Oceňovanie exotických derivátov

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK, LS 2012/2013

Exotické opcie

- Path-dependent options - payoff závisí nielen od hodnoty aktíva v čase expirácie, ale aj od jej vývoja do expirácie
- Zníženie rizika z okamžitých výkyvov ceny aktíva
- Bonusová úloha, nárast ceny akcie posledný deň pred expiráciou opcií:

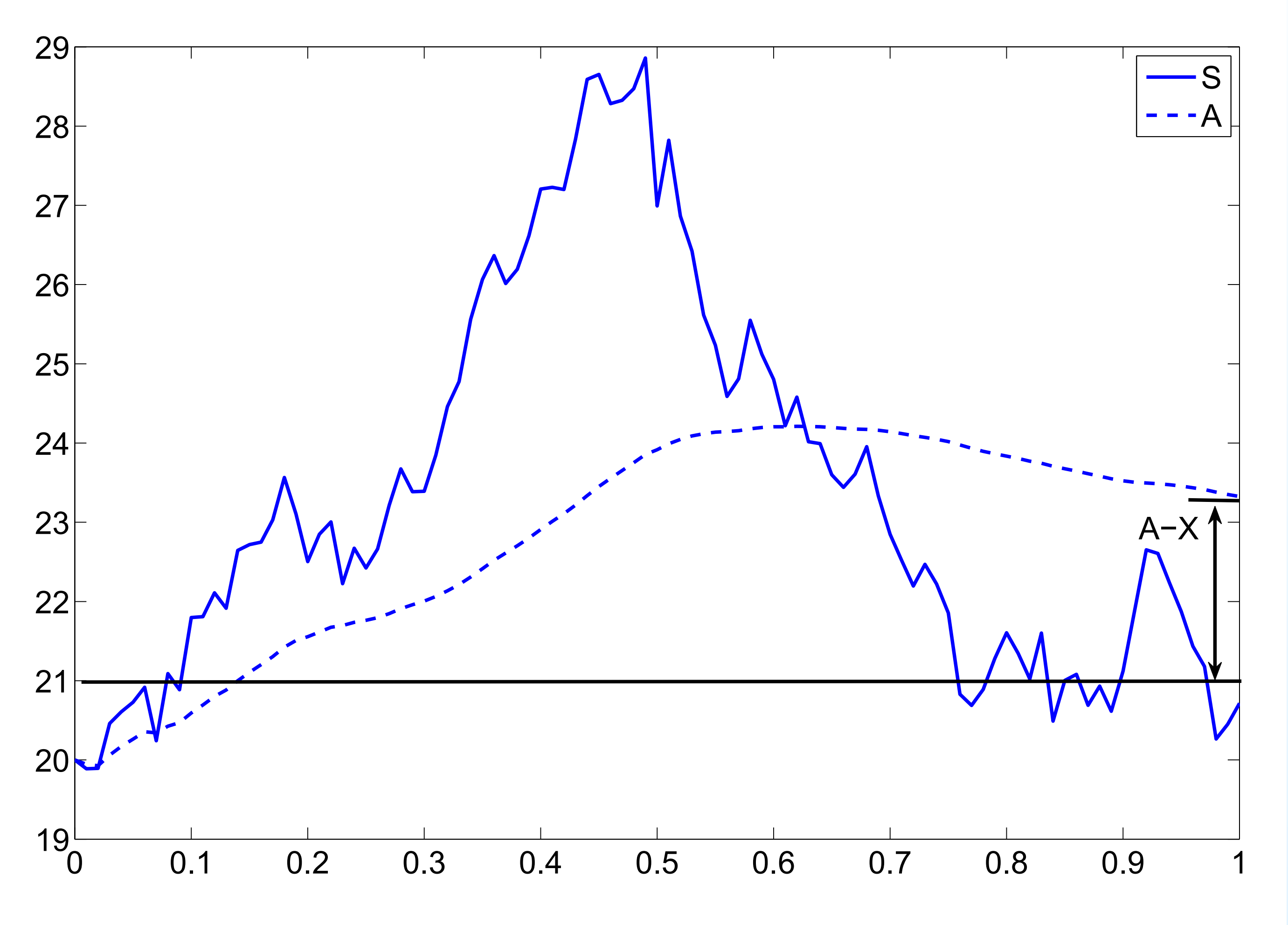
http://finance.google.com/

Ázijské opcie

- Payoff závisí od historického priemeru ceny aktíva
- Klasifikácia ázijských opcií:
  - podľa typu spriemerovania - aritmetický alebo geometrický priemer
  - podľa pozície spriemerovanej veličiny v payoffe - môže byť v úlohe ceny aktíva alebo expiračnej ceny
- Typ spriemerovania:
  - aritmetický priemer:
    v diskrétnom prípade $A_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_{t_i}$
    v spojitom prípade $A_t = \frac{1}{t} \int_0^t S_\tau d\tau$
  - geometrický priemer:
    v diskrétnom prípade $\ln A_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln S_{t_i}$
    v spojitom prípade $\ln A_t = \frac{1}{t} \int_0^t \ln S_\tau d\tau$

Ázijské opcie

Vývoj ceny aktíva a vývoj priemeru (prerušovaná čiara):



Ázijské opcie

- Pozícia spriemerovanej veličiny v payoffe:
  - spriemerovaná cena A je v payoffe v pozícii ceny aktíva - hovoríme o average rate call, resp. put opcii:

$$V(S,A,T) = \max(A - E, 0) \quad \text{pre call}$$
$$V(S,A,T) = \max(E - A, 0) \quad \text{pre put}$$

  - spriemerovaná cena A je v payoffe v pozícii expiračnej ceny - hovoríme o average strike call, resp. put opcii:

$$V(S,A,T) = \max(S - A, 0) \quad \text{pre call}$$
$$V(S,A,T) = \max(A - S, 0) \quad \text{pre put}$$

- Teda máme napríklad:
  - *ázijskú aritmeticky spriemerovanú average rate call opciu*,
  - *ázijskú geometricky spriemerovanú average strike put opciu*, ... spolu 8 typov

Diferenciál spriemerovanej ceny

- Pracujeme so spojitým časom
- Aritmetický priemer:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{1}{t^2}\int_0^t S_\tau d\tau + \frac{1}{t}S_t = \frac{S_t - A_t}{t}$$

- Geometrický priemer:

$$\frac{dA}{dt} = A_t\left[-\frac{1}{t^2}\int_0^t \ln S_\tau d\tau + \frac{1}{t}\ln S_t\right] = A_t\,\frac{\ln S_t - \ln A_t}{t}$$

- V oboch prípadoch:

$$dA = A\,f\left(\frac{S}{A}, t\right)dt,$$

pričom $f(x,t) = (x-1)/t$, resp. $f(x,t) = (\ln x)/t$

PDR pre cenu ázijskej opcie

- Geometrický Brownov pohyb pre cenu akcie $dS = \mu S dt + \sigma S dw$, akcia vypláca spojité dividendy s dividendovou mierou D
- Cena opcie $V = V(S, A, t)$:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial A} f\left(\frac{S}{A}, t \right) \right) dt$$

- Rovnaký postup ako v Black-Scholesovom modeli:
  - konštrukcia portfólia (opcia + akcie)
  - eliminácia náhodnej zložky v SDR pre hodnotu portfólia
  - výnos bezrizikového portfólia musí byť rovný r (bezrizikovej úrokovej miere)

PDR pre cenu ázijskej opcie

- Výsledná PDR pre cenu ázijskej opcie $V(S, A, t)$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D) S \frac{\partial V}{\partial S} + f\left(\frac{S}{A}, t\right) \frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0$$

  pre $S \in (0, \infty)$, $A \in (0, \infty)$, $t \in (0, T)$

- Koncová podmienka podľa typu opcie, napr.

$$V(S, A, T) = \max(S - A, 0)$$

  pre $S \in (0, \infty)$, $A \in (0, \infty)$

- Tri premenné, iba jedna druhá derivácia $\rightarrow$ v tomto tvare nie je PDR veľmi vhodná na numerické riešenie $\rightarrow$ pre average strike opciu spravíme transformáciu

Transformácia pre average strike opcie

- Transformácia:

$$V(S,A,t) = AW(x,t), \quad x = \frac{S}{A}$$

- PDR pre funkciu $W(x,t)$:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (r - D)x \frac{\partial W}{\partial x} + f(x,t)\left(W - x\frac{\partial W}{\partial x}\right) - rW = 0$$

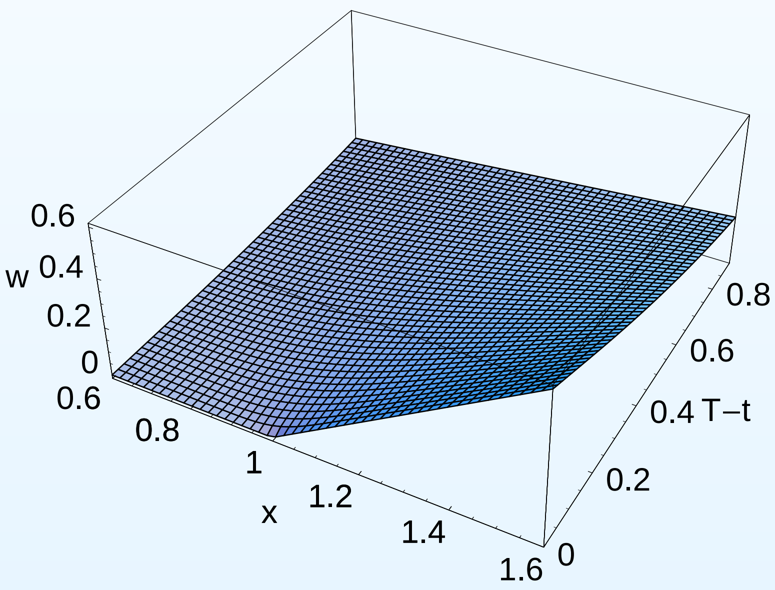
pre $x \in (0,\infty)$, $t \in (0,T)$

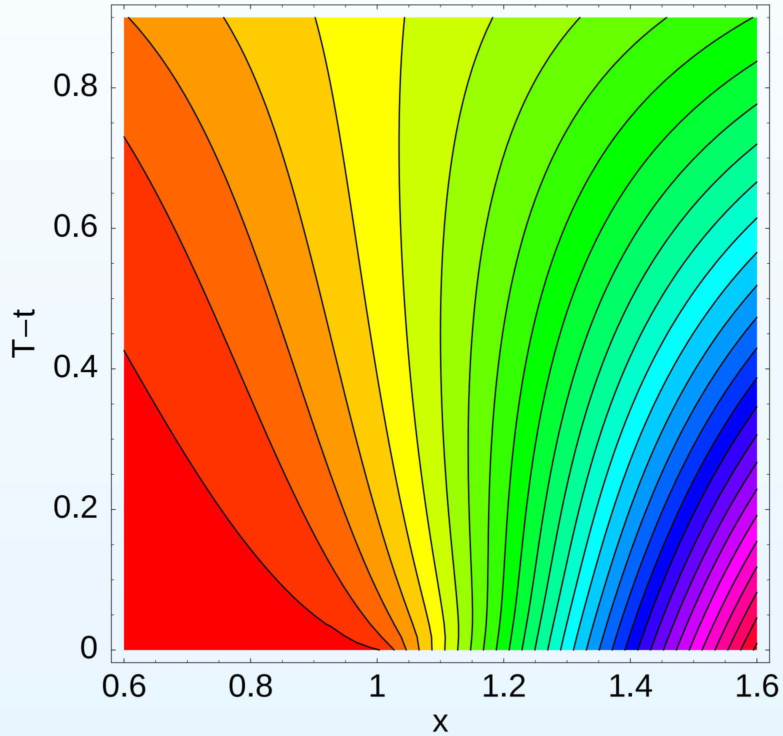
- Koncová podmienka pre $x \in (0,\infty)$:

$$W^{call}(x,T) = \max(x-1,0), \quad W^{put}(x,T) = \max(1-x,0)$$

Average strike opcie - ukážka

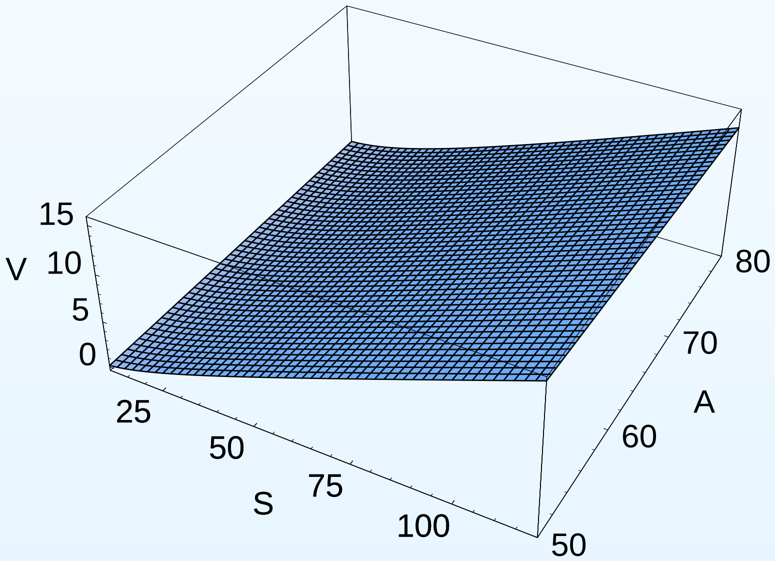
- Pomocná funkcia $W(x,t)$:

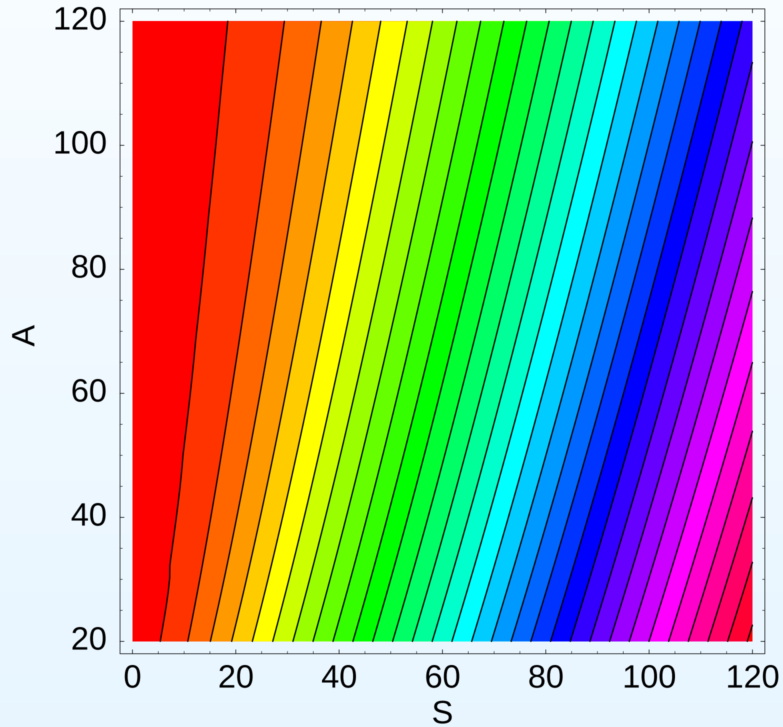




Average strike opcie - ukážka

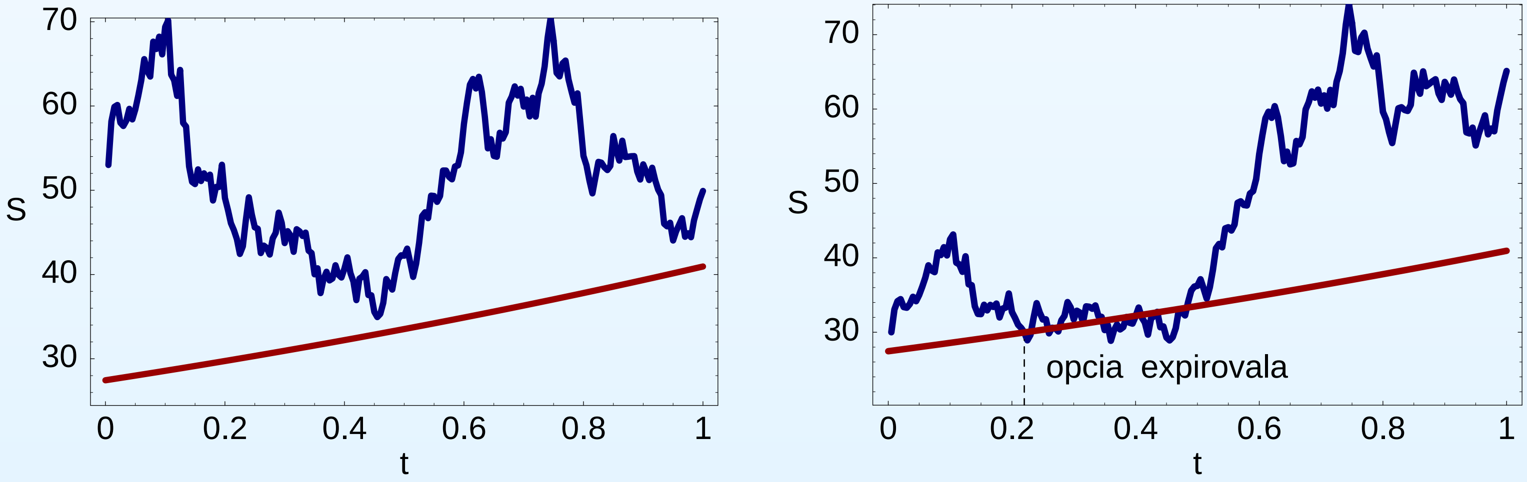
- Cena opcie $V(S, A, t)$ pre zvolené t:





Bariérové opcie

- V podstate klasické call a put opcie
- Ale s tým, že ak niekedy počas trvania opcie cena akcie dosiahne zadanú bariérovú funkciu, tak:
  - opcia stráca svoju platnosť
  - vypisovateľ opcie jej držiteľovi vyplatí rabat
- Príklad: cena akcie (modra), bariéra (hnedá)



Bariérové opcie - bariéra a rabat

- Klasifikácia bariér:
  - down-and-out: ak cena akcie dosiahne zadanú ariéru zhora
  - up-and-out: ak cena akcie dosiahne zadanú ariéru zdola
- Typický príklad bariéry:

$$B(t) = bEe^{-\alpha(T-t)},$$

kde $0 < b \leq 1, \alpha \geq 0$ sú konštanty

- Príklad rabatu:

$$R(t) = E\left(1 - e^{-\beta(T-t)}\right),$$

kde $\beta \geq 0$ je konštanta - spĺňa prirodzenú terminálovú podmienku na rabat $R(T) = 0$

PDR pre down-and-out opciu

- Opcia je platná v oblasti $S > B(t)$ - tu musí byť splnená Black-Scholesova rovnica, teda:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

  pre $S \in (B(t), \infty), t \in (0, T)$.

- Na okraji platnosti opcie - teda pre $S = B(t)$ - opcia expiruje a jej hodnota sa rovná rabatu:

$$V(B(t), t) = R(t)$$

  pre $t \in (0, T)$.

- Terminálová podmienka pre $S \in (B(t), \infty), t = T$ závisí od typu opcie:

$$V^{call}(S, T) = \max(0, S - E), \quad V^{put}(S, T) = \max(0, E - S)$$

PDR pre down-and-out opciu

- Transformácia na pevnú oblasť $x \in (-\infty, \infty)$:

$$V(S,t) = W(x,t), \quad x = \ln\left(\frac{S}{B(t)}\right),$$

- PDR pre funkciu W:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left(r - D - \frac{\sigma^2}{2} - \alpha\right)\frac{\partial W}{\partial x} - rW = 0$$

pre $x \in (-\infty, \infty), t \in (0, T)$.

- Okrajová podmienka: $W(0,t) = R(t)$ pre $t \in (0,T)$.
- Terminálová podmienka:

$$V^{call}(x,T) = E\max(0, be^x - 1)$$
$$V^{put}(x,T) = E\max(0, 1 - be^x)$$

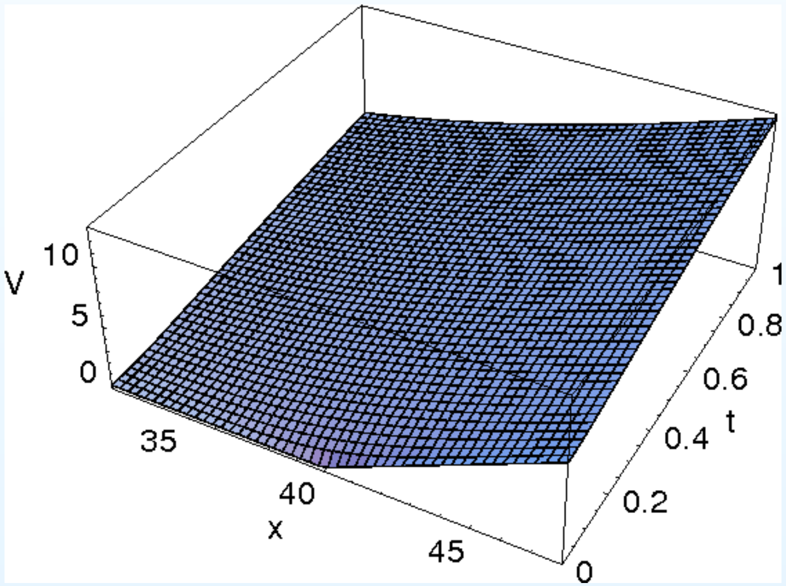
pre $x \in (-\infty, \infty)$.

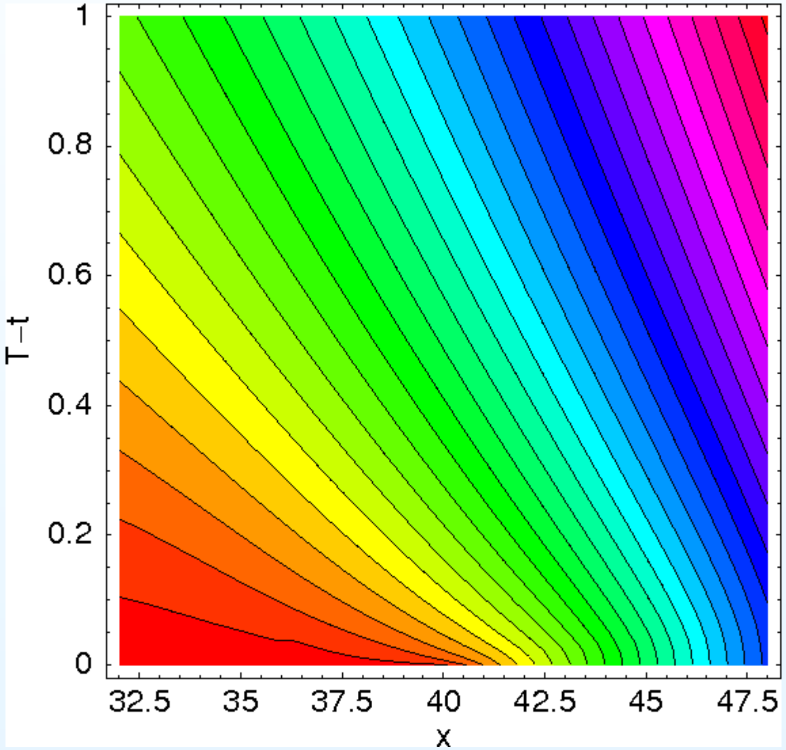
Up-and-out opcia: DÚ

- Matematicky zapíšte úlohu oceňovania up-and-out opcie: PDR (na akej oblasti), okrajová podmienka, terminálová podmienka
- Transformujte túto úlohu na PDR na pevnej oblasti

Bariérové opcie - ukážka

- Cena bariérovej opcie :





Košíkové opcie, opcie na indexy

- Payoff opcie závisí od hodnoty viacerých akcí alebo od hodnoty akciového indexu
- Príklad 1: spread options - payoff závisí do rozdielu hodnoty dvoch aktív v čase expirácie, napr.

$$V(S_1, S_2, T) = \max((S_1 - S_2) - E, 0)$$

 - užitočné napríklad pri komoditách, ak uvažujeme hodnotu vstupu a výstupu
- Príklad 2: opcie na indexy - napr. na S&P 500, NYSE, ... Ak sa každá akcia riadi GBP, dostaneme n rozmernú Black-Scholesovu rovnicu ($n =$ počet akcií v indexe)

Košíkové opcie, opcie na indexy

- Obchodnovanie s opciami na index S&P 500:

http://www.cboe.com/

Lookback opcie

- Lookback opcie - payoff zvísí od maxima ceny aktíva za sledované obdobie

$$M = M_{T_0}^T = \max(S_t, t \in [T_0, T]),$$

kde $T \geq 0$

- Lookback opcie s pohyblivou expiračnou cenou - maximum M vystupuje v úlohe expiračnej ceny:

$$V^{call}(S, M, T) = \max(0, S - M)$$
$$V^{put}(S, M, T) = \max(0, M - S)$$

- Lookback opcie s pevnou expiračnou cenou - maximum M vystupuje v úlohe ceny aktíva:

$$V^{call}(S, M, T) = \max(0, M - E)$$
$$V^{put}(S, M, T) = \max(0, E - S)$$