# Pracovní text a úkoly ke cvičením MF002

## 1 Wienerův proces (Brownův pohyb)

Základním stavebním kamenem simulací náhodných procesů popsaných pomocí stochastických diferenciálních rovnic je generování trajektorií Wienerova procesu $W_t = W(\omega, t)$.

Definice říká, že počáteční hodnotou je $W_0 = 0$, ale s jakoukoliv jinou známou hodnotou se pracuje podobně. Přírůstky Wienerova procesu za časové intervaly délky $\Delta t$ jsou náhodné veličiny $\Delta W \sim \mathrm{N}(0, \Delta t)$, a pro disjunktní časové intervaly jsou tyto přírůstky stochasticky nezávislé.

Vlastní simulace trajektorie Wienerova procesu spočívá v dělení požadovaného časového intervalu $[0, T]$ na velmi krátké podintervaly délek $\Delta t$. V těchto jemně zvolených časech postupně (s rostoucím časem) počítáme hodnotu Wienerova procesu tak, že k hodnotě v bezprostředně předchozím známém čase připočítáváme realizaci náhodného přírůstku $\Delta W$.

Pro hodnotu $W(\omega, t + \Delta t)$ tedy platí:

$$W(\omega, t + \Delta t) = W(\omega, t) + \Delta W \ ,$$

přičemž

$$\Delta W = U\sqrt{\Delta t}, \quad \text{kde } U \sim \mathrm{N}(0, 1),$$

tj. realizace standardizované náhodné náhodné veličiny, jsou pro různá $t$ vzájemně nezávislé.

Projděte si následující skript, který $W_t$ generuje pomocí **for**-cyklu:

```
dt <- 0.001
W0 <- 0
t <- seq (0, 1, by=dt)

N <- length (t)
W <- rep (0, N)
W[1] <- W0
Wakt <- W0
for (k in 2:N) {
  dW <- sqrt (dt) * rnorm (1)
  Wakt <- Wakt + dW
  W[k] <- Wakt
}

plot (t, W, type="l", col="red", xlab="t", ylab="W")
abline (h = W0, lty = 2)
```

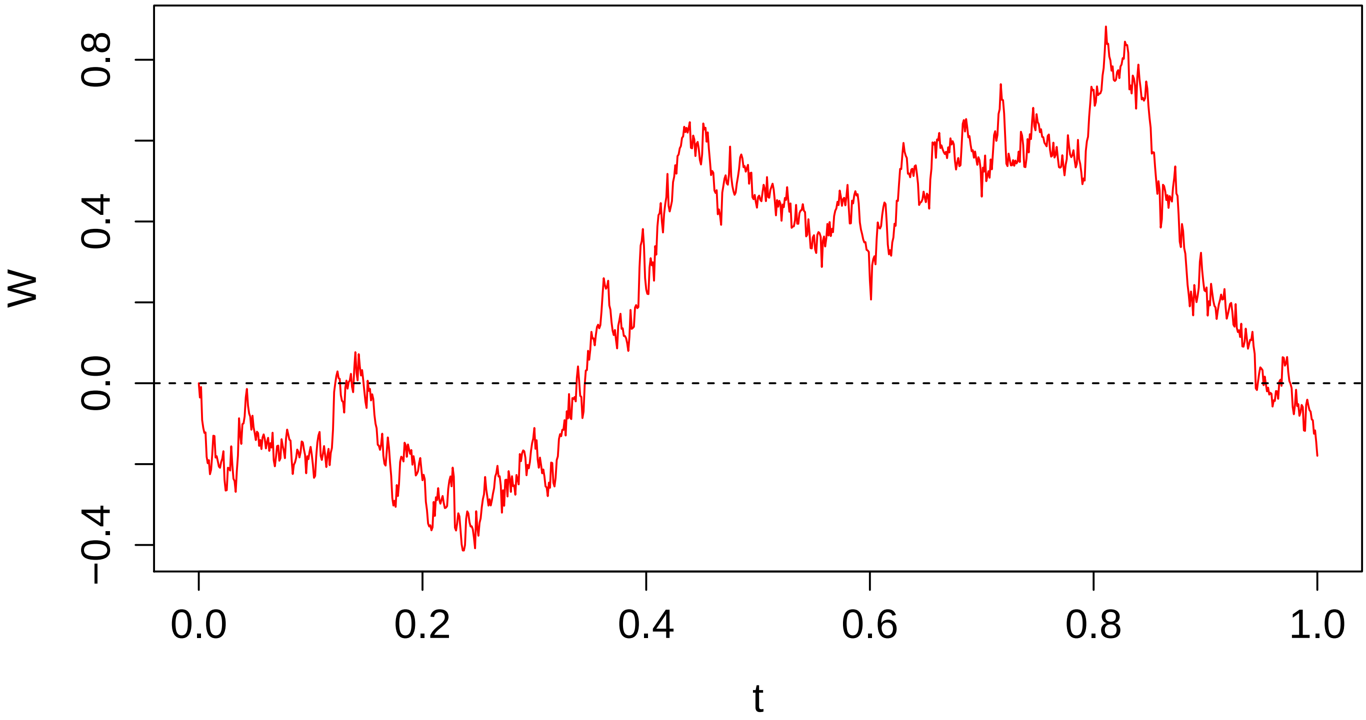
Výše uvedený postup se však v moderních matematických programech (*R*, *Matlab*) označovaných jako SVM (*Support Vector Machine*) nepoužívá.

Místo toho se jen jedním průchodem generuje celý náhodný výběr (vektor) přírůstků (nezávislost z definice $W_t$), který se kumulativně přičítá (funkcí **cumsum**) k výchozí hodnotě $W_0$:

```
dt <- 0.001
W0 <- 0
t <- seq (0, 1, by=dt)

N <- length (t)
dW <- rnorm (N - 1) * sqrt (dt)
W <- cumsum (c (W0, dW))

```

Ondřej Pokora, ÚMS PřF MU Brno, aktualizace 3. března 2014

```
plot (t, W, type="l", col="red", xlab="t", ylab="W")
abline (h = W0, lty = 2)
```

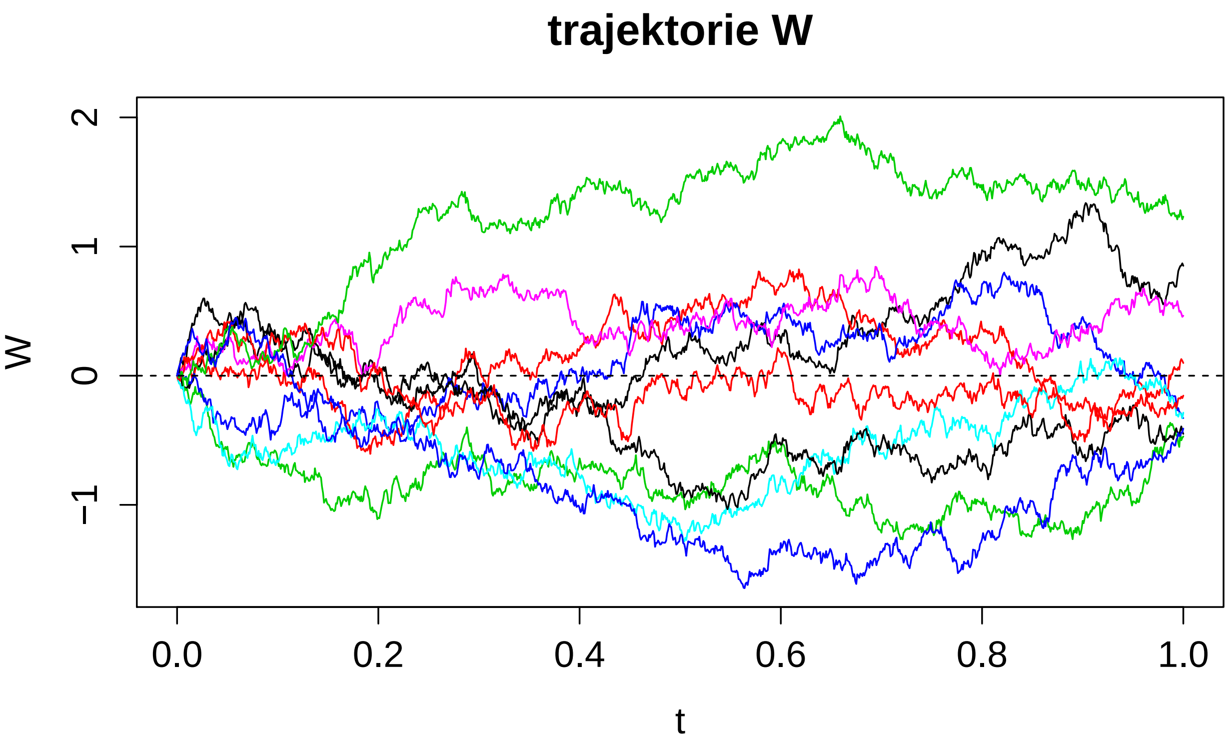



Řádky skriptu generující $W_t$ je vhodné si uložit jako vlastní funkci. Následně totiž můžeme jen změnou parametrů této funkce snadno generovat nové trajektorie:

```
generuj.Wp <- function (t, dt, W0) {
  dW <- rnorm (length (t) - 1) * sqrt (dt)
  W <- cumsum (c (W0, dW))
}

W <- generuj.Wp (t, dt, W0)

plot (t, W, type = "l", col = "red", xlab = "t", ylab = "W")
abline (h = W0, lty = 2)
```

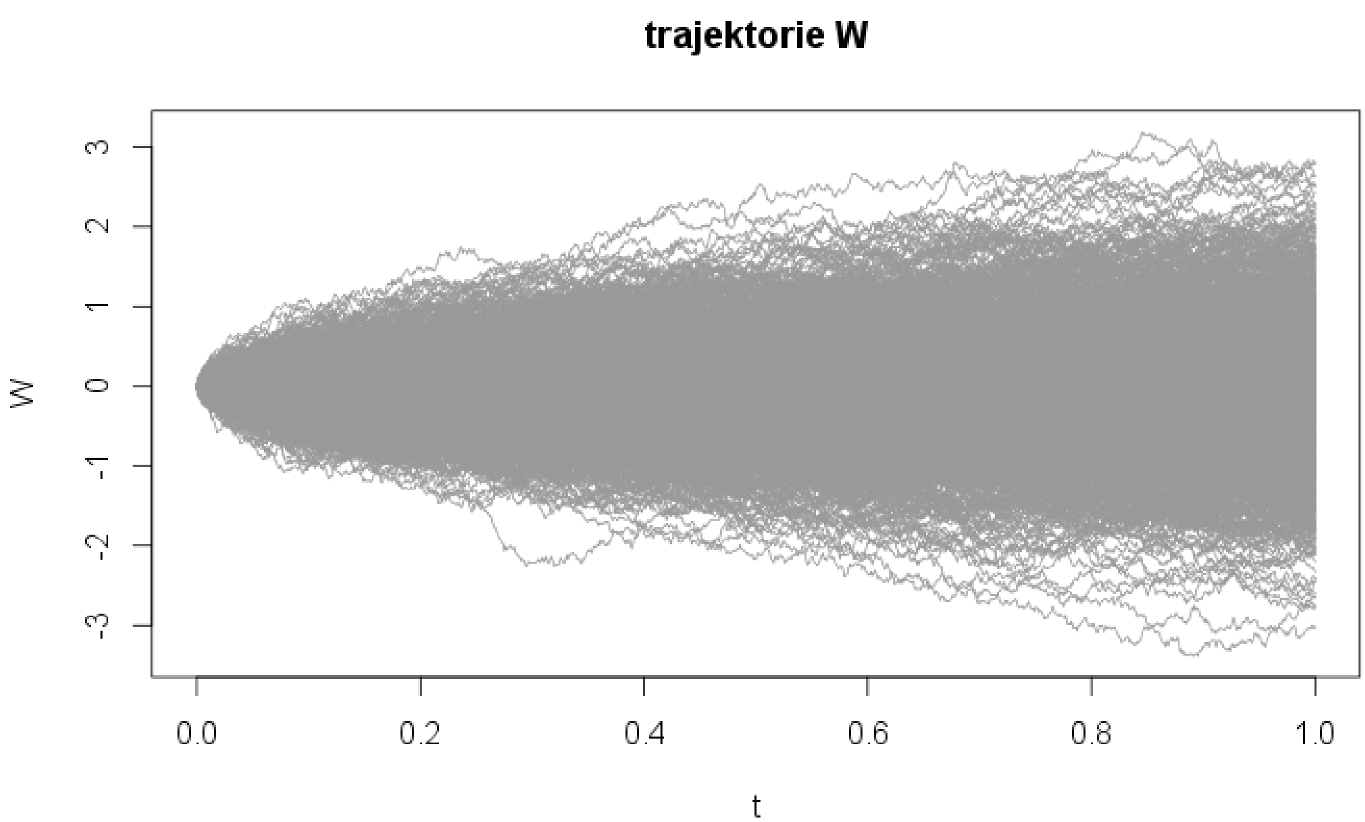
Výhoda vytvořené funkce se především ukáže, když chceme vygenerovat více trajektorií:

```
M <- sapply (1:10 , function (k) {
  generuj.Wp (t, dt, W0)
})

matplot(t,M,type="l",lty=1,xlab="t",ylab="W",main="trajektorie W")
abline (h = W0 , lty = 2)
```




Pouhou změnou rozsahu prvního parametru funkce **sapply** lze měnit počet trajektorií. Výsledné vektory hodnot pro jednotlivé trajektorie se přitom skládají vedle sebe, takže výsledná proměnná je matice. Čemu v této matici odpovídají jednotlivé řádky, resp. jednotlivé sloupce?

Zkoušejte si vygenerovat jiné počty trajektorií (až 1000, 10 000) $W_t$. Vykreslete je do grafu, seznamte se s parametry příkazů **plot** a **matplot** pro rozsahy a popisy souřadnicových os, a pro volbu stylu, tloušťky, symbolu a barvy čar zobrazených dat. Měli byste dostat podobný graf:




Dále budeme zkoumat rozdělení pravděpodobnosti realizací $W_t$ pro jeden konkrétní čas $t = 0.6$. Nejprve potřebujeme zjistit, který řádek tomuto času odpovídá.

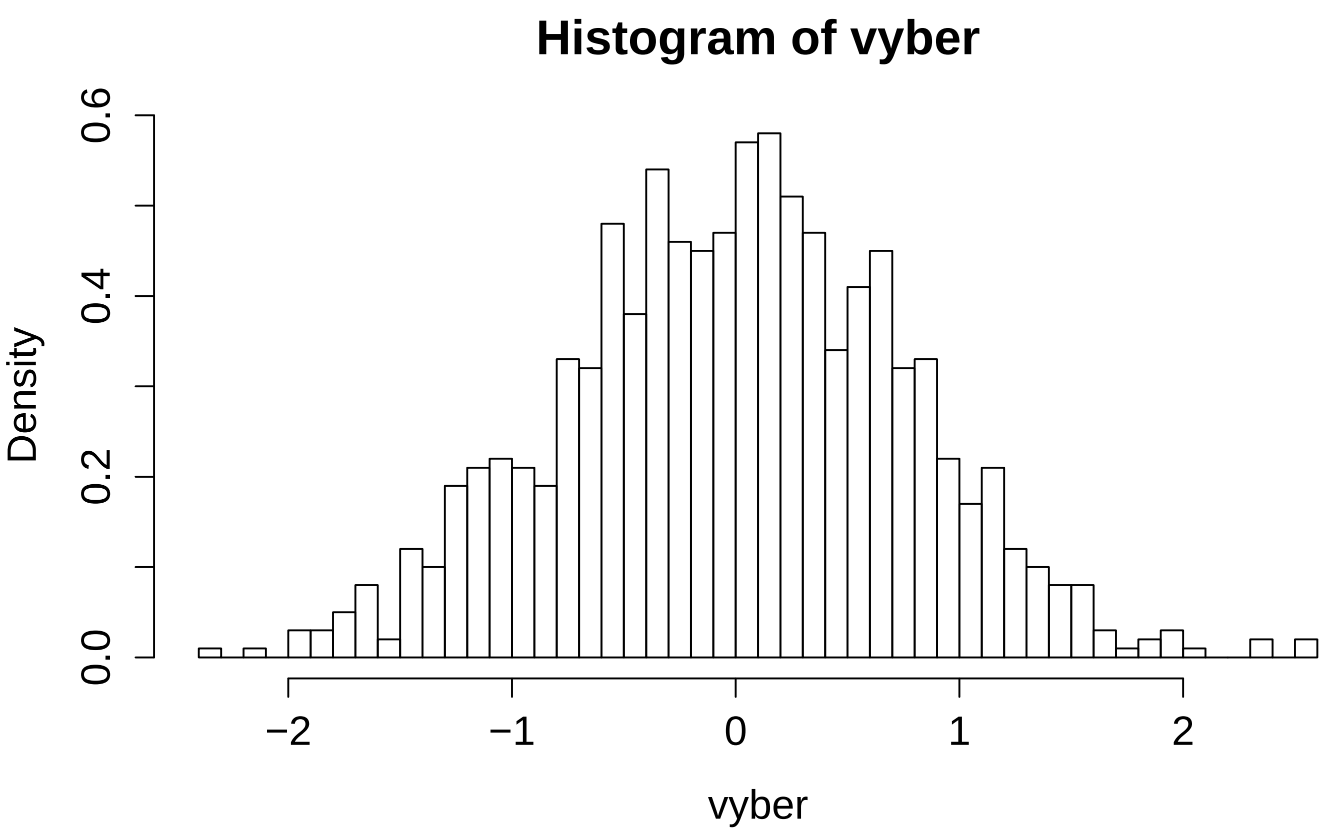
```
index <- which (t==0.6)
vyber <- M[index,]
```

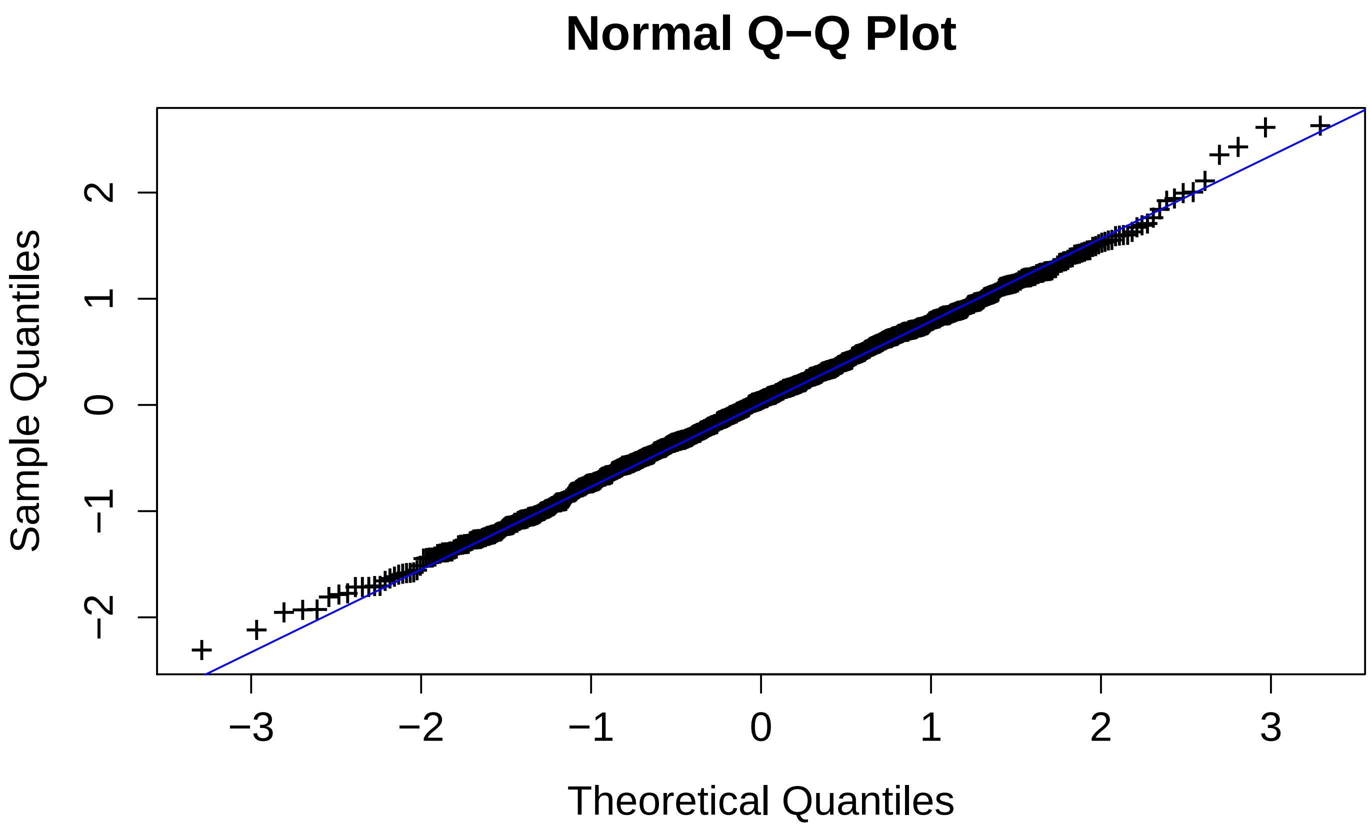
Vybrali jsme z matice trajektorií jen jeden řádek odpovídající požadovanému času $t = 0.6$, který je z pohledu statistiky náhodným výběrem.

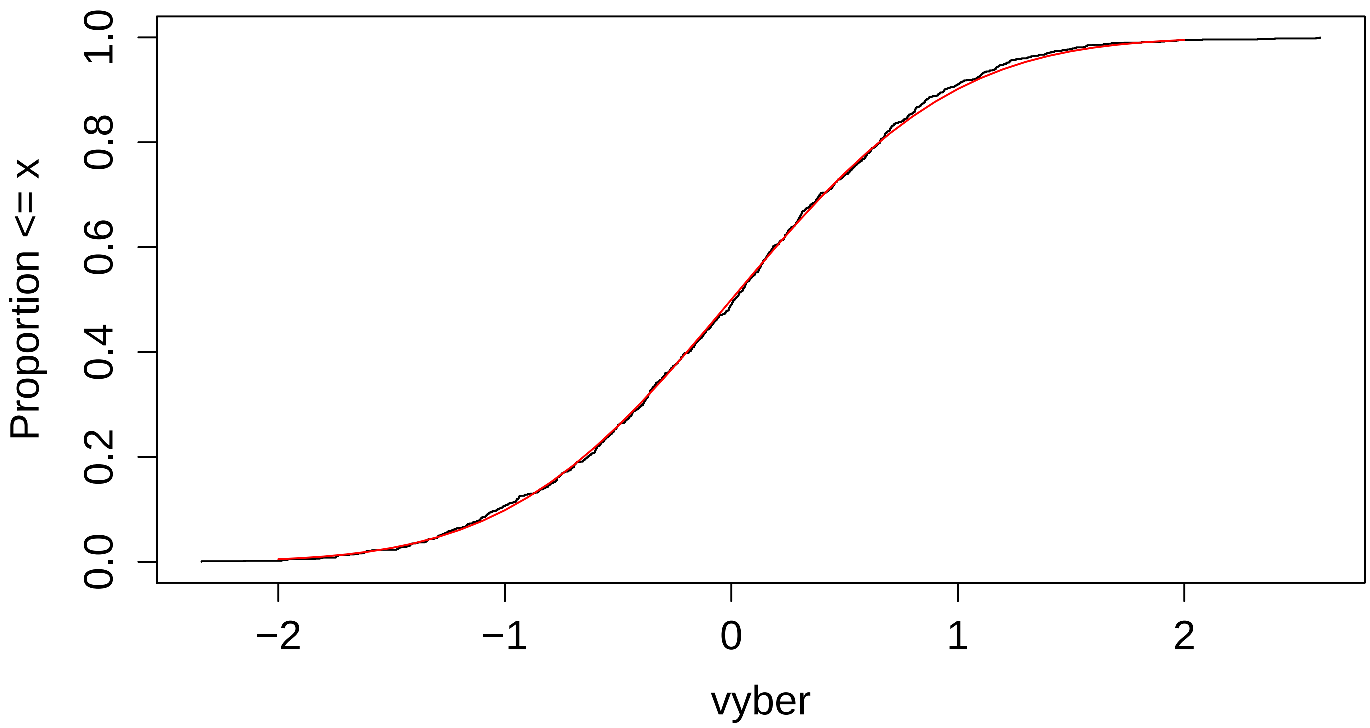
Následující příkazy shrnují nejčastěji používané nástroje pro ověřování rozdělení pravděpodobnosti: histogram, QQ-plot, empirickou distribuční funkci (ecdf) a Kolmogorovův-Smirnovův test. Pomocí nápovědy prozkoumejte použití příkazů a především interpretaci výsledků.

```
index <- which (t == 0.6)
vyber <- M[index,]

hist (vyber, breaks = 50, freq = FALSE)

qqnorm (vyber, pch = "+")
qqline (vyber, col = "blue")

plot (ecdf (vyber))

x <- seq (-2 ,2 , by = 0.1)
y <- pnorm (x , mean = 0 , sd = sqrt (0.6))
lines (x, y, col = "red")

ks.test (vyber, pnorm, mean = 0 , sd = sqrt (0.6))
ks.test (vyber, pnorm, mean = 1 , sd = sqrt (0.6))
ks.test (vyber, pnorm, mean = 0 , sd = 1)
```

Měli byste dostat podobné grafy:




Normal Q−Q Plot
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
−3
−2
−1
0
1
2
3

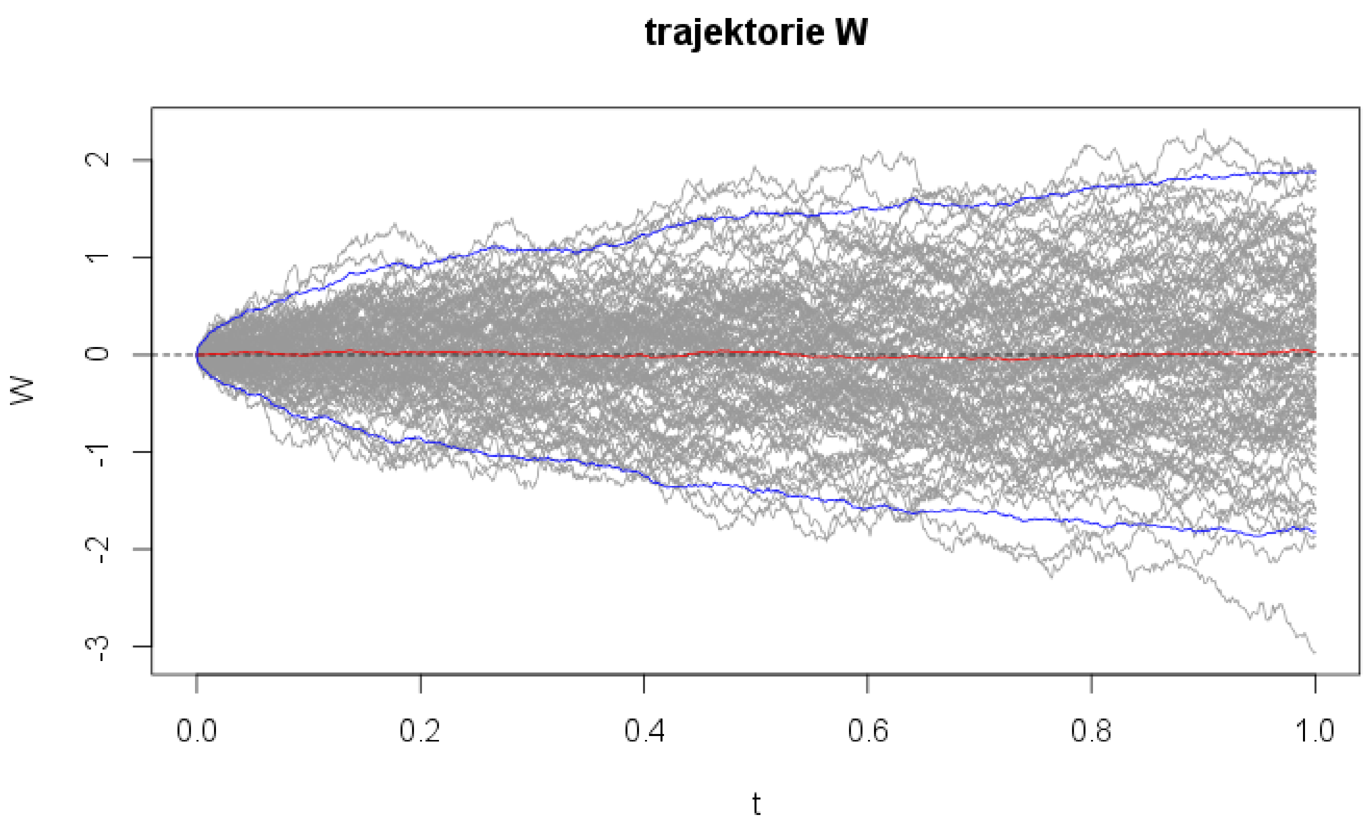

Proportion <= x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−2
−1
0
1
2
vyber

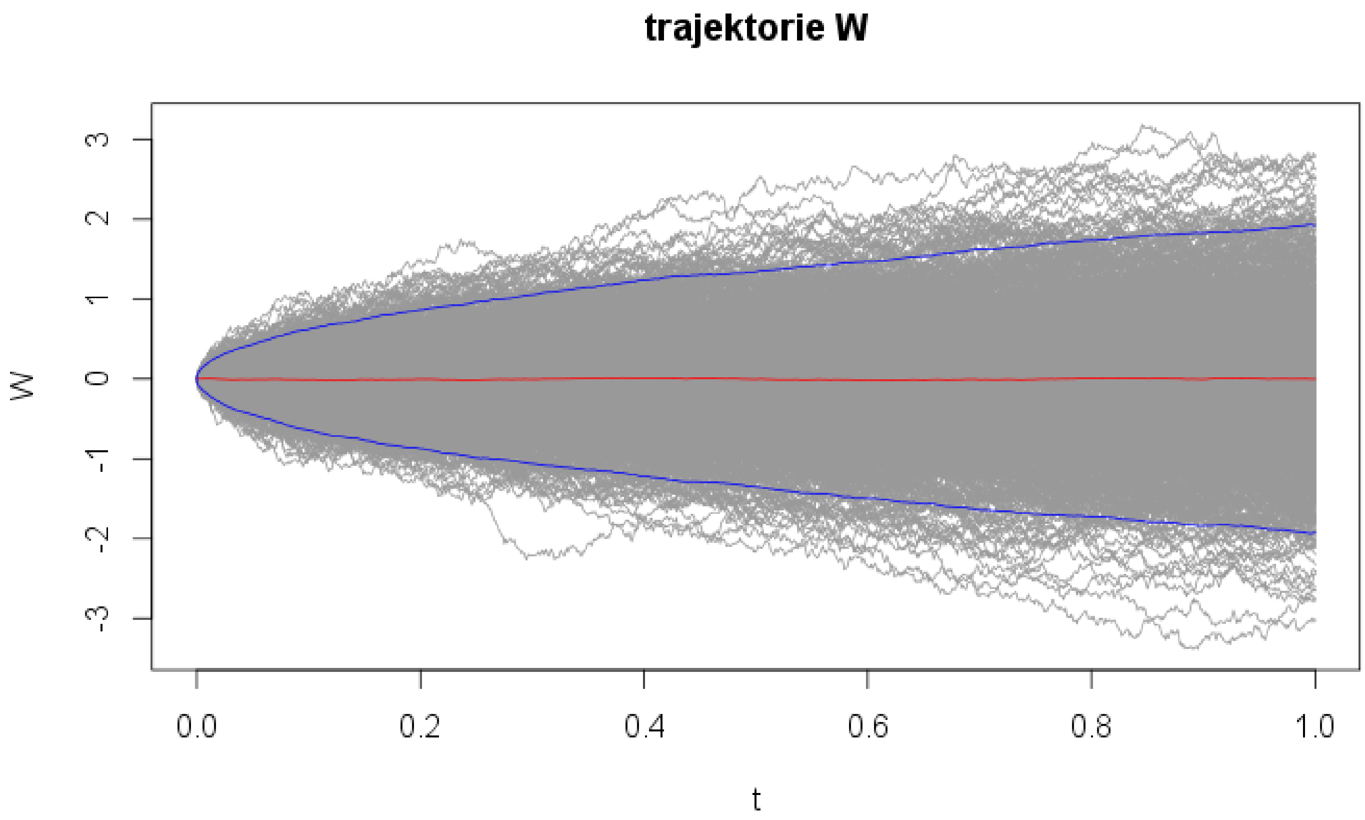
n:1000 m:0

## 1.1 Úkoly

Generujte postupně 10, 100, 1000, 10 000 trajektorií $W_t$ a vykreslujte je do grafů příkazem **matplot**.

K matici realizací Wienerova procesu spočítejte střední hodnotu a směrodatnou odchylku pro každý čas (tedy pro každý řádek matice). K tomu se bude hodit funkce **apply** pro aplikaci na každý řádek či sloupec matice, a funkce **mean** pro střední hodnotu a **sd** pro směrodatnou odchylku. Do obrázku trajektorií pak přidejte křivku pro střední hodnoty a 95% interval spolehlivosti realizací. Měli byste dostat obrázky podobné následujícím, které jsou pro 100 a 1000 trajektorií:






Pro jednotlivé varianty (10, 100, 1000, 10000 trajektorií) si pro realizace Wienerova procesu v časech $t = 0.2$ a $t = 0.8$ zobrazte histogram a QQ-plot. Vykreslete si také empirickou distribuční funkci a graficky ji porovnejte s teoretickou distribuční funkcí. Jaké rozdělení pravděpodobnosti a s jakými parametry má $W_t$ pro $t = 0.2$ a $t = 0.8$?

Definujme náhodné procesy

$$Y(\omega,t) = \min_{s\le t} W(\omega,s) \ ,$$

a

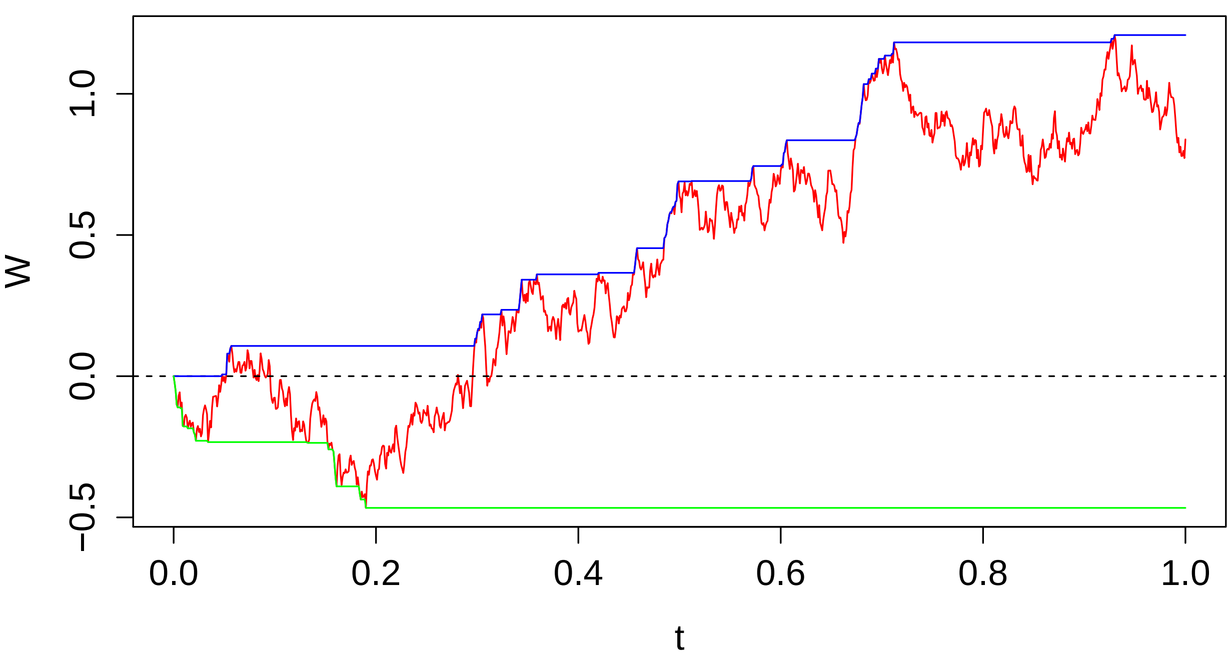
$$Z(\omega,t) = \max_{s\le t} W(\omega,s) \ ,$$

tzn. minimum a maximum Wienerova procesu na intervalu $[0,t]$. Vygenerujte si jednu trajektorii Wienerova procesu $W_t$ na intervalu $[0,1]$ a k ní spočítejte trajektorie $Y_t, Z_t$ na stejném intervalu. Pomohou funkce **min** a **max**, a výběr podvektoru pomocí hranatých závorek, např.

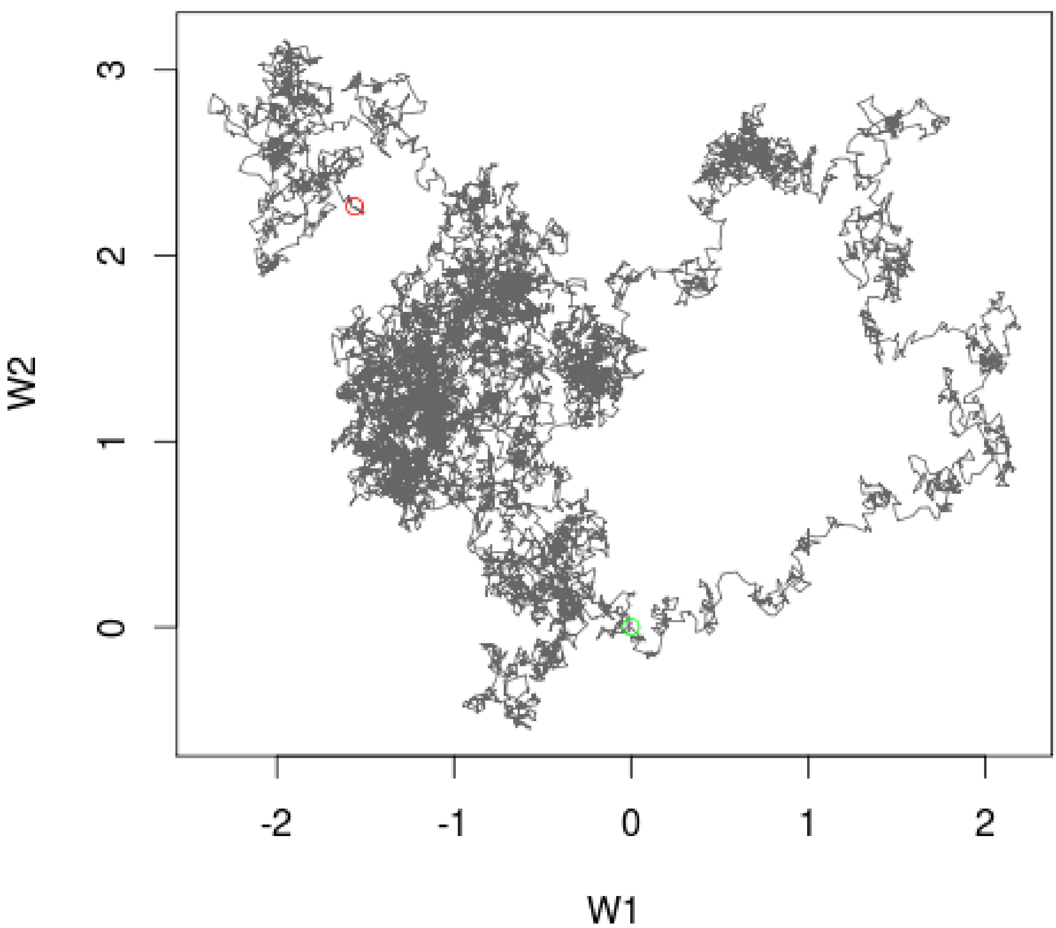
```
max (W[1:50])
```

spočítá maximum z prvních 50 hodnot trajektorie Wienerova procesu. Trajektorie všech tří procesů pak zobrazte v jednom grafu.

Vytvořte obrázek 2rozměrného Brownova pohybu. Každá ze dvou souřadnic je tvořena Wienerovým procesem, ty jsou vzájemně nekorelované. Generujte tedy 2 Wienerovy procesy pro časový interval $[0,10]$ s krokem $\Delta t = 0.001$ a pomocí příkazu **plot** každý použijte jako souřadnice na jiné ose:



W
1.0
0.5
0.0
−0.5
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
t

W2
3
2
1
0
-2
-1
0
1
2
W1