n) \end{aligned}$$

Pro $\mathbf{T} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ bude matice systému v Jordanově tvaru. Násobením matic dostáváme:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

V případě, že by šlo o nedeficientní prostor vlastních vektorů a nevytvářeli bychom zobecněný vlastní vektor, byla by v pravém horním rohu Jordanovy matice nula.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u_1(n+1) \\ u_2(n+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \end{pmatrix} \\ u_1(n+1) &= 2u_1(n) + u_2(n) \\ u_2(n+1) &= 2u_2(n)\end{aligned}$$

Systém se tentokrát nerozpadne na dvě samostatné rovnice, ale lze jej "zesponu vyřešit".

Řešení: $u_2(n) = c_2 2^n$, dosazením do první rovnice máme

$$u_1(n+1) - 2u_1(n) = c_2 2^n$$

Jde o nehomogenní lineární diferenční rovnici 1. řádu. Můžeme ji řešit např. vynásobením faktorem 2^{-n} nebo variací konstanty.

$$u_1(n+1)2^{-n} - 2u_1(n)2^{-n} = \frac{u_1(n+1)}{2^n} - \frac{u_1(n)}{2^{n-1}} = c_2.$$

Posloupnost $w(n) = \frac{u_1(n)}{2^{n-1}}$ má konstantní diference, je to lineární posloupnost s diferencí c_2 , tedy $\frac{u_1(n)}{2^{n-1}} = c_1 + c_2 n$, tj.

$$u_1(n) = (c_1 + c_2 n) 2^{n-1}$$

Řešení původního systému dostaneme zpětnou transformací.

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \begin{pmatrix} (c_1 + c_2 n) 2^{n-1} \\ c_2 2^n \end{pmatrix} = (c_1 + c_2 n) 2^{n-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (3c_1 + 3c_2 n + 2c_2) 2^{n-1} \\ (c_1 + c_2 n + c_2) 2^n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Nelineární autonomní systém

Nelineární úlohu (4) s pevným bodem \mathbf{x}_0 lze posunutím tohoto bodu do počátku převést na tvar

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(n)), \quad (6)$$

kde $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ je Jacobiho matice \mathbf{f} v singulárním bodě \mathbf{x}_0 a $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x}\|)$ pro $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$, často dokonce $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| \leq k\|\mathbf{x}\|^2$ na $\|\mathbf{x}\| < a$ ($a > 0, k > 0$). Podobně jako pro spojité systém lze pomocí diskrétní analogie Gronwallova lemmatu ukázat, že v případě, že \mathbf{A} má pouze vlastní hodnoty s absolutní hodnotou menší než 1, existují $0 < a < 1$ a $b, c > 0$ takové, že každé řešení (6) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi}$, $\|\boldsymbol{\xi}\| \leq b$ splňuje pro $n \geq n_0$

$$\|\mathbf{x}(n)\| \leq c\|\boldsymbol{\xi}\|a^{n-n_0}.$$

Dostáváme tedy analogii Ljapunovovy věty pro diskrétní případ, tedy následující tvrzení:

Věta (analogie Ljapunovovy věty): Uvažujme systém (4) a jeho pevný bod \mathbf{x}_0 . Označme $\mathbf{J} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ Jacobiho matici v bodě \mathbf{x}_0 . Pak \mathbf{x}_0 je stabilní, jestliže všechna vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ matice \mathbf{J} splňují $|\lambda_i| < 1$. (Takový pevný bod nazýváme atraktorem.)

Definice: Pevný bod \mathbf{x}_0 systému (4) nazveme **hyperbolickým pevným bodem**, jestliže žádná z vlastních hodnot příslušné Jacobiho matice $\mathbf{J} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ nemá jednotkovou velikost.

Věta (analogie Grobmanovy-Hartmanovy věty o linearizaci): Systém (4) je v okolí svého hyperbolického pevného bodu \mathbf{x}_0 lokálně topologicky ekvivalentní se svou linearizací

$$\mathbf{x}(n+1) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}(n).$$

Poznámka 16. Fázové portréty dvou systémů tvaru (4) v okolí hyperbolických pevných bodů \mathbf{x}_0 a \mathbf{y}_0 jsou lokálně topologicky ekvivalentní právě tehdy, když tyto pevné body mají stejný počet m_- a m_+ vlastních hodnot s $|\lambda| < 1$ a $|\lambda| > 1$.

Poznámka 17. Fázové portréty v rovině.

Uvažujme dvourozměrný systém

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n)), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2,$$

kde \mathbf{f} je hladká funkce. Předpokládejme, že $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ je pevný bod zobrazení f , tj. $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$, a $\mathbf{J} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ je příslušná Jacobiho matice. Matice \mathbf{J} má pak dvě vlastní hodnoty λ_1, λ_2 , které jsou kořeny charakteristické rovnice

$$\det(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

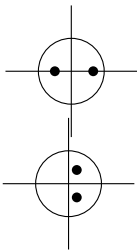

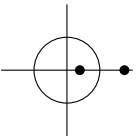
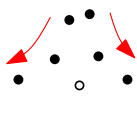
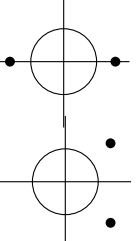
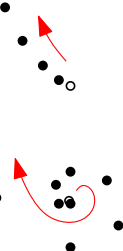
kde $\sigma = \text{tr } \mathbf{J} = \lambda_1 + \lambda_2$ je stopa Jacobiho matice a $\Delta = \det \mathbf{J} = \lambda_1\lambda_2$ je její determinant.

Věta: Postačujícími podmínkami asymptotické stability pevného bodu diskrétního systému (4) v rovině jsou podmínky

$$\begin{aligned} |\Delta| &= |\det \mathbf{J}| < 1, \\ 1 - \sigma + \Delta &= 1 - \operatorname{tr} \mathbf{J} + \det \mathbf{J} > 0 \\ 1 + \sigma + \Delta &= 1 + \operatorname{tr} \mathbf{J} + \det \mathbf{J} > 0. \end{aligned}$$

Poznámka 18. Dostali jsme zcela analogické výsledky jako ve spojitém případě. Nelineární systém můžeme v okolí hyperbolických pevných bodů vnímat jako mírně deformovaný lineární systém, jehož chování se od nelineárního nijak kvalitativně neliší.

Topologická klasifikace hyperbolického pevného bodu v rovině:

(m_+, m_-)	vlastní hodnoty	fázový portrét	stabilita
(0,2)		 uzel ohnisko	stabilní
(1,1)		 sedlo	nestabilní
(2,0)		 uzel ohnisko	nestabilní

Příklad . Najděte vlastní čísla a podle nich klasifikujte systém (zpožděná logistická rovnice)

$$\begin{aligned}x(n+1) &= rx(n)(1-y(n)), \\y(n+1) &= x(n)\end{aligned}$$

v okolí jeho pevných bodů pro $r \in (0, 1)$.

Řešení:

Z druhé rovnice máme $y = x$, což dává po dosazení do první rovnice $rx(1-x) = x$. Pevné body jsou dva $[0, 0]$ a $[\frac{r-1}{r}, \frac{r-1}{r}]$.

Jacobiho matice je $\mathbf{J} = D\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} r(1-y) & -rx \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{J}(0, 0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

vlastní čísla splňují $\det(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

$$\det(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} r - \lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(r - \lambda),$$

$\lambda_1 = 0 < 1$, $\lambda_2 = r < 1$, tedy $[0, 0]$ je STABILNÍ UZEL.

$$\mathbf{J}\left(\frac{r-1}{r}, \frac{r-1}{r}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1-r \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 - r \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - (1 - r),$$

$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(1-r)}}{2}$, tedy $[\frac{r-1}{r}, \frac{r-1}{r}]$ je NESTABILNÍ (sedlo nebo uzel).

Poznámka 19. Proč pro spojité případy je u vlastních hodnot kritickou mezí $\operatorname{Re} \lambda = 0$ a pro diskrétní $|\lambda| = 1$? Uvažujme nejjednodušší lineární diferenciální rovnici s vlastní hodnotou λ

$$\dot{x} = \lambda x.$$

Její řešení je $x(t) = ce^{\lambda t} = c(e^\lambda)^t$. Tato funkce bude konvergovat k počátku, pokud $|e^\lambda| < 1$, resp. $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Pro opačné nerovnosti bude divergovat.

Analogická lineární diferenční rovnice s vlastní hodnotou λ je

$$x(n+1) = \lambda x(n).$$

Její řešení je $x(n) = c\lambda^n$. Tato posloupnost bude konvergovat k počátku, pokud $|\lambda| < 1$ a pro opačnou nerovnost bude divergovat.

Co se stane s trajektoriemi v okolí singulárního bodu, který není hyperbolický, je těžké říct. Rozhodně nám na odpověď na tuto otázku nestačí znát pouze první derivace funkcí popisujících dynamiku. Ukazuje se, že je situace ještě daleko složitější, než by se na první pohled mohlo zdát. Nelineární perturbace mohou v okolí singulárních bodů ovlivňovat nejenom jejich stabilitu, ale mohou být původci nelineárních jevů, které jsme zatím neviděli.

Nelineární dynamika může vysvětlovat vznik limitních cyklů (v ekonomii modelovat vznik endogenních hospodářských cyklů, v biologii cykly populací predátora a kořisti), hysterezi a bistabilní stavy (v enzymatické kinetice modeluje biochemické procesy dělení buňky, v neurosciences modeluje excitabilitu neuronů, v populační biologii jevy nenadálých přemnožení apod.), dále např. vznik chaotického chování a citlivosti na počáteční podmínky (v modelech počasí, populačních modelech nebo modelech srdečního rytmu).

Všechny tyto modely mají společné to, že v "běžné" situaci jsou ustáleny právě do stabilního stavu, stabilního singulárního bodu a vychýlení z počátečních podmínek nebo malá změna parametrů systému toto nijak kvalitativně neovlivní. V situaci, kdy tyto "běžné" hodnoty parametrů opustíme, může dojít (a ve výše uvedených modelech také dochází) ke kvalitativní změně chování dynamického systému. Tato změna se nazývá

BIFURKACE DYNAMICKÉHO SYSTÉMU.

Systémy závislé na parametrech, bifurkace

Uvažujme systém diferenciálních rovnic s parametrem tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}), \quad (7)$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbf{X} = \mathbb{R}^m$ je vektor proměnných, $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^k$ je vektor parametrů a vektorová funkce $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ je dostatečně hladká.

Jestliže $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0) = \mathbf{0}$, má systém (7) singulární bod \mathbf{x}_0 pro parametr $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0$ a linearizovaný systém v tomto bodě je

$$\dot{\mathbf{u}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0)\mathbf{u},$$

kde $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0)$ značí Jacobiho matici v bodě \mathbf{x}_0 pro parametr $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0$.

Je-li pro $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ singulární bod \mathbf{x}_0 hyperbolický, je lineární transformace $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ invertibilní a věta o implicitní funkci zaručuje lokálně existenci a jednoznačnost křivky $\boldsymbol{\varepsilon} \mapsto \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon})$, která splňuje $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}_0) = \mathbf{x}_0$ a $\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}), \boldsymbol{\varepsilon}) \equiv \mathbf{0}$, tedy $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon})$ odpovídá singulárnímu bodu pro parametr $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Navíc, pokud $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0)$ má m_+ a m_- vlastních hodnot s kladnou resp. zápornou reálnou částí, bude mít v okolí $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ Jacobiho matice $D\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}), \boldsymbol{\varepsilon})$ stejný počet m_+ a m_- vlastních hodnot s kladnou resp. zápornou reálnou částí.

Uvažujme systém diferenčních rovnic s parametrem tvaru

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n), \boldsymbol{\varepsilon}), \quad (8)$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbf{X} = \mathbb{R}^m$ je vektor proměnných, $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^k$ je vektor parametrů a vektorová funkce $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ je dostatečně hladká.

Jestliže $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0) = \mathbf{x}_0$, má systém (8) pevný bod \mathbf{x}_0 pro parametr $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0$ a linearizovaný systém v tomto bodě je

$$\mathbf{u}(n+1) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0)\mathbf{u}(n),$$

kde $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0)$ značí Jacobiho matici v bodě \mathbf{x}_0 pro parametr $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0$.

Je-li pro $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ pevný bod \mathbf{x}_0 hyperbolický, je lineární transformace $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0) - \mathbf{I} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ invertibilní a věta o implicitní funkci zaručuje lokálně existenci a jednoznačnost křivky $\boldsymbol{\varepsilon} \mapsto \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon})$, která splňuje $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}_0) = \mathbf{x}_0$ a $\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}), \boldsymbol{\varepsilon}) \equiv \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon})$, tedy $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon})$ odpovídá pevnému bodu pro parametr $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Navíc, pokud $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0)$ má m_+ a m_- vlastních hodnot s velikostí větší resp. menší než 1, bude mít v okolí $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ Jacobiho matice $D\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}), \boldsymbol{\varepsilon})$ stejný počet m_+ a m_- vlastních hodnot s velikostí větší resp. menší než 1.

Hyperbolický rovnovážný bod bude mít tedy pro parametry $\boldsymbol{\varepsilon}$ dostatečně blízké $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ stejné kvalitativní vlastnosti (stabilitu, nestabilitu, dimenze stabilní a nestabilní variety). V okolí hyperbolického rovnovážného bodu závislého na parametru je tedy tento systém tzv. **strukturálně stabilní**, tj. perturbovaný systém je s ním **lokálně topologicky ekvivalentní**.

V případě, že má Jacobiho matice $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0)$ nějakou vlastní hodnotu s nulovou reálnou částí ve spojitém případě nebo s velikostí rovnou 1 v diskrétním případě ($m_0 \neq 0$), není zaručena existence ani jednoznačnost křivky $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon})$, tj. při perturbaci může dojít k zániku rovnovážného bodu (v každém okolí $\boldsymbol{\varepsilon}_0$), nebo k vzniku nové větve rovnovážných řešení (odtud vznikl název, rozvětvení = bifurkace) a samozřejmě při přechodu $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ může dojít ke změně stability, dimenze stabilní a nestabilní variety, tedy obecně k lokální kvalitativní změně chování systému.

Definice: Lokální bifurkací systému (7) resp. (8) v okolí rovnovážného bodu (x_0, ε_0) s kritickou hodnotou parametru $\varepsilon = \varepsilon_0$ rozumíme výše uvedenou kvalitativní změnu dynamiky v okolí kritické hodnoty ε_0 , tj. fázové portréty v okolí singulárního bodu x_0 při přechodu přes bifurkační parametr ε_0 nejsou lokálně topologicky ekvivalentní.

Poznámka 20. V okolí nehyperbolického singulárního bodu, kde dochází k bifurkaci, je systém strukturálně nestabilní.

Jednoperametrické bifurkace ve spojitém případě

V následujících kapitolách se zblízka podíváme na situace, kdy se chování spojitého systému lokálně kvalitativně mění právě díky nehyperbolicitě singulárního bodu. Půjde o bifurkace závislé na změně jednoho parametru, proto mluvíme o jednoperametrické bifurkaci, někdy o bifurkaci kodimenze jedna. V prostoru k parametrů je totiž taková bifurkační hranice oddělující od sebe strukturálně stabilní oblasti $(k - 1)$ - rozměrnou varietou, má tedy kodimenzi 1.

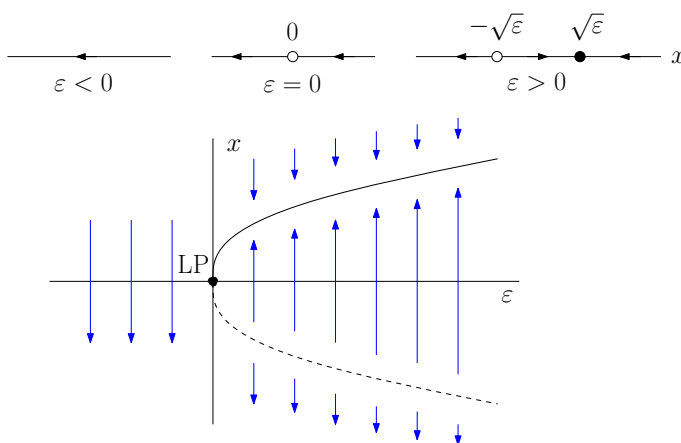
Bifurkace sedlo-uzel, fold, limitní bod

Uvažujme diferenciální rovnice s parametrem tvaru

$$\dot{x} = \varepsilon - x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Singulární body splňují $f(x, \varepsilon) := \varepsilon - x^2 = 0$, tj. leží na křivce $\varepsilon = x^2$. Pro $\varepsilon < 0$ systém (9) nemá žádný singulární bod, pro $\varepsilon = 0$ je singulární bod $x_0 = 0$ a pro $\varepsilon > 0$ jsou singulární body dva $x = \pm\sqrt{\varepsilon}$. Parametr $\varepsilon = 0$ je tedy bifurkační hodnotou a při jeho přechodu v okolí počátku dochází k lokální bifurkaci typu fold (ohyb). Bod $(x_0, \varepsilon_0) = (0, 0)$ je tzv. limitním bodem. Všimněte si, že vlastní hodnota $\lambda = Df(0, 0) = 0$.

Bifurkační diagram bifurkace typu fold:



Křivka odpovídající stabilnímu singulárnímu bodu se zakresluje plnou čarou (plný bod), nestabilnímu bodu pak čárkovaně (prázdný bod).

Věta: Předpokládejme, že jednodimenzionální jednoparametrický systém (rovnice)

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

kde f je hladká funkce, má pro $\alpha = 0$ singulární bod $x = 0$ a $\lambda = f_x(0, 0) = 0$. Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$\begin{array}{ll} f_{xx}(0, 0) \neq 0 & \text{podmínka nedegenerovanosti,} \\ f_\alpha(0, 0) \neq 0 & \text{podmínka transverzality.} \end{array}$$

Pak je (10) v okolí počátku lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě **fold bifurkace**

$$\dot{y} = \pm\varepsilon \pm y^2$$

Bifurkace tohoto typu (fold) se nazývá také **bifurkace sedlo-uzel**. Systém (9) je tzv. normálním tvarem pro bifurkaci sedlo-uzel. Znaménko $f_{xx}(0, 0)$ pak určuje znaménko u x^2 v normálním tvaru, znaménko $f_\alpha(0, 0)$ určuje znaménko u ε .

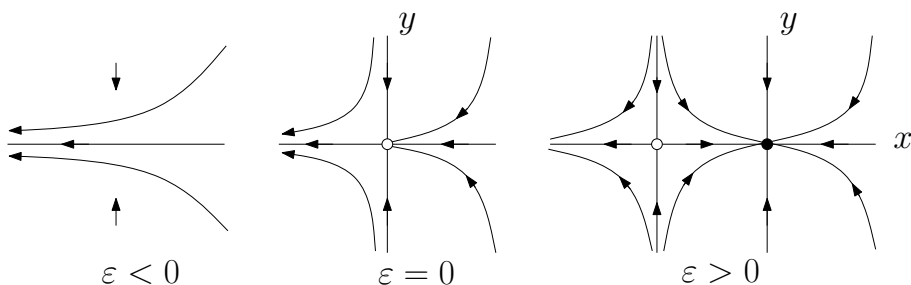
Každá jednoparametrická diferenciální rovnice tvaru (10) splňující podmínky věty je lokálně topologicky ekvivalentní s jejím normálním tvarem. Ti, kteří chtějí vědět, jak najít onen neznámý homeomorfismus z definice topologické ekvivalence, klikněte [ZDE](#).

Podmínka nedegenerovanosti zaručuje, že nejde o jiný typ bifurkace, podmínka transversality zaručuje, že při přechodu parametru přes kritickou hodnotu skutečně dochází ke kvalitativní změně (vzniku či zániku singulárních bodů).

Ve vícerozměrném případě k této bifurkaci dochází v případě, že Jacobiho matice J má právě jednu vlastní hodnotu s nulovou reálnou částí, a to nulovou, hledáme tedy $\det J = 0$. Jednoduchým vícerozměrným případem je dvourozměrný systém

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varepsilon - x^2, \\ \dot{y} &= -y,\end{aligned}$$

jehož centrální varieta je osa x , jejíž dynamika je výše popsána, a osa y je stabilní jednorozměrnou varietou. Při přechodu přes bifurkační hodnotu parametru $\varepsilon = 0$ tedy dochází ke kvalitativní změně - typu sedlo-uzel. Odtud název bifurkace.



Animace.

Model výlovu

Uvažujme konstantně lovenou populaci (např. tuňáků) modelovanou logistickou rovnicí

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - h = f(x, h)$$

s mírou růstu $r > 0$, výlovem $h > 0$ a kapacitou prostředí $K > 0$.

Výlov h je parametrem, který ovlivňuje existenci rovnovážného stavu

$$x_{1,2}^* = \frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{K^2}{4} - \frac{hK}{r}}.$$

Bifurkace typu fold nastává v případě, že pro singulární bod v kritické hodnotě parametru platí

$$f_x(x^*, h^*) = r - \frac{2r}{K}x^* = 0,$$

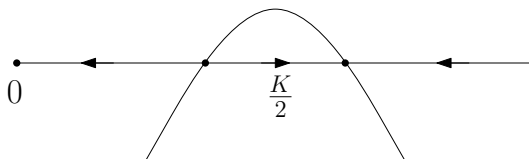
tj. pokud platí

$$x^* = \frac{K}{2},$$

což je právě splynutí singulárních bodů x_1 a x_2 v jediný. To nastává pro kritickou hodnotu parametru h :

$$h^* = \frac{rK}{4}.$$

Protože $f_{xx} = -\frac{2r}{K} \neq 0$ a $f_h = -1 \neq 0$, jsou splněny podmínky nedegenerovanosti a transversality bifurkace typu fold. Pokud výlov překročí tuto prahovou hodnotu h^* , populace nutně vymře.



Příklad. Analyzujte model v programu Matcont.

Příklad. Ukažte, že v parametrickém systému

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y + 1 \\ \dot{y} &= y^2 - 2x - \varepsilon \end{aligned}$$

dochází k bifurkaci sedlo-uzel, najděte kritickou hodnotu parametru ε a nakreslete bifurkační diagram.

Řešení:

Dosažením $x = y - 1$ do pravé strany druhé rovnice dostáváme podmínku, že singulární bod splňuje $y^2 - 2(y - 1) - \varepsilon = 0$, tj.

$$y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(2 - \varepsilon)}}{2} = 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}$$

pro $\varepsilon_0 = 1$ je singulární bod $[0, 1]$ limitní,

pro $\varepsilon < 1$ singulární body nejsou,

pro $\varepsilon > 1$ jsou singulární body dva $[\pm\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}]$.

Jacobiho matice má tvar

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2y \end{pmatrix},$$

v singulárních bodech platí

$$J = Df(\pm\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2(1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}) \end{pmatrix}.$$

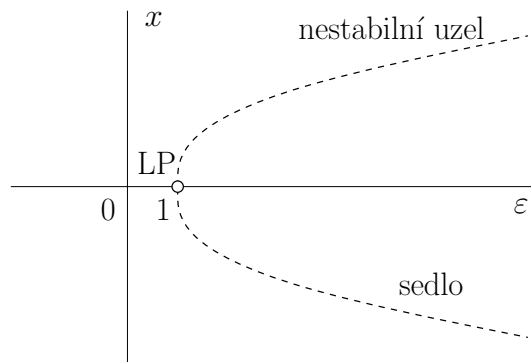
$$\det J = \pm 2\sqrt{\varepsilon - 1} = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\text{tr } J = 3 \pm 2\sqrt{\varepsilon - 1} = \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \text{ pro } \varepsilon > 1 \text{ v okolí } 1.$$

Bod $[\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 + \sqrt{\varepsilon - 1}]$ je tedy nestabilní uzel

a bod $[-\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 - \sqrt{\varepsilon - 1}]$ sedlo.

V kritické hodnotě parametru $\varepsilon_0 = 1$ dochází k bifurkaci typu sedlo-uzel.



Pro hledání vhodných "adeptů" pro jednoparametrickou bifurkaci sedlo-uzel vícerozměrného systému tvaru (7)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$$

můžeme použít jednoduchý algoritmus. Hledáme řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) &= \mathbf{0}, \\ \det D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) &= 0 \end{aligned}$$

vzhledem k \mathbf{x} a jednomu z parametrů.

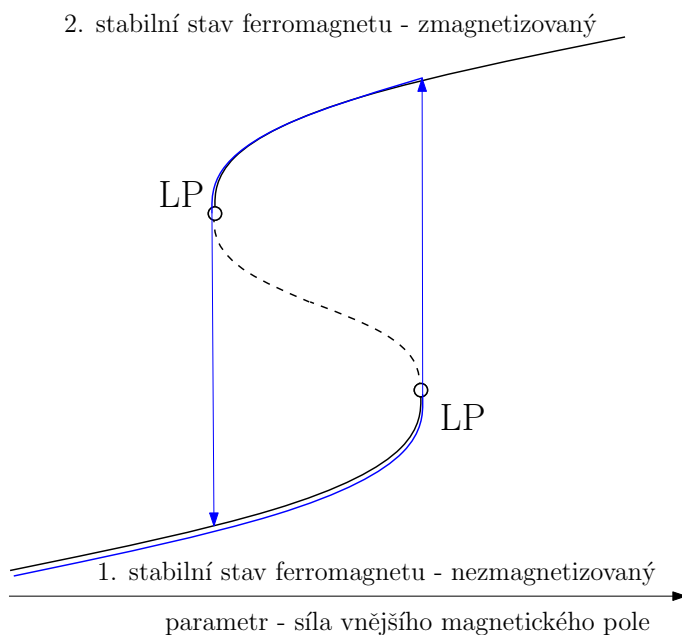
Zda skutečně dochází k bifurkaci sedlo-uzel můžeme ověřit až spočtením vlastních hodnot Jacobiho matice $D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$ v okolí kritické hodnoty $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ (většinou fixujeme složky až na jednu), přitom Jacobiho matice je vypočtena v singulárním bodě $\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon})$, který závisí na parametru.

Druhá možnost je vhodně transformovat systém (7) tak, aby se "vyloupla" jedna diferenciální rovnice, která bifurkaci způsobuje a zde použít větu o jednodimenzionální jednoparametrické bifurkaci sedlo-uzel. Říká se tomu redukce systému na centrální varietu.

Když se nad tímto trochu zamyslíme, zjistíme, že ani jedno nebude pro složitější systémy "ručně" spočitatelné. Proto pro vícerozměrné systémy nastupují kontinuální programy jako je XPPAUT s AUTO nebo Matcont, v jejichž pozadí ovšem jedna z těchto metod běží alespoň numericky.

Hystereze a náhlé skoky

System s hysterezí má paměť. V deterministickém systému bez hystereze je možné předpovědět výstup pouze v závislosti na čase, v systému s hysterezí to nelze, kromě času musíme znát i "cestu" vstupu, tedy trajektorii, kterou vstup prošel, než dosáhl určité hodnoty. Hystereze vykazuje typicky zpoždění při návratu do původního stavu. Známa je hystereze u feromagnetických materiálů, které po vystavení magnetickému poli vykazují nějakou dobu magnetické vlastnosti, poté dojde k zániku vnitřního magnetického pole. Tento jev se ale objevuje i v jiných oborech - biologii, medicíně, ekonomii apod.



Model populace obaleče *Choristoneura Occidentalis* Spruce Budworm Model

V roce 1978 byl vytvořen model populace obaleče, který je v Kanadě škůdcem jehličnatých lesů. Model umožnil pochopit dynamiku populace obaleče a mechanismus vzniku skokových změn, kdy dochází k jeho přemnožení. Na základě modelu je možné populaci obaleče kontrolovat. Populace obaleče bude modelována logistickým modelem růstu

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

kde N je populace, $r > 0$ míra růstu populace a $K > 0$ kapacita prostředí (v případě obaleče je dána hustotou jehličí). Singulární bod $N = K$ je asymptoticky stabilní, počátek nestabilní, řešení lze dokonce nalézt v explicitním tvaru.

V modelu populace obaleče je na pravé straně navíc funkce predace ptáky $p(N) = \frac{BN^2}{A^2 + N^2}$ (analyzujte průběh funkce), která má sigmoidní charakter ($A, B > 0$), tj.

$$\dot{N} = r_B N \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{BN^2}{A^2 + N^2}, \quad (11)$$

přičemž $r_B > 0$ značí nikoliv míru růstu populace (birth - death rate), ale míru přírůstku nově vylíhlé populace, birth rate.

V této rovnici lze zmenšit počet parametrů (změnou měřítka populace a času) substitucí

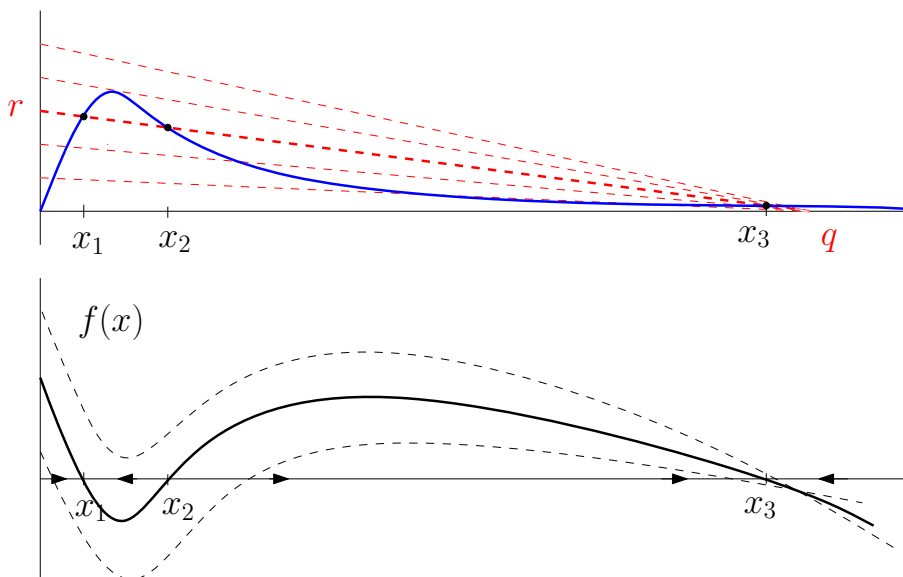
$x = \frac{N}{A}$, $\tau = \frac{Bt}{A}$, $r = \frac{Ar_B}{B}$, $q = \frac{K}{A}$ a dostaneme tak

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{q}\right) - \frac{x^2}{1 + x^2}. \quad (12)$$

Je zřejmé, že $x = 0$ je nestabilní singulární bod (proč?). Další singulární body splňují rovnici

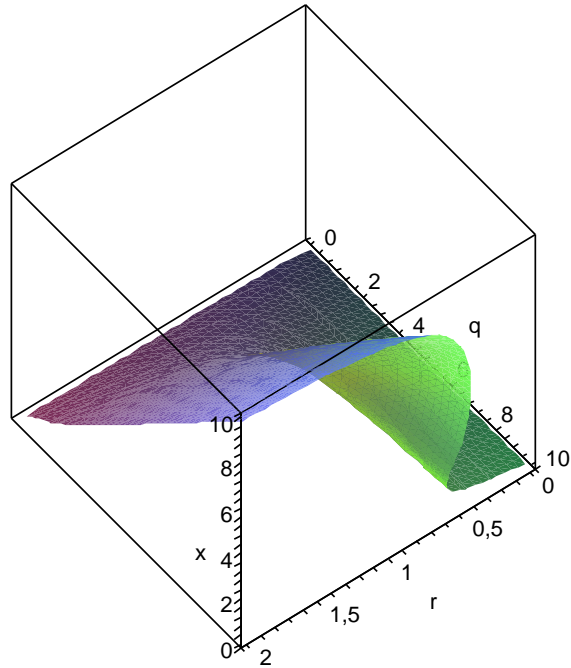
$$r \left(1 - \frac{x}{q}\right) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

Graficky můžeme singulární body najít jako průsečíky přímky s nelineární křivkou:

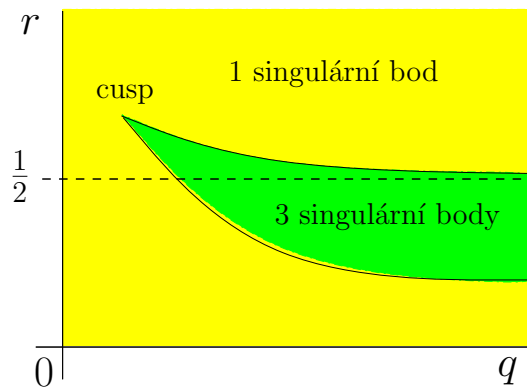


Je zřejmé, že v případě vyznačeném na obrázku jsou nenulové singulární body tři, vnější dva stabilní, vnitřní nestabilní. Při malé změně parametrů může dojít k zániku jednoho z těchto stabilních bodů. Při zániku bodu x_1 tedy dochází i při relativně nízké velikosti populace k prudkému přemnožení, které navíc vykazuje hysterезi.

Varietu odpovídající singulárním bodům můžeme zobrazit závisle na obou parametrech - r a q .



Tento typický ohyb (fold - přeložení) se nazývá katastrofa bodu vratu - cusp catastrophe. Jde o bifurkaci dvouparametrickou. Schéma bifurkačního diagramu se v takovém případě zakresluje do prostoru parametrů, který je bifurkačními hranicemi (odpovídají limitním bodům bifurkace sedlo-uzel) rozdělen na strukturálně stabilní oblasti, tj. oblasti s topologicky ekvivalentními fázovými portréty.



Příklad. Analyzujte model v programu XPPAUT a vykreslete bifurkační diagram pomocí programu AUTO nebo v programu Matcont.

Zkuste interaktivní aplet

Model vznícení

Prostudujte model vznícení.

Model koroze homogenního kovu

Vytvořte ode soubor podle vědeckého článku.

Příklad. Najděte model (v knize, článku), který je popsán diferenciálním systémem, v němž dochází k bifurkaci sedlo-uzel.

Teorie katastrof

Katastrofa bodu vratu - cusp catastrophe - je jednou z tzv. **elementárních katastrof**, které vznikají v dynamických systémech.

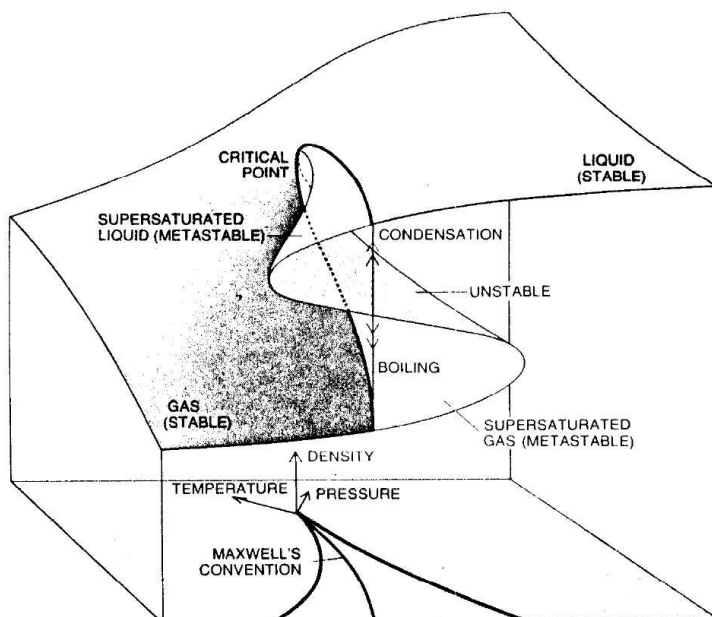
Velmi typické jsou takové systémy, které mají pomalou změnu kontrolních parametrů a rychlou změnu stavových proměnných, k přechodu do rovnováhy tedy dochází téměř okamžitě. Pokud v takovém případě varieta rovnovážných stavů vykazuje ohyb např. typu cusp, změna parametrů má za následek v předchozí části popsany jev hysterese a náhlého skoku.

Na druhou stranu, pokud v dynamickém systému pozorujeme jev hysterese, náhlé skoky a bimodalitu (dva různé stabilní stavy), můžeme se domnívat, že bude možné toto chování vysvětlit modelem, ve kterém dochází ke katastrofě.

Základními elementárními katastrofami jsou fold, cusp, swallowtail a butterfly katastrofy, které jsou jevy na jednorozměrném stavovém prostoru s jedním až čtyřmi bifurkačními parametry. Bifurkaci typu fold a cusp jsme již vysvětlili, k dvourozměrné bifurkaci typu cusp se ještě vrátíme.

Donedávna se zdálo, že bychom mohli takto katalogizovat katastrofické chování dynamických systémů pro různé dimenze stavových prostorů a kontrolních parametrů. V roce 1985 ale Arnold, Gusein-Zade a Varchenko ukázali, že od dimenze 11 je počet takovýchto katastrof nekonečný.

To ale nic nemění na tom, že základní elementární katastrofy mohou popisovat a vysvětlovat chování mnohých dynamických systémů, protože ve strukturálně nestabilní oblasti parametrů bývá často jen jeden (fold bifurkace) nebo dva parametry (cusp bifurkace), přitom ostatní parametry dynamického systému sice ovlivňují systém jako celek, ale nikoliv dramatickým způsobem. Příklady takovýchto dynamických jevů najdeme v mnohých oblastech. Ve fyzice to může být přechod látky z plynného do kapalného stavu a naopak (stavová proměnná je hustota) v závislosti na teplotě a tlaku (kontrolní bifurkační parametry). Skoková změna je zde var a kondezace. Při vysokém tlaku již plyn od kapaliny nerozlišujeme - přešli jsme kritický bod vratu.



Další oblastí, kde hystereze vysvětluje příčinu náhlých skoků je biologie (viz model přemnožení obaleče). Ukazuje se ale, že také na biochemické úrovni tento matematický model vysvětluje tzv. **biochemické přepínače**.

Neuron vyše signál, buňka se začne dělit, rytmus srdce se změní. Jak dojde k této skokové změně? Vstupní napětí u v axonu se nemění skokově, ale postupně, přesto najednou překročí kritickou hranici a axonem projde signál. Dělení buňky ovlivňuje koncentrace cyklinu. Proč dojde k jednorázovému dělení při překročení určité koncentrace a dále se již buňka nedělí? A kde mechanismus havaruje a dojde k nekontorlovanému dělení a vzniku rakoviny? Kde je hranice, která běžný tep srdce změní na arytmií?

Moderní biochemie hledá odpověď právě v matematickém modelu s hysteresí. Za posledních 20 let tato disciplína prodělala obrovský rozvoj právě díky matematickým modelům.

[Stránky matematického biologa Prof. Johna J. Tysona.](#)

Ekonomie je oblastí, kam vstupuje matematické nelineární modelování, teorie bifurkací a teorie katastrof paradoxně pomalu, i když první pokusy zasahují již do 70. let minulého století. Je na vás to změnit. Náhlé skoky a hystereze jsou přece typickými jevy na finančních trzích, v dynamice míry nezaměstnanosti nebo mezd.

Inspiraci můžete čerpat na stránkách ekonomů, kteří nelineární modely propagují:

[Stránky Prof. J. Barkley Rossera.](#)

[Stránky Prof. Petera Flaschela.](#)

[Stránky Prof. Oliviera Bruna.](#)

Další jednoparametrické bifurkace počtu singulárních bodů

Normální forma transkritické bifurkace

$$\dot{x} = \varepsilon x - x^2 \quad (13)$$

Normální forma vidličkové (pitchfork) bifurkace

$$\dot{x} = \varepsilon x - x^3 \quad (14)$$

Příklad. Nakreslete jejich bifurkační diagramy. Nejdříve analyzujte ručně, poté využijte Matcont nebo XPPAUT a AUTO.

Věta: Předpokládejme, že jednodimenzionální jednoparametrický systém (rovnice)

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

kde f je hladká funkce tvaru $f(x, \alpha) = xg(x, \alpha)$, má pro $\alpha = 0$ nehyperbolický singulární bod $x = 0$ ($\lambda = f_x(0, 0) = 0$). Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$\begin{array}{ll} g_x(0, 0) \neq 0 & \text{podmínka nedegenerovanosti,} \\ g_\alpha(0, 0) \neq 0 & \text{podmínka transversality.} \end{array}$$

Pak je (15) v okolí počátku lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě **transkritické bifurkace**

$$\dot{y} = \pm \varepsilon y \pm y^2$$

Věta: Předpokládejme, že jednodimenzionální jednoparametrický systém (rovnice)

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (16)$$

kde f je v okolí počátku lichá funkce, má pro $\alpha = 0$ nehyperbolický singulární bod $x = 0$ ($\lambda = f_x(0, 0) = 0$). Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$\begin{array}{ll} f_{xxx}(0, 0) \neq 0 & \text{podmínka nedegenerovanosti,} \\ f_{x\alpha}(0, 0) \neq 0 & \text{podmínka transversality.} \end{array}$$

Pak je (16) v okolí počátku lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě **vidličkové bifurkace**

$$\dot{y} = \pm \varepsilon y \pm y^3$$

Poznámka 21. Jak v případě fold, tak v případě transkritické bifurkace znaménko u y^2 odpovídá znaménku levé strany podmínky nedegenerovanosti. Podobně u vidličkové bifurkace je znaménko u y^3 znaménkem levé strany podmínky nedegenerovanosti. Znaménko u ε odpovídá znaménku levé strany podmínky transversality.

Hopfova bifurkace

také Andronovova bifurkace nebo bifurkace vzniku limitního cyklu.

Uvažujme systém diferenciálních rovnic s parametrem tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + \mu y - y(x^2 + y^2), \end{aligned} \tag{17}$$

kde $x, y \in \mathbb{R}$ a $\mu \in \mathbb{R}$ je parametr. Singulárním bodem systému je počátek a Jacobiho matice systému v něm má tvar $\begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$. Vlastní hodnoty jsou tedy $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$. Pro $\mu < 0$ je tedy počátek stabilním ohniskem, pro $\mu > 0$ je nestabilním ohniskem. Kritická hodnota parametru $\mu = 0$ je bifurkační hodnotou Hopfovy bifurkace, při jejím přechodu se mění kvalitativní vlastnost - stabilita - singulárního bodu. Systém (17) je normálním tvarem Hopfovy bifurkace. Zavedme komplexní proměnnou $z = x + iy$. Pak

$$\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y} = \mu(x + iy) + i(x + iy) - (x + iy)(x^2 + y^2),$$

tj.

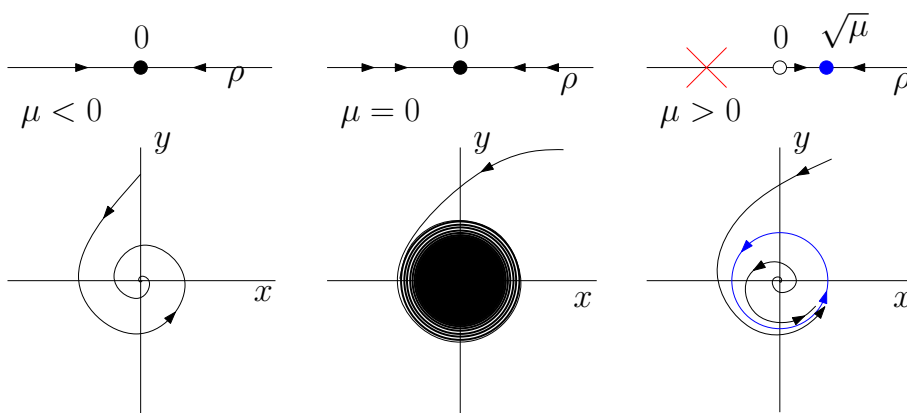
$$\dot{z} = (\mu + i)z - z|z|^2.$$

Eulerův tvar komplexního čísla $z = \rho e^{i\varphi}$ pak dává polární tvar systému (17):

$$\dot{\rho} = \rho(\mu - \rho^2), \tag{18}$$

$$\dot{\varphi} = 1. \tag{19}$$

Rovnice (18) je normálním tvarem vidličkové bifurkace. Pro $\mu \leq 0$ je tedy počátek jediným stabilním singulárním bodem rovnice (18). Pro $\mu > 0$ vzniká další singulární bod $\rho = \sqrt{\mu}$ (zápornou hodnotu můžeme vynechat, nemá v této reprezentaci smysl, jde o vzdálenost). Počátek je v tomto případě $\mu > 0$ nestabilní, singulární bod $\rho = \sqrt{\mu}$ je stabilní. Tento odpovídá stabilnímu limitnímu cyklu v okolí počátku.



Věta: Předpokládejme, že dvoudimenzionální jednoparametrický systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha), \quad (20)$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$ hladká funkce, má pro α z okolí 0 singulární bod $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{J} = D\mathbf{f}(0,0)$ má vlastní hodnoty $\lambda_{1,2} = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$, kde $\mu(0) = 0$ a $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$\begin{array}{ll} l_1(0) \neq 0 & \text{podmínka nedegenerovanosti,} \\ \mu_\alpha(0) \neq 0 & \text{podmínka transversality.} \end{array}$$

Pak je (20) v okolí počátku lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě **Hopfovy bifurkace**

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \pm \varepsilon u - v \pm u(u^2 + v^2), \\ \dot{v} &= u + \pm \varepsilon v \pm v(u^2 + v^2). \end{aligned}$$

Poznámka 22. Číslo $l_1(0)$ se nazývá první Ljapunovův koeficient nebo první Ljapunovovo číslo. Jeho znaménko určuje znaménko u nelineárních členů v normálním tvaru. V případě, že $l_1(0) < 0$, je systém ekvivalentní námi dříve studovanému se stabilním limitním cyklem, mluvíme o superkritické Hopfově bifurkaci. V případě $l_1(0) > 0$ jde o subkritickou Hopfovou bifurkaci s nestabilním limitním cyklem. Pokud je první Ljapunovův koeficient nulový, jde o Bautinovu bifurkaci, kterou je třeba popsat dvěma parametry a při které dochází např. k vzniku a zániku dvou blízkých limitních cyklů. Výpočet Ljapunovova koeficientu je založen na transformaci původního systému do lokálně topologicky ekvivalentního systému v normální formě. My si uvedeme pouze "kuchařku" na jeho výpočet. Znaménko u ε určuje zase podmínka transversality.

Ve vícerozměrném případě k této bifurkaci dochází v případě, že Jacobiho matice \mathbf{J} má právě dvě ryze imaginární komplexně sdružené vlastní hodnoty. Ve dvourozměrném případě tedy hledáme $\text{tr } \mathbf{J} = 0$ za předpokladu $\det \mathbf{J} > 0$. Perioda cyklu vznikajícího v okolí počátku je $T = \frac{2\pi}{\omega}$, protože řešení (20) je blízké funkci $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$.

Matice $\mathbf{J} = D\mathbf{f}(0,0)$ má podle předpokladů dvě ryze imaginární vlastní hodnoty $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$. Jim příslušné (komplexní) vlastní vektory $\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}$ jsou také komplexně sdružené. Označme \mathbf{T} matici složenou z reálné a imaginární části vlastního vektoru příslušného vlastní hodnotě $-i\omega_0$, tj.

$$\mathbf{T} = (\text{Re } \mathbf{v}, \text{Im } \mathbf{v}).$$

Pak platí

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}$$

a transformace

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{u}$$

pak převádí systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{J}\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

na systém

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{T}\mathbf{u}). \quad (21)$$

Právě nelineární část $\begin{pmatrix} P(u_1, u_2) \\ Q(u_1, u_2) \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{T}\mathbf{u})$ je podstatná pro výpočet prvního Ljapunovova koeficientu $l_1(0)$ a určuje stabilitu nebo nestabilitu limitního cyklu vznikajícího v okolí kritické hodnoty Hopfovy bifurkace.

Označme P_{111} 3. derivaci nelineární části prvního řádku podle první složky u_1 vektoru $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ v nule, tj.

$$P_{111} = \left. \frac{\partial^3 P(u_1, u_2)}{\partial u_1^3} \right|_{u_1=0, u_2=0}.$$

Podobně např. Q_{12} bude značit 2. derivaci nelineární části druhého řádku podle první a druhé složky vektoru \mathbf{u} v nule, tj.

$$Q_{12} = \left. \frac{\partial^2 Q(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} \right|_{u_1=0, u_2=0}.$$

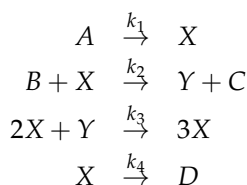
První Ljapunovův koeficient pak vypočteme podle vzorce

$$l_1(0) = \frac{1}{8\omega} (P_{111} + P_{122} + Q_{112} + Q_{222}) + \frac{1}{8\omega^2} [P_{12}(P_{11} + P_{22}) - Q_{12}(Q_{11} + Q_{22}) - P_{11}Q_{11} + P_{22}Q_{22}].$$

Je super, že máme kontinuální numerické programy jako XPPAUT a nemusíme to vždy dělat...

Chemický model Bruselátor

Uvažujme chemické reakce



za předpokladu, že C a D dále do reakcí nevstupují a koncentrace $[A]$ a $[B]$ se udržují konstantní, kinetické rovnice reakce popisuje systém

$$\begin{aligned} \frac{d[X]}{dt} &= k_1[A] - k_2[B][X] + k_3[X]^2[Y] - k_4[X], \\ \frac{d[Y]}{dt} &= k_2[B][X] - k_3[X]^2[Y]. \end{aligned}$$

Označme $x = [X]\sqrt{\frac{k_3}{k_4}}$, $y = [Y]\sqrt{\frac{k_3}{k_4}}$, $a = [A]\frac{k_1}{k_4}\sqrt{\frac{k_3}{k_4}}$, $b = [B]\frac{k_2}{k_4}$, $\tau = k_4 t$, pak lze systém zjednodušit na tvar

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a - (b+1)x + x^2 y, \\ \dot{y} &= bx - x^2 y. \end{aligned} \tag{22}$$

Příklad. Ukažte, že pro $b = 1 + a^2$ dochází v systému (22) k superkritické Hopfově bifurkaci.

Selkovův model glykolýzy

Příklad. Prostudujte dynamiku modelu glykolýzy, který má (po zmenšení počtu parametrů) tvar

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + ay + x^2y, \\ \dot{y} &= b - ay - x^2y.\end{aligned}\tag{23}$$

Analyzujte pomocí XPPAUTu nebo Matcontu.

[Původní Selkovův článek.](#)

[Animace.](#)

Model neuronu FitzHugh-Nagumův Model

V roce 1948 provedl Alan Lloyd Hodgkin pokusy, při kterých zaváděl stejnosměrný proud různých velikostí do axonů nervových buněk a sledoval, že některé hodnoty proudu vyvolaly série impulzů o různých frekvencích, jiné vyvolávaly jen jeden impulz nebo byly bez odezvy. V roce 1952 pak A. L. Hodgkin a Andrew Fielding Huxley publikovali sérii článků, ve kterých popsali toky elektrických proudů povrchovou membránou nervového vlákna matematickým modelem, který je dnes známý jako Hodgkin-Huxleyho model. Sestává ze soustavy 4 nelineárních diferenciálních rovnic, které velmi dobře popisují chování neuronu. V roce 1961 Richard FitzHugh publikoval zjednodušený model, který vykazuje obdobné chování, protože je zjednodušením projekce 4-rozměrného Hodgkin-Huxleyho modelu na jeho tzv. centrální varietu.

$$\begin{aligned}\dot{V} &= V(a - V)(V - 1) - w + I, \\ \dot{w} &= bV - cw.\end{aligned}\tag{24}$$

V zastupuje membránové napětí, I je velikost vstupujícího proudu. Ostatní parametry i stavová proměnná w vycházejí z popisu kinetiky chemických reakcí na membráně axonu (přenos signálu je zprostředkován změnami koncentrací iontů K^+ , Na^+ , Cl^- a anionty bílkovin). Druhá rovnice je obnovovací, má pomalejší odezvu a umožňuje vznik impulzu, který následně ukončí. Na paramer a neklademe zatím znaménkové podmínky, $b, c > 0$.

Příklad. Najděte podmínky pro vznik Hopfovy bifurkace a ukažte, že pokud vzniká, jde o superkritickou bifurkaci.

Příklad. Vytvořte bifurkační diagram pro vhodné parametry.

Model šíření reklamy

Příklad. Na základě [vědeckého článku](#) vytvořte ode soubor a pomocí XPPAUTu ověřte tvrzení z kapitoly 2.1 o vzniku superkritické Hopfovy bifurkace.

Příklad. Spočtete kritickou hodnotu parametru α Hopfovy bifurkace a první Lyapunovův koeficient.

Model dělení buňky

Otevřte webovou stránku modelu.

Víceparametrické bifurkace

Co se stane, pokud budeme měnit více než jeden parametr dynamického systému? V okolí hyperbolické rovnováhy nic moc, rovnováha v nějakém okolí zůstane stále hyperbolická. Pokud ale budeme sledovat křivku kritického parametru nějaké jednoparametrické bifurkace, může druhý parametr způsobit

- ještě další vlastní hodnoty dosáhnou kritické hodnoty (nulová reálná část v případě spojitého, jednotková velikost v případě diskrétního systému)
- nebo narušení některé z podmínek zaručujících bifurkaci daného typu - at' už narušením podmínky typu vlastní hodnoty nebo narušením podmínky nedegenerovanosti.

Spojitém příkladem může být

- již zmíněná bifurkace typu cusp (bod vratu), kdy je narušena podmínka nedegenerovanosti bifurkace typu fold (sedlo-uzel),
- Bogdanov-Takensova bifurkace, kdy ryze komplexní vlastní hodnoty splynou v nule
- nebo fold-Hopf bifurkace, kdy vzniká kromě ryze komplexního páru vlastních hodnot ještě nulová vlastní hodnota.

Uvedeme si pouze některé normální tvary a nakreslíme bifurkační diagramy v okolí kritických hodnot parametrů.

Věta: Předpokládejme, že jednodimenzionální dvouparametrický systém (rovnice)

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T \in \mathbb{R}^2,$$

kde f je hladká funkce, má pro $\alpha = \mathbf{0}$ singulární bod $x = 0$ a platí $\lambda = f_x(0, \mathbf{0}) = 0, f_{xx}(0, \mathbf{0}) = 0$. Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$\begin{aligned} f_{xxx}(0, \mathbf{0}) &\neq 0 && \text{podmínka nedegenerovanosti,} \\ (f_{\alpha_1} f_{x\alpha_2} - f_{\alpha_2} f_{x\alpha_1})(0, \mathbf{0}) &\neq 0 && \text{podmínka transversality.} \end{aligned}$$

Pak je uvedený nelineární systém v okolí počátku lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě **bifurkace bodu vratu - cusp**

$$\dot{y} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y \pm y^3$$

Na příkladu této bifurkace **bodu vratu** si ukážeme, jak vypadá bifurkační diagram pro dva parametry.

Singulární body leží na varietě

$$M: \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y \pm y^3 = 0,$$

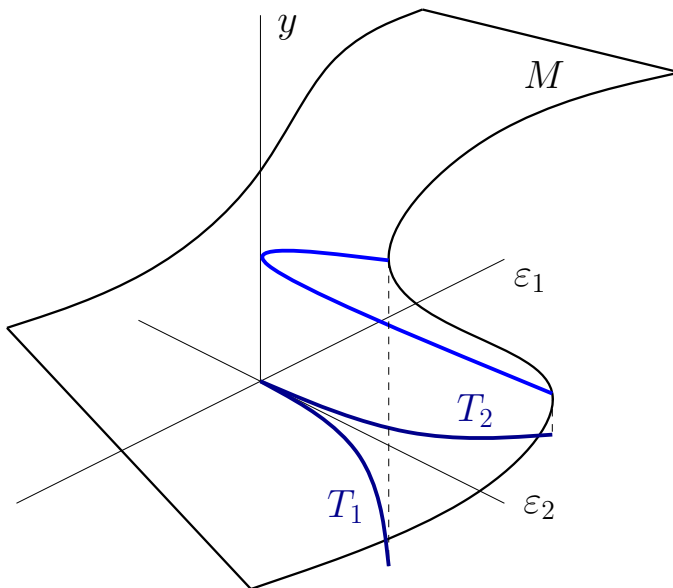
přítom nulová první derivace, tedy podmínka pro bifurkaci typu fold (sedlo-uzel) je splněna na křivce splňující navíc

$$\varepsilon_2 \pm 3y^2 = 0.$$

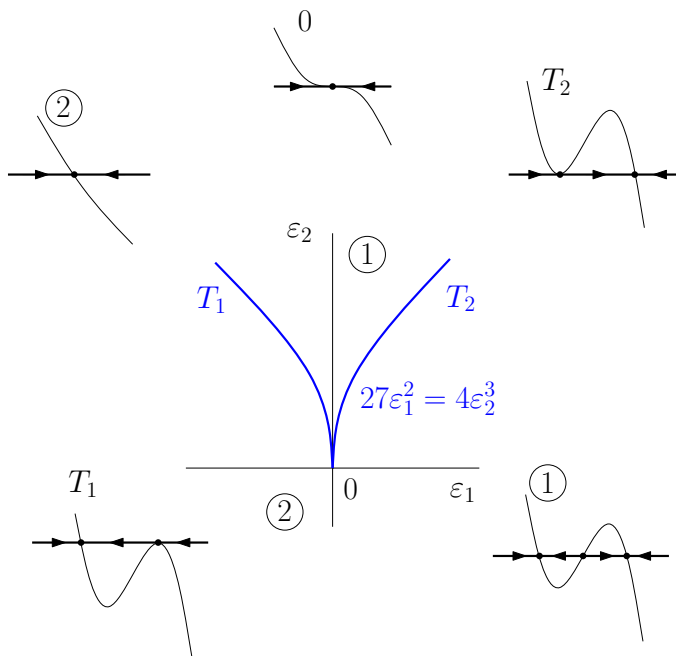
Pokud z těchto dvou rovnic vyloučíme y , dostaneme křivku typického tvaru V

$$27\varepsilon_1^2 - 4\varepsilon_2^3 = 0$$

s bodem vratu v počátku.



Jednotlivé větve T_1, T_2 odpovídají zánikům dvojice singulárních bodů v ohybech variety M , tedy jsou to bifurkační hranice bifurkace sedlo-uzel. Bifurkace bodu vratu (cusp) implikuje vznik hystereze.



Oblasti označené 1 a 2 jsou strukturálně stabilní oblasti, ve kterých má systém 3 resp. 1 singulární bod. T_1 a T_2 odpovídají jednoparametrické bifurkaci typu fold, jsou to hranice kodimenze 1 v 2-rozměrném prostoru parametrů. Jejich průnikem je bod vratu, který má dimenzi 0, tedy kodimenzi 2 v 2-rozměrném prostoru parametrů.

Obecně v k -rozměrném prostoru parametrů bude mít jednoparametrická bifurkace kodimenzi 1, bude tedy $(k - 1)$ -rozměrnou varietou. Průniky variet příslušných jednoparametrické bifurkaci budou variety příslušné víceparametrickým bifurkacím vyšší kodimenze.

Věta: Předpokládejme, že dvoudimenzionální dvouparametrický systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^2,$$

kde $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$ je hladká funkce, má pro $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ singulární bod $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{J} = D\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ má vlastní hodnoty $\lambda_{1,2} = \mu(\boldsymbol{\alpha}) \pm i\omega(\boldsymbol{\alpha})$, kde $\mu(\mathbf{0}) = 0$, $\omega(\mathbf{0}) = \omega_0 > 0$ a $l_1(\mathbf{0}) = 0$. Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$l_2(\mathbf{0}) \neq 0, \\ \boldsymbol{\alpha} \rightarrow (\mu(\boldsymbol{\alpha}), l_1(\boldsymbol{\alpha}))^T \text{ je v } \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \text{ regulární.}$$

Pak je uvedený nelineární systém v okolí počátku lokálně topologicky ekvivalentní systému v komplexní normální formě **Bautinovy bifurkace**

$$\dot{z} = (\varepsilon_1 + i)z + \varepsilon_2 z|z|^2 + \text{sgn } l_2(\mathbf{0})z|z|^4.$$

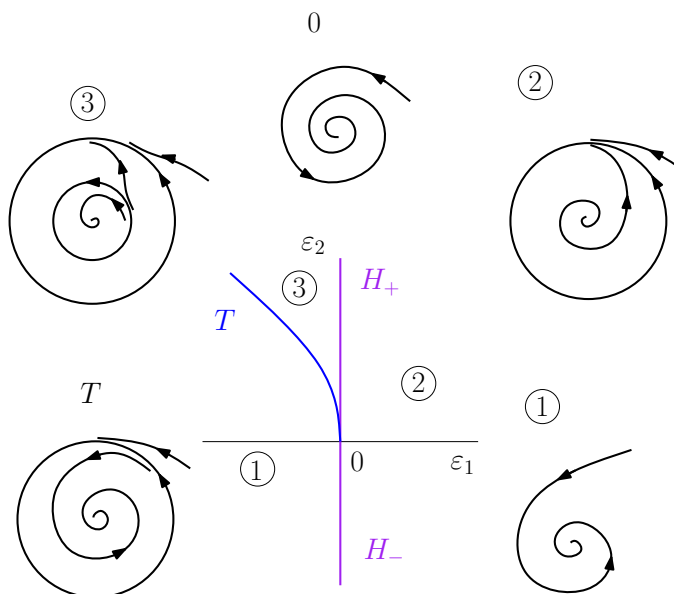
Číslo $l_2(\mathbf{0})$ je tzv. druhý l'apunovův koeficient a jeho výpočet je založen na podobném principu, jako výpočet prvního. Nebudeme jej uvádět, lze jej najít v literatuře např. Kuzněcov str. 310.

Bautinova bifurkace způsobuje, že vlivem druhého parametru dochází k narušení podmínky nedegenerovanosti u Hopfovy bifurkace. Zavedením polárních souřadnic $z = \rho e^{i\varphi}$ dostáváme normální formu ve tvaru (případ $\text{sgn } l_2(\mathbf{0}) = -1$)

$$\dot{\rho} = \rho(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \rho^2 - \rho^4), \\ \dot{\varphi} = 1,$$

Přitom rovnovážná řešení první rovnice odpovídají limitním cyklům. Je zřejmé, že $\rho = 0$ odpovídající počátku je vždy singulárním bodem. Kvadratická rovnice ale může mít 0 až 2 řešení - mohou tedy vznikat a zanikat limitní cykly.

Bifurkační diagram ukazuje hraniční křivku Hopfovy bifurkace $H = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1 = 0\}$ a křivku zániku dvou limitních cyklů $T = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_2^2 + 4\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 > 0\}$ rozdělující parametrickou rovinu na strukturálně stabilní oblasti spolu s příslušnými fázovými portréty.



Věta: Předpokládejme, že dvoudimenzionální dvouparametrický systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^2, \quad (25)$$

kde $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$ je hladká funkce, má pro $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ singulární bod $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{J} = D\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \neq 0$ má dvě nulové vlastní hodnoty. Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$s = \text{sgn}(b_{20}(a_{20} + b_{11})) \neq 0,$$

$$(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \rightarrow (\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}), \text{tr } D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}), \det D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})) \text{ je v počátku regulární.}$$

Pak je systém (25) v okolí počátku lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě **Bogdanov-Takensovy bifurkace**

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y_1 + y_1^2 + s y_1 y_2 \end{aligned}$$

Čísla a_{20} , b_{11} a b_{20} , z podmínky nedegenerovanosti jsou příslušné koeficienty Taylorových rozvoju

$$F_1(y_1, y_2) = \frac{1}{2} a_{20} y_1^2 + \dots$$

a

$$F_2(y_1, y_2) = \frac{1}{2} b_{20} y_1^2 + b_{11} y_1 y_2 + \dots$$

transformované pravé strany systému (25) transformací $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$ na tvar

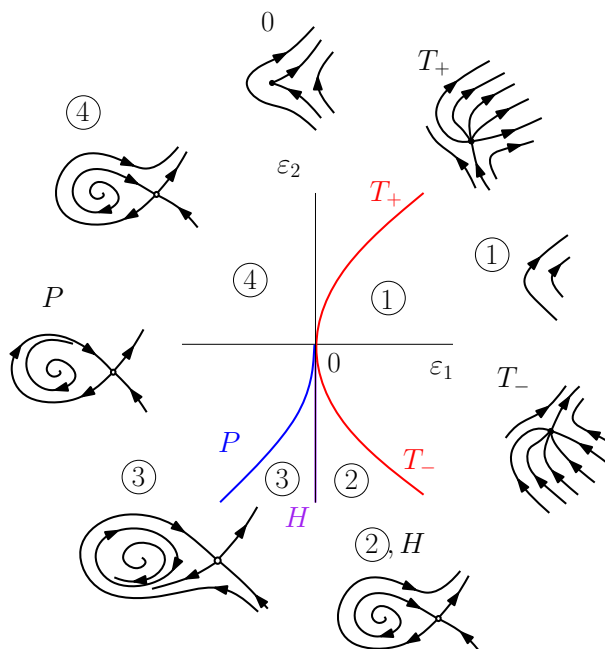
$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(y_1, y_2) \\ F_2(y_1, y_2) \end{pmatrix}$$

pomocí matice \mathbf{T} složené z vlastních vektorů $D\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ (analogický postup jsme použili u výpočtu prvního Ljapunovova koeficientu).

Bogdanov-Takensova bifurkace se někdy nazývá také *double-zero*, protože v kritické hodnotě parametrů $\alpha = 0$ má systém dvě nulové vlastní hodnoty. V okolí $\alpha = 0$ mohou tedy vlastní hodnoty měnit znaménko a mohou přecházet i přes imaginární osu. Dochází k degenerování Hopfovy bifurkace i bifurkace sedlo-uzel (fold), což způsobuje zánik limitního cyklu na tzv. smyčce separatrix sedla.

Analýzou systému v normálním tvaru Bogdanov-Takensovy bifurkace pro $s = -1$ získáme bifurkační diagram s hraniční křivkou Hopfovy bifurkace $H = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 < 0\}$ a křivkou zániku dvou limitních bodů (bifurkace sedlo-uzel) $T = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : 4\varepsilon_1 - \varepsilon_2^2 = 0\}$ rozdělující parametrickou rovinu na strukturálně stabilní oblasti spolu s příslušnými fázovými portréty. Ve třetím kvadrantu ale navíc dochází k nelokální bifurkaci zániku smyčky separatrix (jde o tzv. homoklinickou bifurkaci smyčky separatrix sedla), která má v okolí počátku tvar

$$P = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1 = -\frac{6}{25}\varepsilon_2^2 + o(\varepsilon_2^2), \varepsilon_2 < 0\}.$$



Všechny uvedené jedno a dvouparametrické bifurkace spojitých systémů byly lokálními bifurkacemi v okolí singulárních bodů. V jejich blízkosti ale obecně vznikají také nelokální bifurkace (zdvojení limitního cyklu, smyčka separatrix sedla). Další bifurkace mohou vznikat např. v okolí homoklinických a heteroklinických trajektorií, tedy trajektorií vystupujících z jednoho singulárního bodu a navracejících se do něj nebo jiného singulárního bodu. Toto je ovšem již nad rámec našeho učiva.

Významnou bifurkací z hlediska dynamiky a aplikací je **Šilnikovova bifurkace**, která může vzniknout až pro trojrozměrný systém s homoklinickou trajektorií vycházející ze sedlo-ohniska (dvě vlastní hodnoty komplexně sdružené se zápornou reálnou částí a jedna kladná reálná vlastní hodnota). V jeho okolí může dojít k „divoké“ dynamice se spočetně mnoha cykly a ke vzniku tzv. spirálního atraktoru. Další významnou nelokální bifurkací limitního cyklu je bifurkace **blue-sky**.

Redukce na centrální varietu

Podrobně jsme prozkoumali systémy v okolí hyperbolických singulárních bodů i rovnice či systémy, které mají vlastní hodnoty s nulovou reálnou částí. Co se bude dít v situaci, kdy některé vlastní hodnoty mají nulové a jiné nenulové reálné části říká následující věta.

Věta (Věta o centrální varietě): Necht' $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ je singulární bod systému (1), který není hyperbolický (tj. $n_0 \neq 0$). Pak v okolí počátku existuje hladká invariantní varietu $W^c(\mathbf{0})$, která je lokálně dána grafem funkce $\nu : \mathbb{R}^{n_0} \rightarrow \mathbb{R}^{n_-} \times \mathbb{R}^{n_+}$, která splňuje $\nu(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ a $D\nu(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Varietu $W^c(\mathbf{0})$ nazýváme centrální varietou.

Důkaz této věty je založen na kontrakci v Banachově prostoru. Lze jej nalézt např. v Chicone: Ordinary Differential Equations with Applications, Springer 1999 str. 286-297.

Uvažujme systém (1) se singulárním bodem \mathbf{x}_0 a vlastními hodnotami $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ s nekladnými reálnými částmi (tj. $n_0 \neq 0, n_- \neq 0$ a $n_+ = 0$) převedený do tvaru

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{A}_s \mathbf{y} + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}).\end{aligned}\tag{26}$$

Nulové řešení je v takovém případě stabilní (ne nutně asymptoticky).

Podle věty o centrální varietě existuje v okolí počátku $(0, 0)$ invariantní centrální varietu daná grafem funkce $\nu : \mathbb{R}^{n_0} \rightarrow \mathbb{R}^{n_-}$, tj. $\mathbf{y} = \nu(\mathbf{x})$. Dynamika na centrální varietě bude v okolí počátku dána rovnicí

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}_c \mathbf{u} + \mathbf{g}_1(\mathbf{u}, \nu(\mathbf{u})), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_0}.\tag{27}$$

Trajektorie systému (26), které neleží na centrální varietě, se k ní exponenciálně přibližují pro $t \rightarrow \infty$. Chování takového systému je tudíž možné redukovat na chování na jeho atraktoru, kterým je invariantní centrální varietu.

Definice: Rovnice (27) se nazývá redukcí rovnice (26) na centrální varietu.

Poznámka 23. Je evidentní, že pokud je stabilní počátek redukováného systému, je stabilní také singulární bod \mathbf{x}_0 původního systému (1) s $n_+ = 0$.

Vzhledem k tomu, že centrální varietu je v okolí počátku hladká, bude platit

$$\dot{\mathbf{y}} = D\nu(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}},$$

tj. dosazením $\mathbf{y} = \nu(\mathbf{x})$ a pravých stran rovnic systému (26) dostáváme rovnici pro centrální varietu

$$\mathbf{A}_s \nu(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, \nu(\mathbf{x})) = D\nu(\mathbf{x})(\mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \nu(\mathbf{x}))).\tag{28}$$

Řešení $\mathbf{y} = \nu(\mathbf{x})$ můžeme aproximovat Taylorovým polynomem alespoň 2. stupně (pro dostatečně hladkou \mathbf{f} máme lokálně zaručenu dostatečnou hladkost), navíc nutně $\nu(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ a $D\nu(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Příklad . Redukujte systém

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -xy \\ \dot{y} &= -y + x^2 - y^2\end{aligned}$$

na jeho centrální varietu v okolí počátku a popište dynamiku systému v okolí počátku.

Řešení:

Počátek $[0, 0]$ je singulární bod. Jacobiho matice je $Df(x, y) = \begin{pmatrix} -y & -x \\ 2x & -1 - 2y \end{pmatrix}$, tj.

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vlastní hodnoty jsou tedy $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$. Hledáme tedy centrální varietu jako graf funkce

$y = v(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$ v okolí počátku, která je řešením

$$-v(x) + x^2 - v^2(x) = v'(x)(-xv(x)).$$

Dosazením Taylorova rozvoje funkce $v(x)$ dostáváme

$$-\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k + x^2 - \left(\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k\right)^2 = -x \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=2}^{\infty} a_k k x^{k-1}$$

Porovnáním koeficientů dostaneme

$$x^2: \quad -a_2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 1$$

$$x^3: \quad -a_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 0$$

$$x^4: \quad -a_4 - a_2^2 = -a_2^2 \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad a_4 = 1,$$

tj.

$$v(x) = x^2 + x^4 + O(x^5).$$

Dynamika na centrální varietě pak bude dána rovnicí

$$\dot{x} = -xv(x) = -\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^{k+1} = -x^3 - x^5 + O(x^6).$$

V levém okolí počátku je na invariantní varietě $\dot{x} > 0$, trajektorie směřují k počátku, v pravém okolí je $\dot{x} < 0$, trajektorie směřují k počátku. Počátek je tedy asymptoticky stabilní.

Program XPPAUT, spustte prikklad2.ode

Jednparametrické bifurkace v diskrétním případě

Po spojitých bifurkacích podobně analyzujeme diskrétní jednparametrické bifurkace. Znovu půjde o situaci, kdy se chování systému lokálně kvalitativně mění díky nehyperbolicitě pevného bodu. Začneme s bifurkacemi závislými na změně jednoho parametru, která způsobí, že některá z vlastních hodnot přechází přes hranici jednotkového kruhu v Gaussově rovině.

Bifurkace typu fold, sedlo-uzel

Uvažujme diferenční rovnici s parametrem tvaru

$$x(n+1) = \varepsilon + x(n) - x(n)^2, \quad x(n) \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}. \quad (29)$$

Pevné body splňují $f(x, \varepsilon) := \varepsilon + x - x^2 = x$, tj. leží na křivce $\varepsilon = x^2$. Pro $\varepsilon < 0$ systém (29) nemá žádný pevný bod, pro $\varepsilon = 0$ je pevný bod $x_0 = 0$ a pro $\varepsilon > 0$ jsou pevné body dva $x = \pm\sqrt{\varepsilon}$. Parametr $\varepsilon = 0$ je tedy bifurkační hodnotou a při jeho přechodu v okolí počátku dochází k lokální bifurkaci typu fold (ohyb). Bod $(x_0, \varepsilon_0) = (0, 0)$ je tzv. limitním bodem. Všimněte si, že vlastní hodnota $\lambda = Df(0, 0) = 1$.

Věta: Předpokládejme, že jednodimenzionální jednparametrický systém (rovnice)

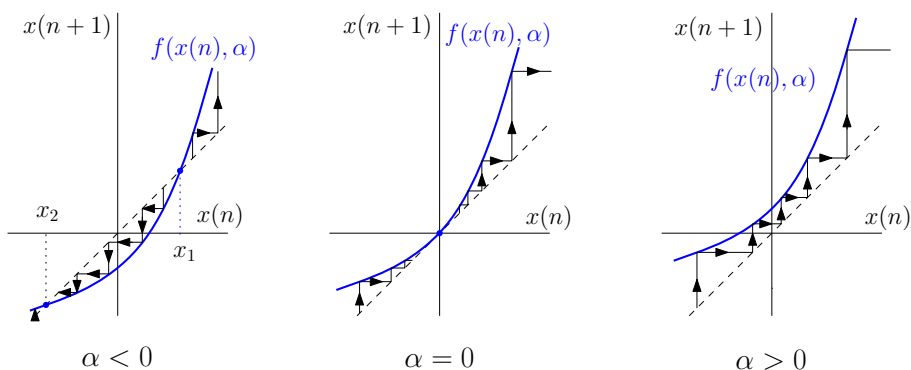
$$x(n+1) = f(x(n), \alpha), \quad x(n) \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (30)$$

kde f je hladká funkce, má pro $\alpha = 0$ pevný bod $x = 0$ a $\lambda = f_x(0, 0) = 1$. Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$\begin{array}{ll} f_{xx}(0, 0) \neq 0 & \text{podmínka nedegenerovanosti,} \\ f_\alpha(0, 0) \neq 0 & \text{podmínka transversality.} \end{array}$$

Pak je (30) v okolí počátku lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě

$$y(n+1) = \varepsilon + y(n) \pm y(n)^2$$



Ve vícerozměrném případě k této bifurkaci dochází v případě, že Jacobiho matice J má právě jednu vlastní hodnotu $\lambda = 1$.

Bifurkace typu flip

Uvažujme diferenční rovnici s parametrem tvaru

$$x(n+1) = -(1+\varepsilon)x(n) + x^3(n), \quad x(n) \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}. \quad (31)$$

Pevné body splňují $f(x, \varepsilon) := -(1+\varepsilon)x + x^3 = x$, tj. leží na křivkách $x = 0$ a $2 + \varepsilon = x^2$. Systém (31) má vždy nulový pevný bod, pro $\varepsilon < 0$ je tento bod stabilní, pro $\varepsilon > 0$ je nestabilní. Systém může mít ještě další dva pevné body $x = \pm\sqrt{2+\varepsilon}$.

Parametr $\varepsilon = 0$ je bifurkační hodnotou a při jeho přechodu v okolí počátku dochází k lokální bifurkaci, mění se stabilita počátku. Všimněte si, že vlastní hodnota $\lambda = Df(0, 0) = -1$.

Pevné body $x = \pm\sqrt{2+\varepsilon}$ pro malé ε nejsou stabilní, protože $Df(x, \varepsilon) = -1 - \varepsilon + 3x^2$ je pro pevné body v $x = \pm\sqrt{2+\varepsilon}$ větší než 1. Co se tedy děje s trajektoriemi začínajícími v okolí počátku pro malá kladná ε ?

Podívejme se blíže na cykly délky 2. To jsou pevné body zobrazení $f^{(2)}$, tj. platí

$$f^{(2)}(x, \varepsilon) = -(1+\varepsilon)(-(1+\varepsilon)x + x^3) + (-(1+\varepsilon)x + x^3)^3 = x$$

Tuto rovnici lze upravit na tvar

$$x(x^4 - x^2 - x^2\varepsilon + 1)(-\varepsilon - 2 + x^2)(-\varepsilon + x^2) = 0.$$

Je zřejmé, že mezi cykly délky 2 budou i pevné body $x = 0$ a $x = \pm\sqrt{2+\varepsilon}$. Navíc jsou tu ale $x = \pm\sqrt{\varepsilon}$, které budou v okolí počátku stabilní, protože $Df^{(2)}(\pm\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon) = 1 - 4\varepsilon + 4\varepsilon^2 \in (0, 1)$ pro $\varepsilon \in (0, 1)$.

Vzhledem k vzniku těchto cyklů délky 2 v okolí počátku se tato bifurkace nazývá také bifurkace zdvojení periody.

Věta: Předpokládejme, že jednodimenzionální jednoparametrický systém (rovnice)

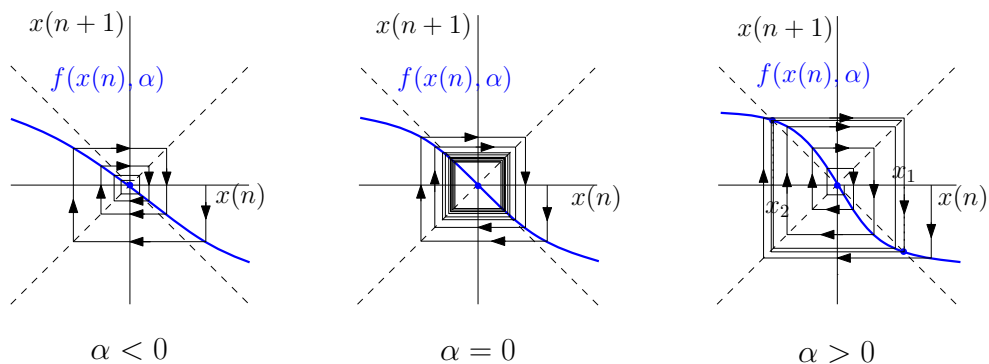
$$x(n+1) = f(x(n), \alpha), \quad x(n) \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (32)$$

kde f je hladká funkce, má pro $\alpha = 0$ pevný bod $x = 0$ a $\lambda = f_x(0, 0) = -1$. Předpokládejme, že jsou splněny podmínky

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f_{xx}(0, 0))^2 + \frac{1}{3}f_{xxx}(0, 0) &\neq 0 && \text{podmínka nedegenerovanosti,} \\ f_{x\alpha}(0, 0) &\neq 0 && \text{podmínka transversality.} \end{aligned}$$

Pak je (32) v okolí počátku lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě

$$y(n+1) = -(1 + \varepsilon)y(n) \pm y^3(n).$$



Zdvojování periody a univerzalita

Uvažujme logistickou rovnici

$$x(n+1) = ax(n)(1-x(n)), \quad (33)$$

kde a je kladný parametr.

Příklad. Ukažte, že v systému dochází k flip bifurkaci. Najděte kritickou hodnotu parametru a , ve kterém dojde k rozdvojení.

Příklad. Proved'te analýzu stability cyklu délky 2. Kdy a jak dojde k destabilizaci?

Příklad. Prostudujte chování logistické rovnice v XPPAUTu. Spust'te postupně logistic.ode, cobweb.ode a logbif.ode. Otevř'te i soubory a prostudujte, jak jsou vytvořeny.

Poznámka 24. Zdvojování periody způsobuje vznik cyklů délky 2, 4, 8 atd. pro kritické hodnoty parametru a_2, a_4, a_8, \dots . Tato tzv. Feigenbaumova kaskáda zdvojování periody je obecný fenomén a číslo

$$\mu_F = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{2^k} - a_{2^{k-1}}}{a_{2^{k+1}} - a_{2^k}} \doteq 4.6692$$

se nazývá Feigenbaumovo číslo. Nejpřekvapivější je, že tato konstanta je univerzální pro mnoho diferenčních systémů, ve kterých dochází ke kaskádové flip bifurkaci.

Příklad. Rickerova rovnice populační dynamiky

$$x(n+1) = ax(n)e^{-x(n)}.$$

Logistický model růstu populace

Pokud $y(n)$ označuje velikost nebo hustotu populace v čase n a r je míra růstu této populace, bude rovnice

$$y(n+1) - y(n) = r(y(n))y(n)$$

popisovat diskrétní dynamiku populace. Míra růstu může záviset na mnoha faktorech.

Nejjednodušší model (Malthusův) uvažuje $r = \text{const}$. Nevýhodou takového modelu je ovšem to, že asymptotické chování neodpovídá realitě, populace buď vymře nebo populace nekonečně roste.

Typické biologické a ekologické modely předpokládají jistou kapacitu prostředí K , kterou nelze dlouhodobě překročit, protože prostředí by populaci neuživilo. Nejjednodušším a často používaným modelem je proto logistický model, kde míra růstu r lineárně klesá s velikostí populace k nule, tj.

$$y(n+1) - y(n) = r \left(1 - \frac{y(n)}{K} \right) y(n). \quad (34)$$

Pokud je $r \neq 0$ (triviální případ), můžeme provést transformaci $y(n) = \frac{1+r}{r} Kx(n)$, kterou zmenšíme počet parametrů a dostáváme logistickou rovnici:

$$x(n+1) = ax(n)(1-x(n)), \quad \text{kde } a = 1+r.$$

Příklad. Pouvažujte, jak by vypadal model, kde by míra růstu klesala s velikostí populace exponenciálně. Srovnejte s Rickerovou rovnicí.

Deterministický chaos

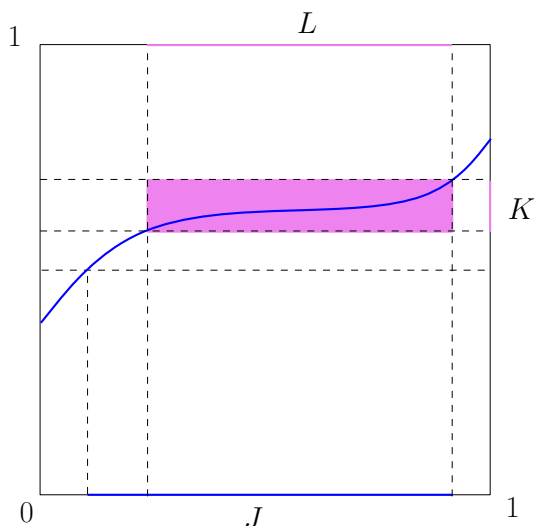
Co je to chaos? Slovo chaos se odvozuje z řeckého $\chi\alpha\omicron\varsigma$ a znamená nepředvídatelnost. Deterministický chaos je neperiodické deterministické chování, které je

- velice citlivé na počáteční podmínky,
- topologicky transitivní - což znamená, že libovolný interval transformuje na libovolný další interval
- má husté periodické trajektorie

DETERMINISTICKÝ NEZNAMENÁ PŘEDVÍDATELNÝ!!!

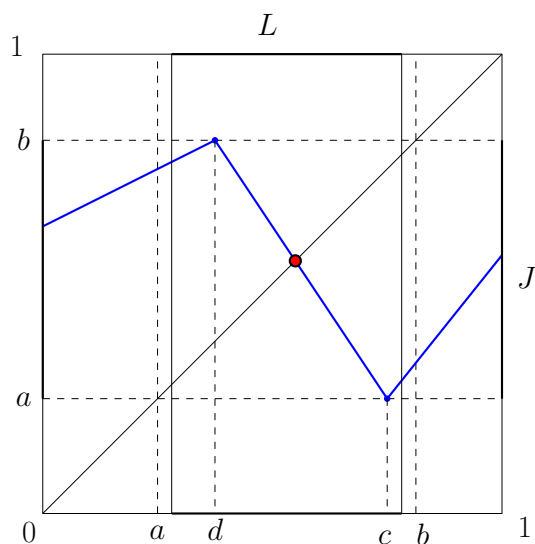
Nechť $f : I \rightarrow I$ je spojitě zobrazení na $I = \langle 0, 1 \rangle$. Uvažujme diskrétní dynamický systém $\{\mathbb{N}, I, f^n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Necht' $J, K \subset I$ jsou uzavřené intervaly.

Definice: Řekneme, že J pokrývá K pod f , zapisujeme $J \rightarrow K$, jestliže existuje uzavřený interval $L \subset J$ tak, že $f(L) = K$.



Věta (O pevném bodě): Jestliže $J \rightarrow J$ pod f , pak má f v J pevný bod.

Důkaz. Necht' $J = \langle a, b \rangle$. Podle definice existuje uzavřený interval $L \subset J$ takový, že $f(L) = J$, tedy existuje $c, d \in L$ splňující $f(c) = a \leq c$ a $f(d) = b \geq d$. Podle věty o střední hodnotě nabývá spojitá funkce $g(x) = f(x) - x$ nulové hodnoty na $L \subset J$. \square



Uvědomme si nyní, že pokud $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_n$ pod f , pak existuje uzavřený interval $J \subset I_0$ tak, že $f^{(k)}(J) \subset I_k$ pro všechna $k = 0, 1, \dots, n-1$ a $f^{(n)}(J) = I_n$. Volbou $I_n = I_0$ dostáváme s použitím věty o pevném bodě následující tvrzení:

Věta: Jestliže $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$ pod f , pak má $f^{(n)}$ v I_0 pevný bod x , pro který platí $f^{(i)}(x) \in I_i$ pro $i = 0, 1, \dots, n-1$.

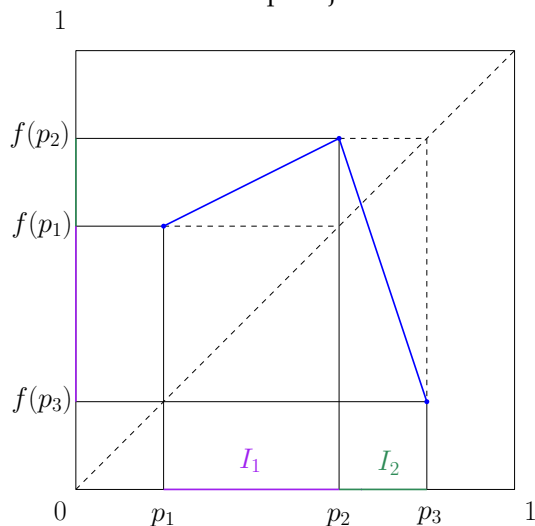
Věta (Li-Yorke): Uvažujme spojitě zobrazení $f : I \rightarrow I$, které má cyklus délky 3. Pak má f také cykly libovolné délky $n \geq 1$.

Důkaz. Uvažujme cyklus délky 3 $\{p_1, p_2, p_3\}$, tj.

$$p_2 = f(p_1), p_3 = f(p_2), p_1 = f(p_3)$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $p_1 < p_2 < p_3$. Označme dva intervaly $I_1 = \langle p_1, p_2 \rangle$ a $I_2 = \langle p_2, p_3 \rangle$. Pak I_1 pokrývá I_2 a I_2 pokrývá I_1 i I_2 .

Perioda 3 implikuje chaos:



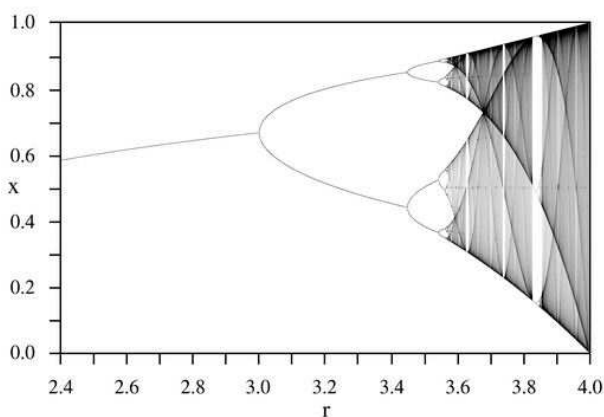
Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ má tedy $f^{(n)}$ pevný bod, protože platí

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_2 \rightarrow I_1,$$

kde I_2 je zde obsaženo $(n - 1)$ -krát. Tento pevný bod nemůže odpovídat cyklu délky $k < n$ (kromě $k = 3$, který je předpokládán), protože pokud by platilo $f^{(k)}(x) = x$ pro $k < n$, pak $x \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$, což je jediný cyklus, námi předpokládaný délky 3. \square

Příklad. Ukažte, že pro $a_F = 1 + 2\sqrt{2}$ má logistická rovnice (33) cyklus délky 3, přičemž pro tuto kritickou hodnotu parametru dochází k bifurkaci typu fold, přičemž stabilní a nestabilní 3 cykly vznikají pro $a > a_F$ a zaniknou na $a = a_F$.

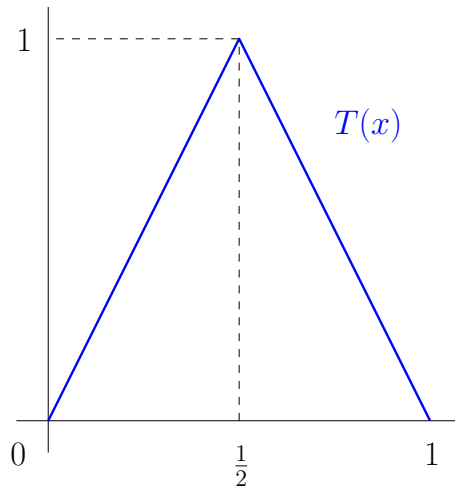
Bifurkační diagram logistického zobrazení:



Tent map - stanové zobrazení

Tent map je příkladem jednoduchého zobrazení $\langle 0, 1 \rangle$ na $\langle 0, 1 \rangle$, které vykazuje chaotické chování.

$$T(x) = \begin{cases} 2x & x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \\ 2 - 2x & x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$



Co víc, dynamický systém příslušný logistickému zobrazení na $\langle 0, 1 \rangle$ je topologicky ekvivalentní systému $\{\mathbb{N}, \langle 0, 1 \rangle, T^n\}$, a proto vykazuje také chaos. Totéž platí pro jakékoliv jiné zobrazení $\langle 0, 1 \rangle$ na $\langle 0, 1 \rangle$, které má jedno maximum. Na jednoduchém stanovém zobrazení si ukážeme proč - základním mechanismem je "stretch and fold", natažení a ohyb.

Číslo $x \in \langle 0, 1 \rangle$ má binární zápis

$$x = 0.\omega_1\omega_2\omega_3 \dots = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2^2} + \frac{\omega_3}{2^3} + \dots,$$

kde ω_k jsou cifry 0 nebo 1. Pokud $x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$, pak

$$T(x) = T(0.\omega_1\omega_2\omega_3 \dots) = 0.\omega_2\omega_3 \dots$$

Pokud $x \in (\frac{1}{2}, 1)$, pak $1 - x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ splňuje

$$T(1 - x) = T(0.\omega_1\omega_2\omega_3 \dots) = 0.\omega_2\omega_3 \dots$$

Přitom ale protože

$$1 - x = \frac{1}{2} - \frac{\omega_0}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{\omega_1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{\omega_2}{2^3} + \dots,$$

je binární zápis x a $1 - x$ komplementární (na místě nuly stojí jednička a naopak). Označíme-li komplementy ω_k a $\bar{\omega}_k$, platí

$$T(x) = T(0.\omega_1\omega_2\omega_3 \dots) = \begin{cases} 0.\omega_2\omega_3 \dots & x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle, \\ 0.\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3 \dots & x \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Trajektorii $x, T(x), T^2(x), \dots$ stanového zobrazení si proto můžeme představit jako posun (případně komplement posunu) v binárním zápise počáteční hodnoty x . Ještě si uvědomme, že metrika

$$d(0.a_1a_2a_3\dots, 0.b_1b_2b_3\dots) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{2^k}$$

vytváří na $\langle 0, 1 \rangle$ úplný metrický prostor (je analogická běžné metrice decimální). Dostáváme takto následující vlastnosti.

- Citlivost na počáteční podmínky - předpokládejme, že známe počáteční podmínku x_0 až do N -tého binárního místa. Uvažujme (nespočetnou) množinu čísel, která mají stejný začátek binárního zápisu, liší se až od mocniny 2^{-N} a jejich trajektorie. Po N iteracích se tyto blízké trajektorie stávají zcela náhodnými a neexistuje žádný vztah k počáteční podmínce.
- Topologická transitivnost (mixování) - uvažujme interval počátečních hodnot, které se liší poprvé na N -tém binárním místě. Po N iteracích dojde k posunu o těchto N míst a interval se rozprostře na celý $\langle 0, 1 \rangle$.
- Má husté periodické trajektorie - binární zápis každého racionálního čísla je zakončen opakující se skupinou cifer, a proto generuje periodické trajektorie (včetně pevných bodů). Iracionální čísla mají binární zápis, který se neopakuje. Proto jsou periodické trajektorie husté (jsou libovolně blízko jiné dané trajektorii) v množině chaotických trajektorií.

Příklad. Ukažte, že $h : x \mapsto \sin^2 \frac{\pi x}{2}$ je homeomorfismus na $\langle 0, 1 \rangle$ a platí $f(h(x)) = h(T(x))$ pro logistické zobrazení $f(x) = 4x(1-x)$.

Poznámka 25. Mluvíme o topologicky konjugovaných zobrazeních ($T = h^{-1} \circ f \circ h$) a topologicky ekvivalentní dynamice systémů $\{\mathbb{N}, \langle 0, 1 \rangle, f^n\}$ a $\{\mathbb{N}, \langle 0, 1 \rangle, T^n\}$.

Jak měřit chaos?

Uvažujme trajektorii $x(n)$ splňující počáteční úlohu

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad x_0 = x$$

Pro tuto trajektorii definujme číslo

$$\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \ln |f'(x_v)|$$

Toto číslo představuje míru separace infinitesimálně blízkých trajektorií od této trajektorie:

$$\frac{d_n}{\varepsilon} = \frac{|f^{(n)}(x+\varepsilon) - f^{(n)}(x)|}{\varepsilon} = e^{\lambda n}, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Definice: Číslo $\lambda(x)$ (pokud limita existuje) označujeme jako Ljapunovův exponent trajektorie. Pokud je x pevným bodem zobrazení f , definujeme $\lambda(x) = -\infty$.

Pokud podél trajektorie $x(n)$ dochází ke kontrakci, je $\lambda(x) < 0$, v případě asymptotické expanze je $\lambda(x) > 0$.

Je-li pro omezenou trajektorii Ljapunovův exponent kladný, je trajektorie nutně chaotická.

Příklad. Ukažte, že Ljapunovův exponent stanového zobrazení je $\ln 2$.

Příklad. Pro která p jsou trajektorie $x(n+1) = T_p(x(n))$ chaotické?

$$T_p(x) = \begin{cases} px & x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \\ p(1-x) & x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Ve více dimenzích závisí míra separace blízkých trajektorií na počátečním směru separace, proto se definuje Ljapunovovo spektrum (n hodnot v bazických směrech, řazené dle velikosti) a maximální Ljapunovův exponent. Program Xppaut umí maximální Ljapunovův exponent trajektorie numericky vypočítat. Samozřejmě ale nepočítá limitu, ale pouze přibližnou konečnou sumu.

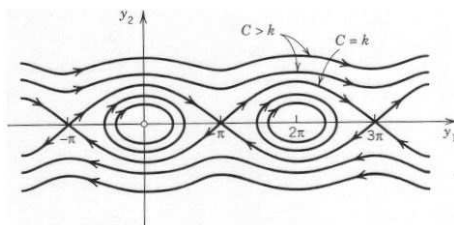
Hodnoty Ljapunovových exponentů jsou invariantní vzhledem k širokému spektru transformací souřadnic (ergodická teorie, Osedelec) a limity existují pro skoro všechna x a na x nezávisí. Pro invertibilní $f : X \rightarrow X$, které má invertibilní $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, se Ljapunovovy exponenty nemění.

Chaotický atraktor

Často rozlišujeme disipativní a konzervativní systémy.

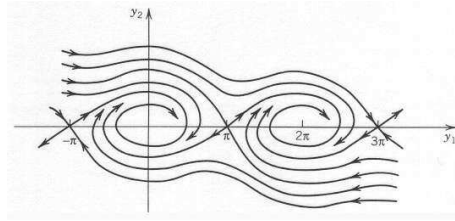
- V konzervativních systémech platí nějaký zákon zachování, obecně je zachován objem fázového prostoru v čase. Systém je uzavřený, trajektorie jsou často cykly.

Ideální kyvadlo :



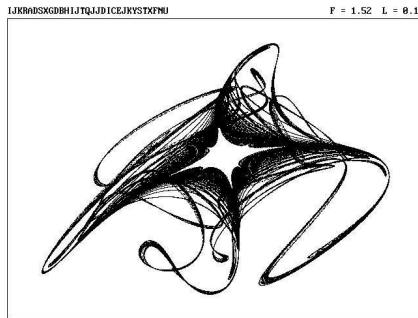
- V disipativních systémech se nějaká energie ztrácí, systém je otevřený a objem fázového prostoru v čase se zmenšuje. Takový systém v čase spěje k atraktoru - rovnovážnému bodu, limitnímu cyklu nebo jinému atraktoru.

Tlumené kyvadlo :



V disipativních systémech mohou existovat také atraktory vykazující chaotické chování (diskrétní i spojité). Atraktorem je vlastně jediná nekonečná chaotická trajektorie. Maximální Ljapunovův exponent takového atraktoru je kladný a atraktor typicky vykazuje tzv. fraktální strukturu (soběpodobnost). Nazývá se chaotickým nebo podivným atraktorem.

Podivné chaotické atraktory v diskrétním 2D systému:



Java applet.

Kontrola chaosu metodou OGY

V roce 1990 Ott, Grebogi a Yorke uvedli praktickou metodu (úspěšnou i v aplikacích) stabilizace nestabilních chaotických cyklů. Metoda je založena na faktu, že chaotický atraktor obsahuje nekonečné husté množství nestabilních cyklů. Ty jsou stabilizovány malými perturbacemi kontrolního parametru a . Uvažujme zobrazení

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n), a), \quad (35)$$

kde a je dostupný parametr, který můžeme změnit v nějakém okolí své "nominální" hodnoty a_0 . Označme $\mathbf{x}^*(a)$ nestabilní pevný bod zobrazení (35). V malém okolí a_0 můžeme aproximovat

$$\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}^*(a_0) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(a_0), a_0)(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*(a_0)) + \mathbf{c}(a - a_0), \quad (36)$$

kde $\mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial a}(\mathbf{x}^*(a_0), a_0)$ je sloupcový vektor. Vzhledem k transitivity a hustotě chaotické trajektorie musí v nějakém malém okolí $\mathbf{x}^*(a_0)$ pro nějaké $\mathbf{x}(n)$ platit

$$a - a_0 = -\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}(n) - \mathbf{x}^*(a_0)) \quad (37)$$

Substitucí (37) do (36) dostaneme

$$\mathbf{x}(n+1) - \mathbf{x}^*(a_0) = (D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(a_0), a_0) - \mathbf{c}\mathbf{k})(\mathbf{x}(n) - \mathbf{x}^*(a_0)).$$

Volbou $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$ můžeme dosáhnout stability regulovaného pevného bodu, tj. najdeme \mathbf{k} tak, aby

$$|D\mathbf{f}(x^*(a_0), a_0) - \mathbf{c}\mathbf{k}| < 1.$$

Kontrola chaosu v Henonově zobrazení

Prostudujte vědecký článek.

Kontrola chaosu v logistickém zobrazení

Uvažujme logistickou rovnici (33), ve které kontrolujeme chaos neustálými pulzy $x_i = kx_i$ po p iteracích. Definujme zobrazení $F(x) = kf^{(p)}(x)$. Pevný bod x^* regulovaného zobrazení $F(x)$ tedy bude splňovat $kf^{(p)}(x^*) = x^*$ a bude stabilní, pokud

$$|kDf^{(p)}(x^*)| < 1.$$

Označíme-li $C^p(x) = \frac{x}{f^{(p)}(x)} Df^{(p)}(x)$, dostáváme podmínku pro oblast kontrolovatelných hodnot: $|C^p(x)| < 1$.

Výpočet C^p v Maplu

Simulace v Matlabu, spusťte chaoscontrol.m

Neimark-Sackerova bifurkace

Jde o analogii Hopfovy bifurkace pro spojité systémy. Vzniká při přechodu komplexně sdružených vlastních hodnot přes hranici jednotkového kruhu a v její souvislosti se objevuje limitní cyklus.

Uvedeme si pouze normální formu v maticovém tvaru, kde je velmi dobře viditelná souvislost s normální formou spojité Hopfovy bifurkace.

$$\begin{pmatrix} x(n+1) \\ y(n+1) \end{pmatrix} = (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix} + (x^2(n) + y^2(n)) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix},$$

kde $\theta = \theta(\alpha)$, $a = a(\alpha)$, $b = b(\alpha)$ jsou hladké funkce splňující $0 < \theta(0) < \pi$ a $a(0) < 0$.

Tento systém má pevný bod $[x, y] = [0, 0]$ s Jacobiho maticí

$$J = (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

a vlastními hodnotami $\lambda_{1,2} = (1 + \alpha)e^{\pm i\theta}$. Pro $\alpha = 0$ jsou hodnoty na jednotkovém kruhu a pevný bod není hyperbolický. Podobně jako u Hopfovy bifurkace můžeme transformací $z(n) = x(n) + iy(n)$ převést systém na jednu komplexní rovnici, která má v polárním tvaru $z(n) = \rho(n)e^{i\varphi(n)}$ zápis:

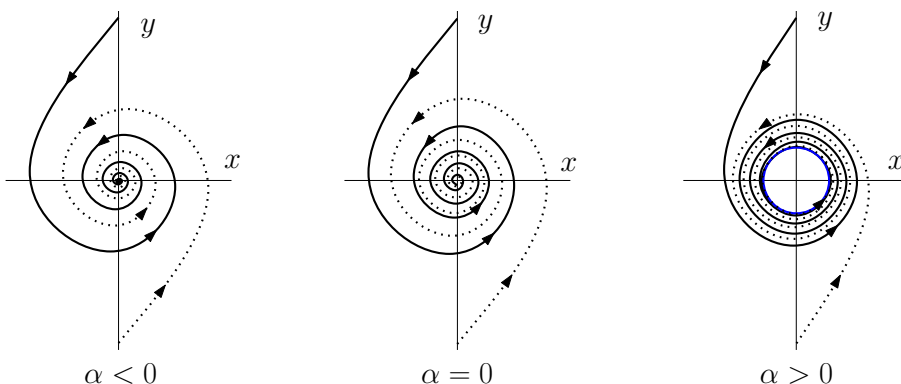
$$\begin{aligned} \rho(n+1) &= \rho(n)(1 + \alpha + a(\alpha)\rho^2(n)) + \rho^4(n)R(\rho(n), \alpha), \\ \varphi(n+1) &= \varphi(n) + \theta(\alpha) + \rho^2(n)Q(\rho(n), \alpha), \end{aligned}$$

kde R a Q jsou hladké funkce. Podobně jako v případě Hopfovy bifurkace $\rho = 0$ je stabilní pevný bod pro $\alpha < 0$ a nestabilní pro $\alpha > 0$. Pro malá $\alpha > 0$ má navíc stabilní pevný bod

$$\rho_0(\alpha) = \sqrt{-\frac{\alpha}{a(\alpha)}} + O(\alpha),$$

který odpovídá vzdálenosti od počátku. Vzniká tedy stabilní limitní cyklus, přitom rotace v přibližné vzdálenosti $\rho_0(\alpha)$ je přibližně o úhel $\theta(\alpha)$.

Neimark-Sackerova bifurkace:



Podobně jako ve spojitém případě, i zde dochází buď k superkritické bifurkaci (vzniku stabilního limitního cyklu) nebo k subkritické bifurkaci (vzniku nestabilního limitního cyklu). Větu o ekvivalenci se systémem v normálním tvaru si uvádět nebudeme, jen podotkneme, že k podmínkám nedegenerovanosti a transversality se objevuje ještě další podmínka, která vylučuje tzv. silnou rezonanci. Jako odrazový můstek pro studium N-S bifurkace uvedme stránku

[Scholarpedia](#).

Poincarého zobrazení a bifurkace cyklů

Uvažujme nyní znovu spojité m -rozměrný systém (1)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Předpokládejme navíc, že systém (1) má periodickou trajektorii L . V nějakém bodě $\mathbf{x}_0 \in L$ uvažujme hladkou $m - 1$ -rozměrnou varietu (např. nadrovinu)

$$\Sigma = \{g(\mathbf{x}) = 0 : g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, g(\mathbf{x}_0) = 0\},$$

která je tzv. transverzální, což znamená, že není v bodě \mathbf{x}_0 tečná L , tedy řeže cyklus L . V angličtině se jí proto říká *Poincaré cross-section* Σ . Podmínku transverzality můžeme zapsat pomocí gradientu funkce g (normálového vektoru Σ) takto:

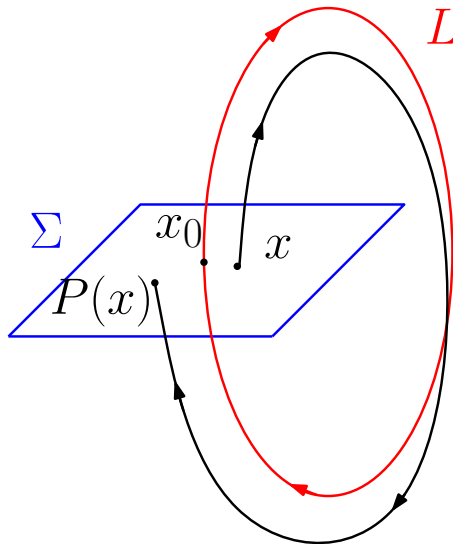
$$\langle \nabla g(\mathbf{x}_0), \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \rangle \neq 0,$$

tedy normálový vektor Σ nesmí být kolmý k trajektorii cyklu L . Je zřejmé, že takovou varietou může být například rovina kolmá k L v \mathbf{x}_0 :

$$g(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}_0), (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \rangle = 0.$$

Na této varietě v okolí \mathbf{x}_0 nyní definujeme zobrazení $\mathbf{P} : \Sigma \rightarrow \Sigma$, které zobrazuje bod \mathbf{x} trajektorie $\varphi^t \mathbf{x}$ systému (1) na následující průsečík této trajektorie s varietou Σ .

Poincarého zobrazení:

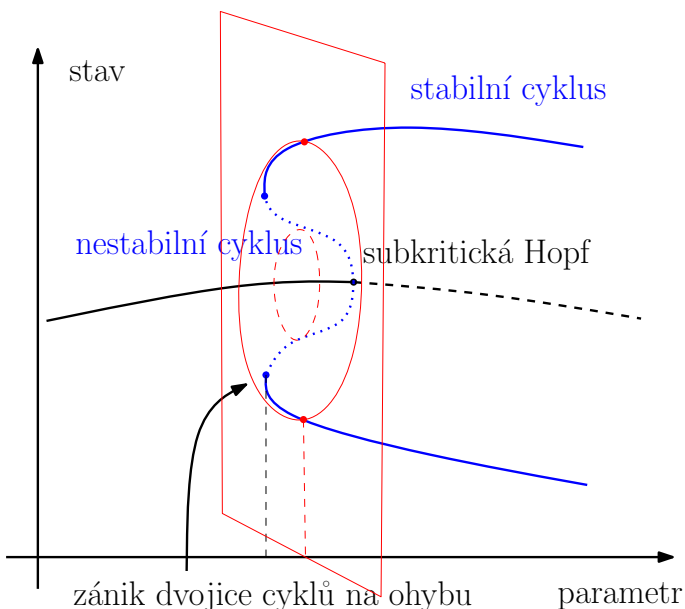


Zobrazení \mathbf{P} se nazývá Poincarého zobrazení příslušné cyklu L . Lokálně takto definujeme diskrétní dynamický systém $\{\mathbb{N}, \Sigma, \mathbf{P}^n\}$ s pevným bodem $\mathbf{x}_0 \in L$. Pokud na $m - 1$ -rozměrné Σ zvolíme souřadný systém s počátkem v \mathbf{x}_0 , bude možné v těchto souřadnicích $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{m-1})$ zapsat Poincarého zobrazení jako diferenční systém

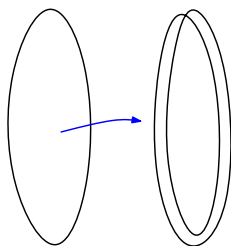
$$\boldsymbol{\xi}(n+1) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}(n))$$

s pevným bodem $\mathbf{0}$ a maticí linearizovaného systému $DP(\mathbf{0})$. Cyklus L bude stabilní (atraktivní), pokud budou vlastní hodnoty $DP(\mathbf{0})$ v absolutní hodnotě menší jedné (a nestabilní v opačném případě). Lze ukázat, že vlastní hodnoty matice linearizovaného systému nezávisí ani na volbě bodu x_0 , ani na volbě Σ a ani na volbě souřadnic. Bifurkace diskretních systémů tedy mohou nastávat i pro spojitě systémy. Bifurkace Poincarého zobrazení typu fold je příčinou vzniku a zániku dvou cyklů (stabilního a nestabilního - Bautinova bifurkace).

“Ohyb” cyklu, bifurkace typu fold:



Zdvojení periody Poincarého zobrazení bude znamenat zdvojení limitního cyklu:



K takové bifurkaci limitního cyklu může dojít až pro spojitě trojdimenzionální systémy (v rovině nemůže dojít k protnutí trajektorie) a následné postupné zdvojení periody vede k existenci chaosu i ve spojitých systémech.

Chaos ve spojitých systémech

Chaos ve spojitých autonomních systémech nemůže nastat v případě jedno a dvoudimenzionálního systému. Existují ale velmi jednoduché třírozměrné autonomní systémy, které chaos vykazují. Ještě v počátku 19. století se předpokládalo, že pokud budeme znát mechanismus přírodního zákona, budeme moci předpovídat budoucí chování přírody. Na konci 19. století ale Henri Poincaré předběhl svou dobu a objevil homoklinické trajektorie v dynamickém systému, který je znám jako problém tří těles a byl formulován Isaacem Newtonem v Principiích v druhé polovině 17. století. Jde o systém diferenciálních rovnic popisující gravitační působení tří těles. Původně šlo samozřejmě o Slunce, Zemi a Měsíc. Pokud ale nebudeme trvat na hmotnostech a vzdálenostech, které jsou určeny naší Sluneční soustavou, dostáváme obecný systém, který má překvapivě rozmanité dynamické chování, dokonce i chaotické.

[Problém tří těles od Miroslava Brože z MFF UK.](#)

[Scholarpedia.](#)

V roce 1927 Van der Pol poukázal na "irregulární šum" v obvodu rádia (RLC obvod). Až kolem roku 1960 se ukázalo, že i dynamickém systému Van der Polova oscilátoru skutečně vznikají homoklinické trajektorie a chaotické jevy. Mimořádně podobné chování vykazuje také nelineární oscilátor a nelineární kyvadlo. Kyvadla a pružinky jsou vůbec pěkné hračky:

[Pružina a kyvadlo.](#)

[Dvojitě kyvadlo.](#)

[Virtuální nelineární laboratoř](#)

Ve stejné době se pokoušel meteorolog Edward Norton Lorenz porozumět chybám, které vznikaly při použití lineárních technik v predikcích počasí. Použil jeden z prvních počítačů pro simulaci atmosférické dynamiky a díky chybě v zaokrouhlení objevil chaos a jeho citlivost na počáteční podmínky.

V roce 1963 spolu se Saltzmanem publikovali redukovaný systém popisující atmosféru, systém tří nelineárních diferenciálních rovnic vykazující chaos dnes známý jako model Lorenzova atraktoru. Lorenz dal později přednášce na toto téma slavný název

Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil set off a Tornado in Texas?

To způsobilo popularitu spojení "efekt motýlích křídel", který popisuje citlivost na počáteční podmínky.

Od té doby je Laplaceův determinismus poražen. Počasí nikdy nebudeme umět předpovídat na rok dopředu. Hra na burze bude také vždy otázkou krátkodobých rychlých transakcí. Nedokážeme předpovědět budoucnost, deterministický chaos nás vždy zavede do jiných uliček. Na druhé straně ale spolu s chaotickým atraktorem lidé objevili skrytý řád náhodného. Vznik pravidelna z nepravidelna - např. Turingův mechanismus vzniku vzorů v přírodě. A krásu fraktálů.

[Turingovy vzory v přírodě.](#)

[Galerie fraktálů.](#)

[Fraktály víc matematicky.](#)

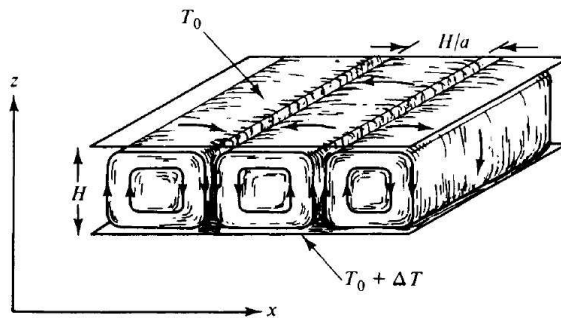
[Mandelbrotova množina a benediktínský mnich.](#)

Model Lorenzova atraktoru

V roce 1963 publikoval Lorenz zjednodušený model vycházející z Rayleighova původního problému hydrodynamiky kapaliny o výšce H a rozdílem teplot dolního a horního povrchu ΔT .

Rovnice popisující proudění vznikající vedením tepla si uvádět nebudeme (jde o parciální diferenciální rovnice), zmíníme se ale o některých aspektech modelu. Další parametry, které v modelu vystupují jsou gravitační zrychlení g , tepelná roztažnost α , viskozita ν a tepelná vodivost kapaliny κ .

Jak se zvyšuje rozdíl teplot povrchů ΔT , vedení tepla se stává nestabilní a vzniká cirkulace kapaliny. Můžete ho sledovat v hrnku horké kávy jako světlé a tmavé skvrny...



Rayleigh ukázal, že tato periodická řešení vznikají, pokud

$$R \equiv \frac{g\alpha H^3 \Delta T}{\nu\kappa} > R_c \equiv \frac{\pi^4(1+a^2)^3}{a^2}.$$

Číslo R se nazývá Rayleighovo číslo.

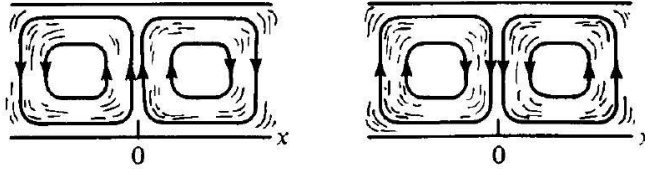
Pokud se ΔT bude dále zvyšovat, Rayleighovo proudění se znestabilní a vzniknou aperiodická řešení. Tato proudění lze napsat pomocí jistých funkcí, která jsou řešením následujícího systému (jsou to pomocné funkce, neodpovídají prostorovým souřadnicím).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy,\end{aligned}$$

kde $\sigma = \frac{\nu}{\kappa}$, $r = \frac{R}{R_c}$ a $b = \frac{4}{(1+a^2)}$.

Příklad. Ukažte, že pro $r < 1$ má systém jedinou stabilní rovnováhu, která fyzikálně odpovídá systému bez proudění (vyrovnání teplot).

Příklad. Ukažte, že pro $r > 1$ bude počátek nestabilní a dva další symetrické body budou stabilní pro $r > 1$ blízká jedné. Fyzikálně odpovídají tato řešení stabilnímu Rayleighovu proudění:



Charakteristický polynom příslušný těmto symetrickým bodům je

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2\sigma b(r - 1),$$

kde pro $r > 1$ jsou všechny koeficienty kladné a tudíž má alespoň jeden záporný kořen. Další dva mohou být i komplexní. Dochází u těchto dvou vlastních hodnot k přechodu imaginární osy, tj. k destabilizaci rovnováhy a vzniku limitního cyklu v důsledku Hopfovy bifurkace? Pokusme se najít tuto kritickou hodnotu.

Pro kritickou hodnotu Hopfovy bifurkace leží komplexně sdružená vlastní čísla na imaginární ose, tj. pro charakteristický polynom a jeho vlastní čísla λ_1 a $\pm i\omega$ platí

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - i\omega)(\lambda + i\omega) = 0,$$

tj.

$$\lambda^3 - \lambda_1\lambda^2 + \omega^2\lambda - \lambda_1\omega^2 = 0.$$

Pro kritickou hodnotu Hopfovy bifurkace tedy platí nutná podmínka

$$(\sigma + b + 1)(r + \sigma)b = 2\sigma b(r - 1),$$

tj.

$$r^* = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}.$$

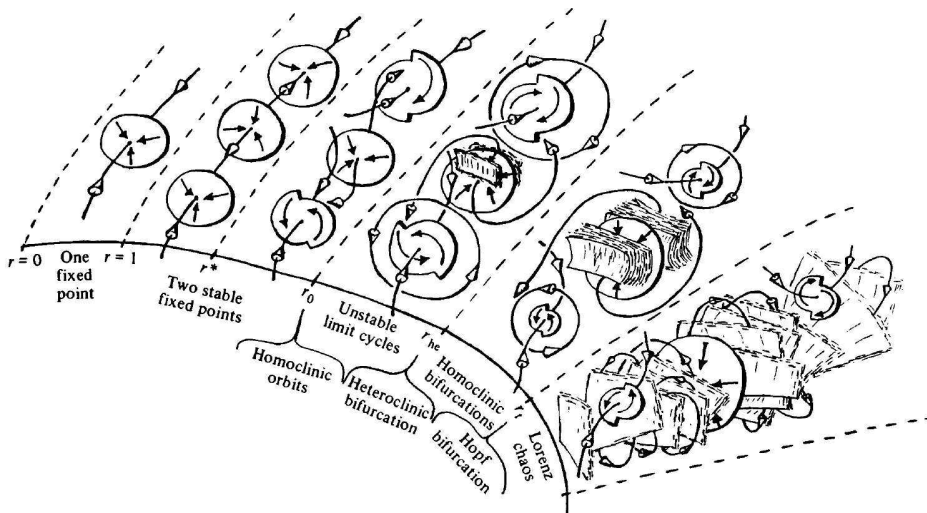
Protože $r > 1$, musí být navíc $\sigma > b + 1$.

Příklad. Vhodně zvolte parametry a vykreslete fázové portréty v některém z vhodných softwarů tak, aby byl vidět jev Hopfovy bifurkace.

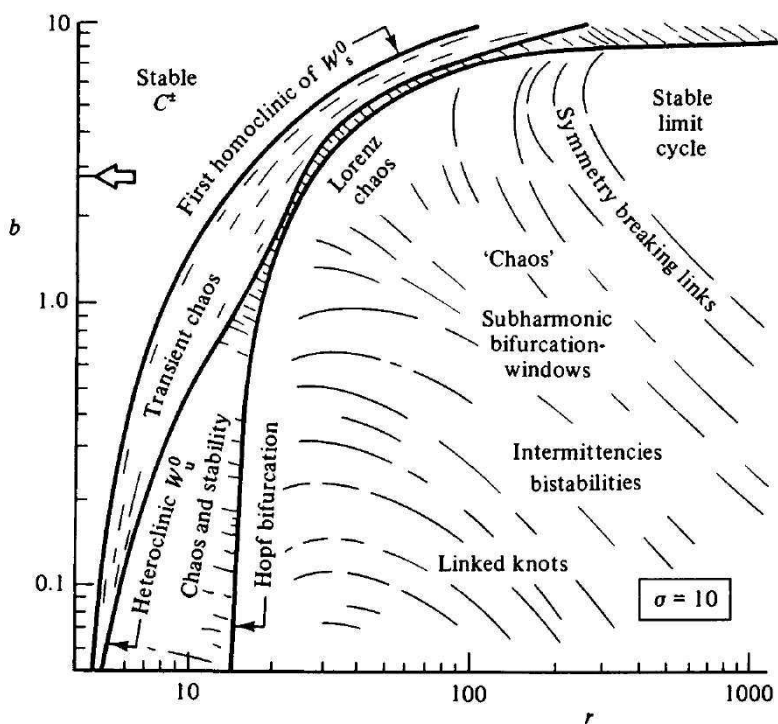
Příklad. V programu Matcont nebo Xppaut se pokuste nakreslit bifurkační diagram pro parametry blízké Hopfově bifurkaci. Všimněte si, že jde o subkritickou Hopfovou bifurkaci se vznikem nestabilního limitního cyklu.

A divné věci začnou se dít...
Homoklinická trajektorie sedla

Fázové portréty pro různá r :



Bifurkační diagram Lorenzova systému pro Prandtlovo číslo $\sigma = 10$:



Literatura, software a applety

- Kontinuační balík Matcont pro Matlab
<http://www.matcont.ugent.be/>
- Program Xppaut s kontinuačním Auto
<http://www.math.pitt.edu/~bard/xpp/xpp.html>
- Applety pro ODR a bifurkace
<http://techmath.uibk.ac.at/numbau/alex/dynamics/bifurcation>
- Nelineární laboratoř
<http://faculty.ifmo.ru/butikov/Nonlinear>
- Applety pro chaos a fraktály
<http://www.student.math.uwaterloo.ca/~pmat370/JavaLinks.html>

Reference

- [1] Kuznetsov Y.A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Second Edition, Applied Mathematical Sciences 112, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1995, 1998.
- [2] Chicone C., *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer Verlag, 1998.
- [3] Edelstein-Keshet L., *Mathematical Models In Biology*, New York: McGraw Hill Text, 1988.
- [4] Jackson E. A., *Perspectives of nonlinear dynamics*, Volume 2, Cambridge University Press, 1990.
- [5] Seydel R., *Practical Bifurcation and Stability Analysis*, Third Edition, Springer-Verlag, 2010.
- [6] Lynch S., *Dynamical Systems with Applications using Maple*, Second Edition, Birkhäuser Boston, 2010.
- [7] Hirsch M.W., Smale S., Devaney R.L., *Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos*, Elsevier Academic Press, 2004
- [8] Alligood, K., Sauer, T., Yorke, J., *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, New York, Springer-Verlag, 1997.
- [9] Murray, J. D., *Mathematical Biology*, Berlin, Springer-Verlag, 1993.
- [10] Fall Ch.P., Marland E. S., Wagner J. M., Tyson J. J., *Computational Cell Biology*, Springer-Verlag, New York, 2002
- [11] Fitzhugh, R., *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane*, Biophys. J. 1 (1961), 445.
- [12] Lorenz, E., *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmos. Sci. 20 (1963), 130.