Stochastická analýza

Doc. RNDr. Martin Kolář, Ph.D.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento učební text vznikl za přispění Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu ČR prostřednictvím Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost v rámci projektu Univerzitní výuka matematiky v měnícím se světě (CZ.1.07/2.2.00/15.0203).

Obsah

Kapitola 1

Spojité náhodné veličiny a stochastické procesy

1.1 Stochastické procesy

Definice 1.1.1. *Stochastický proces* $X = \{X(t), t \in T\}$ je soubor náhodných veličin na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Tedy pro každé t z indexové množiny T je $X(t)$ náhodná veličina. Obvykle t označuje čas. Připomeňme, že náhodná veličina je funkce $Z : \Omega \to \mathbb{R}$.

Každá realizace náhodného procesu X se nazývá ***trajektorie***. $X(t)$ popisuje stav procesu v čase t.

Dělení stochastických procesů:

- je-li T konečná nebo spočetná množina, říkáme, že $X(t)$ je stochastický proces v diskrétním čase
- je-li T interval, říkáme, že $X(t)$ je stochastický proces ve spojitém čase

Další rozdělení podle hodnot, které nabývají veličiny $X(t)$:

- stochastický proces s diskrétními hodnotami
- stochastický proces se spojitými hodnotami

Celkem tedy máme následující čtyři typy stochastických procesů:

čas	hodnoty	příklady
diskrétní	diskrétní	standardní náhodná procházka
diskrétní	spojité	zobecněná náhodná procházka
spojitý	diskrétní	Poissonův proces
spojitý	spojité	Wienerův proces, bílý šum

Uveďme si příklad Poissonova procesu.

Nechť $X(t)$ je počet volání na telefonní ústřednu v časovém intervalu $[0, t]$. Předpokládáme, že

$$P(X(t+h) - X(t) = 1) \approx \lambda h$$

t.j. pravděpodobnost, že v intervalu $(t, t+h)$ přišlo jedno volání je přímo úměrná h, a dále

$$P(X(t+h) - X(t) > 1) \approx 0.$$

Koeficient úměrnosti λ popisuje intenzitu procesu.

Stochastická analýza se zabývá integrálním počtem pro funkce, jejichž hodnoty jsou závislé na Wienerově procesu.

Například, nechť $f(X, t)$ je cena opce v čase t při ceně podkladové akcie X, pro kterou platí

$$\frac{dX}{X} = a\, dt + b\, dW$$

kde W je standardní Wienerův proces (přesným smyslem této rovnice se budeme zabývat v dalších kapitolách). Hodnota f tedy zprostředkovaně závisí na hodnotě Wienerova procesu.

1.2 Spojité náhodné veličiny

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor modelující uvažovaný systém.

Definice 1.2.1. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je spojitá náhodná veličina, jestliže její distribuční funkce $F(x) = P(X \leq x)$ se dá napsat jako

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du$$

pro nějakou integrovatelnou funkci $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$. $f(u)$ se nazývá (pravděpodobnostní) *hustota* náhodné veličiny X.

Máme

$$P(X \in [x, x + \Delta x]) \doteq f(x)\, \Delta x$$

a

$$P(X \in [a, b]) = \int_{a}^{b} f(u)\, du.$$

Pro každé jednotlivé $x \in \mathbb{R}$ tedy platí

$$P(X = x) = 0.$$

Poznámka. Mnoho důkazů pro spojité náhodné veličiny je zcela analogických jako v diskrétním případě. Pravděpodobnostní funkce $f(x)$ se nahradí hustotou $f(x)\, dx$, a suma $\sum$ se nahradí integrálem $\int$.

1.2.1 Nezávislost a její charakterizace

Definice 1.2.2. Náhodné veličiny X a Y jsou ***nezávislé***, jestliže pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ jsou jevy $\{X \leq x\}$ a $\{Y \leq y\}$ nezávislé.

Základní charakteristikou náhodné veličiny je její očekávání.

Definice 1.2.3. ***Očekávání*** spojité náhodné veličiny X s hustotou f je dáno vztahem

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, x dx$$

pokud integrál existuje.

Příklad 1.2.4. Nechť pro hustotu náhodné veličiny X platí $f(x) = \frac{1}{2\pi}$ pro $x \in [0, 2\pi]$ a $f(x) = 0$ jinak. Její očekávání je rovno

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, x dx = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2\pi} x dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi.$$

Při praktickém výpočtu očekávání funkce náhodné veličiny je důležitá následující věta.

Věta 1.2.5. *Nechť X je spojitá náhodná veličina s hustotou $f(x)$ a $g(x)$ je spojitá funkce. Pak pro náhodnou veličinu $g(X)$ platí*

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx.$$

Definice 1.2.6. *Sdružená distribuční funkce* náhodných veličin X a Y je funkce $\mathbb{R}^2 \to [0,\, 1]$ taková, že

$$F(x,\, y) = P(X \leq x \wedge Y \leq y).$$

Definice 1.2.7. Náhodné veličiny X a Y mají *sdruženou pravděpodobnostní hustotu* $f(x,\, y) : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$, jestliže

$$F(x,\, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(u,\, v)\, du dv$$

pro všechna $x,\, y \in \mathbb{R}$.

Analogicky jako u obyčejné hustoty máme

$$P\{(X,\, Y) \in (x,\, x + \Delta x) \times (y,\, y + \Delta y)\} \approx f(x, y)\, \Delta x \Delta y.$$

Definice 1.2.8. *Marginální distribuční funkce* X a Y jsou

$$F_X(x) = P(X \leq x) = F(x,\, \infty),$$

kde $F(x,\, \infty) = \lim_{y \to \infty} F(x,\, y)$ a

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = F(\infty,\, y),$$

kde $F(\infty,\, y) = \lim_{x \to \infty} F(x,\, y)$.

Pro *marginální hustoty* platí:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\, y)\, dy,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\, y)\, dx.$$

Následující věta dává ověřitelnou podmínku pro nezávislost náhodných veličin.

Věta 1.2.9. *Náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé právě tehdy, když pro každé $x,\, y \in \mathbb{R}$ platí*

$$f(x,\, y) = f_X(x)\, f_Y(y)\, .$$

1.2.2 Příklady spojitých rozdělení

Uniformní (stejnoměrné) rozdělení: Náhodná veličina X je stejnoměrná na intervalu $[a,\, b]$, jestliže

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

pro $x \in [a,\, b]$ a $f(x) = 0$ jinak.

Normální rozdělení: Náhodná veličina X má normální rozdělení, jestliže

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

pro $x \in (-\infty,\, \infty)$, kde μ je střední hodnota a σ^2 je rozptyl.

Normalizované normální rozdělení $N(0,\, 1)$ má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Hodnota normalizační konstanty plyne z hodnoty tzv. Laplaceova integrálu:

Lemma 1.2.10. *Platí*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1.$$

Důkaz: Označme
$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$
Uvažujme druhou mocninu integrálu
$$I^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy.$$
Transformujeme integrál do polárních souřadnic,
$$I^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}rdrd\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}1d\theta=\frac{1}{2\pi}2\pi=1,$$
protože substitucí $t=-\frac{r^2}{2}$ dostaneme
$$\int_0^{\infty}re^{-\frac{r^2}{2}}dr=\int_0^{-\infty}-e^tdt=\int_{-\infty}^0e^tdt=\left[e^t\right]_{-\infty}^0=1.$$
Odtud plyne $I=1$.

2-rozměrné (standardizované) normální rozdělení: Dvojice náhodných veličin X,Y má toto rozdělení pokud pro jeho sdruženou hustotu platí
$$f\left(x,\,y\right)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(x^2-2\rho xy+y^2\right)\right),$$
kde ρ je korelace X a Y, splňující $-1\leq\rho\leq1$. Přímým výpočtem dostaneme
$$f_X\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\tag{1.1}$$
a
$$f_Y\left(y\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}.$$
Pro $\rho=0$ tedy platí
$$f\left(x,\,y\right)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}=f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right).$$
Odtud plyne důležitá charakteristika nezávislosti normálně rozdělených náhodných veličin.

Věta 1.2.11. *Normálně rozdělené náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé právě tehdy když jsou nekorelované, t.j. $\rho = 0$.*

Toto tvrzení je klíčové pro praktické ověřování nezávislosti náhodných veličin s normálním rozdělením. Obecně je nezávislost daleko silnější vlastnost než nekorelovanost.

1.3 Příklady

Příklad 1.3.1. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl

a) stejnoměrného rozdělení na intervalu $[a, b]$.

b) exponenciálního rozdělení

c) Paretova rozdělení

d) gamma rozdělení

e) beta rozdělení

Příklad 1.3.2. Dokažte Větu 1.2.9.

Příklad 1.3.3. Najděte příklad dvou spojitých náhodných veličin, které jsou nekorelované, ale nejsou nezávislé

Příklad 1.3.4. Vypočtěte třetí a čtvrtý obecný moment stejnoměrného rozdělení na intervalu $[a, b]$.

Příklad 1.3.5. Dokažte vztah (1.1).

Kapitola 2

Charakteristická funkce a její vlastnosti

V této kapitole se budeme věnovat charakteristickým funkcím, jednomu ze základních nástrojů pro počítání se spojitými náhodnými veličinami. Tento pojem je z hlediska výpočtů identický s Fourierovou transformací pravděpodobnostní hustoty, základní operací používanou v matematické analýze.

Budeme se také okrajově věnovat moment generující funkci, která má použití jak pro diskrétní tak spojitá rozdělení.

2.1 Charakteristická funkce

Připomenutí: *Generující funkce* pro diskrétní náhodnou veličinu s hodnotami v $\mathbb{N}$, $X : \Omega \to \mathbb{N}$ je definována jako

$$G_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, s^n = E\left(s^X\right),$$

kde $f(n) = P(X = n)$ je pravděpodobnostní funkce X.

Obecněji můžeme definovat (substitucí $s = e^t$) moment generující funkci, i pro spojité náhodné veličiny.

Definice 2.1.1. *Moment generující funkce* náhodné veličiny X je definována vztahem

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right)$$

pro $t \geq 0$.

Je-li X spojitá náhodná veličina s hustotou f, pak

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx.$$

Až na obor integrace a znaménko v exponentu je to přesně *Laplaceova transformace* funkce f (u Laplaceovy transformace se integruje jen přes kladnou poloosu).

Moment generující funkce dovoluje snadno počítat jednotlivé momenty náhodných veličin. Pro střední hodnotu máme

$$E(X) = M'(0).$$

Obecně platí následující tvrzení.

Lemma 2.1.2. *Pro každé $k \in \mathbb{N}$ je*

$$E\left(X^k\right) = M^{(k)}(0).$$

Důkaz: Derivujeme integrál podle parametru,

$$M'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{tx} f(x)\, dx,$$

tedy

$$M'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = E(X).$$

Analogicky k-násobným derivováním dostaneme

$$M^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{tx} f(x)\, dx.$$

Tedy

$$M^{(k)}(0) = E\left(X^k\right).$$

Charakteristická funkce se formálně liší od moment generující funkce jen imaginární jednotkou v exponentu. Výhodou je že na rozdíl od moment generující funkce existuje pro libovolnou pravděpodobnostní hustotu.

Definice 2.1.3. *Charakteristická funkce* náhodné veličiny X je funkce $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definovaná vztahem

$$\phi(t) = E\left(e^{itX}\right).$$

Je-li f hustota X, pak máme

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{itx} dx.$$

Až na znaménko je to Fourierova transformace hustoty. Využití charakteristické funkce se tedy redukuje na počítání s Fourierovou transformací.

2.2 Základní vlastnosti Fourierovy transformace

V této podkapitole budeme uvažovat funkce které jsou současně spojité a integrovatelné v absolutní hodnotě. Prostor takových funkcí budeme označovat $L^1 \cap C$.

Definice 2.2.1. ***Fourierova transformace*** funkce f je funkce

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\xi x} dx.$$

Tedy je-li f hustota náhodné veličiny X, pak vztah mezi charakteristickou funkcí X a Fourierovou transformací funkce f je

$$\phi(-t) = \widehat{f}(t).$$

Z linearity integrálu plyne, že Fourierova transformace je lineární operace. Pro každé dvě funkce f, g a konstanty a, b platí

$$(\widehat{af + bg}) = a\hat{f} + b\hat{g}.$$

Lemma 2.2.2. *(O změně měřítka) Pro $f \in L^1 \cap\ C$ a $R > 0$ označme $f_R(x) = f(Rx)$ (tedy f_R je původní funkce vyjádřená v jiné volbě jednotek). Pak*

$$\widehat{f_R}(\xi) = \frac{1}{R}\hat{f}(\frac{\xi}{R}).$$

Důkaz: Z definice

$$\widehat{f_R}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_R(x)e^{-i\xi x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(Rx)e^{-i\xi x}dx.$$

Substitucí $y = Rx$ dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\frac{\xi}{R}y}\frac{1}{R}dy = \frac{1}{R}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\frac{\xi}{R}y}dy = \frac{1}{R}\hat{f}(\frac{\xi}{R}).$$

□

Lemma 2.2.3. *(O Fourierově transformaci derivace). Nechť $f \in L^1 \cap C$, $f' \in L^1 \cap\ C$ a $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Pak*

$$\widehat{(f')}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi).$$

Derivování se tedy Fourierovou transformací převádí na obyčejné násobení faktorem $i\xi$.

Důkaz: Integrováním per partes dostaneme

$$\widehat{(f')}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\xi x}dx = [e^{-i\xi x}f(x)]_{-\infty}^{\infty} - (-i\xi)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx = i\xi\hat{f}(\xi).$$

□

Obecně, je-li $f, f', \dots, f^{(k)} \in L^1 \cap\ C$ a $\lim_{x\to\pm\infty} f^j(x) = 0$ pro $j = 0, 1, \dots, k-1$, pak k-násobným integrováním per partes dostaneme

$$\widehat{(f^{(k)})}(\xi) = (i\xi)^k\hat{f}(\xi).$$

Lemma 2.2.4. *(O derivaci Fourierovy transformace) Nechť $f \in L^1 \cap C$ a $g(x) = xf(x) \in L^1 \cap C$. Pak $\hat{f}(\xi)$ je diferencovatelná a platí*

$$\frac{d\hat{f}}{d\xi} = -i\hat{g}(\xi).$$

Důkaz: Derivováním vztahu

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx$$

podle parametru ξ dostaneme

$$\frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)e^{-i\xi x}dx = -i\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)x]\, e^{-i\xi x}dx = -i\hat{g}(\xi).$$

Pro $f, g \in L^1$ je jejich **konvoluce** definována vztahem

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Substitucí $y' = x - y$ dostaneme alternativní vyjádření

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = g * f(x).$$

Konvoluce je tedy komutativní operace.

Lemma 2.2.5. *(O Fourierově transformaci konvoluce) Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Pak*

$$\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Důkaz: S použitím Fubiniho věty dostaneme

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy\right)e^{-i\xi x}dx =$$

$$= \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\xi x}f(x-y)g(y)dydx = \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\xi(x-y)}f(x-y)e^{-i\xi y}g(y)dydx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(x-y)} f(x-y) dx \right) e^{-i\xi y} g(y) dy = \hat{f}(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} g(y) dy = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Lemma 2.2.6. *(O transformaci posunutí a o posunutí transformace) Nechť $f \in L^1 \cap C$. Pro $a > 0$ označme $f_a(x) = f(x-a)$. Pak*

$$\hat{f}_a(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{-ia\xi}.$$

Naopak,

$$\widehat{fe^{iax}}(\xi) = \hat{f}(\xi - a).$$

Důkaz: Na jedné straně substitucí $y = x - a$ dostaneme

$$\hat{f}_a(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a) e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi(y+a)} dy = e^{-ia\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y} dy =$$

$$= e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi).$$

Naopak,

$$\widehat{fe^{iax}}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(\xi - a)x} dx = \hat{f}(\xi - a).$$

□

Důsledek 2.2.7. Nechť Fourierova transformace funkce $f(x)$ je $F(\xi)$. Pak Fourierova transformace funkce $f(x) \sin \omega x$ je rovna

$$\frac{i}{2}[F(\xi + \omega) - F(\xi - \omega)].$$

Tento vztah s obvykle nazývá modulační identita (f je původní signál, ω je nosná frakvence, součin $f(x)e^{i\omega x}$ je namodulovaný signál

Důkaz: Víme, že

$$\sin \omega x = \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}$$

a

$$\widehat{f(x)e^{i\omega x}}(\xi) = \hat{F}(\xi - \omega).$$

Tedy

$$f(\widehat{x)\sin\omega} x(\xi) = \frac{1}{2i}[F(\xi-\omega) - F(\xi+\omega)] = \frac{i}{2}[F(\xi+\omega) - F(\xi-\omega)].$$

$\square$

Lemma 2.2.8. *(Fourierova transformace Gaussovy funkce) Je-li*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}},$$

pak

$$\hat{f}(\xi) = e^{\frac{-\xi^2}{2}}.$$

Důkaz: Označme opět $F(\xi) = \hat{f}(\xi)$. Máme

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{\frac{-x^2}{2}} = -xf(x).$$

Na jedné straně je

$$(\widehat{-xf(x)}) = \widehat{f'}(\xi) = i\xi F(\xi),$$

podle lemmatu o transformaci derivace, na druhé straně, z lemmatu o derivaci transformace, je

$$(\widehat{-ixf})(\xi) = F'(\xi).$$

Celkem F splňuje rovnici

$$F'(\xi) = -\xi F(\xi).$$

Separací proměnných dostaneme řešení

$$F(\xi) = Ce^{\frac{-\xi^2}{2}}.$$

Konstanta C je rovna hodnotě $\hat{f}$ v bodě nula, tedy Laplaceovu integrálu

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 1.$$

$\square$

Příklad 2.2.9. Označme jako $H(x)$ *Heavisideovu funkci,* tedy $H(x) = 1$ pro $x \geq 0$ a $H(x) = 0$ pro $x < 0$. Je-li

$$f(x) = e^{-ax} H(x)$$

pro nějaké $a > 0$, pak

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{a + i\xi}.$$

Opravdu,

$$\hat{f}(\xi) = \int_0^\infty e^{-ax} e^{-i\xi x} dx = \int_0^\infty e^{-(a+i\xi)x} dx =$$

$$= -\frac{1}{a+i\xi} [e^{-(a+i\xi)x}]_0^\infty = \frac{1}{a+i\xi}.$$

Dále uvažujme funkci

$$f(x) = e^{-a|x|}.$$

Pomocí Heavisideovy funkce ji můžeme napsat jako

$$f(x) = H(x)e^{-ax} + H(-x)e^{ax}.$$

Její Fourierova transformace je rovna

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{a+i\xi} + \frac{1}{a-i\xi} = \frac{2a}{a^2 + x^2}.$$

Věta 2.2.10. *(Základní identita pro Fourierovu transformaci) Nechť $f, g \in L^1 \cap C$. Pak platí*

$$\int_{-\infty}^\infty f\hat{g} = \int_{-\infty}^\infty \hat{f} g.$$

Důkaz: Z Fubiniho věty dostaneme

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^\infty f(x) \int_{-\infty}^\infty g(y) e^{-ixy} dy dx =$$

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y)e^{-ixy} dy dx = \int_{-\infty}^\infty g(y) \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-ixy} dx dy = \int_{-\infty}^\infty g(y)\hat{f}(y) dy.$$

$\square$

Důležitá pro aplikace je následující věta o inverzní transformaci. Plyne z ní, že charakteriskická funkce jednoznačně určuje rozdělení náhodné veličiny.

Věta 2.2.11. *(O inverzní transformaci) Nechť $f \in L^1 \cap C$, f je stejnoměrně spojitá a $\hat{f} \in L^1 \cap C$. Pak $f(x)$ lze vypočítat z $\hat{f}(\xi)$ vztahem*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

□

2.3 Věta o inverzní transformaci

K důkazu Věty o inverzní transformaci budeme potřebovat aproximaci identity.

2.3.1 Aproximace identity

Definice 2.3.1. Nechť $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, $\phi(x) \geq 0$ a $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1$. Pak systém funkcí

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$$

pro $\epsilon > 1$ se nazývá aproximací identity příslušnou funkci ϕ.

Z definice ihned plyne, že pro všechna ε platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\varepsilon(x)dx = 1.$$

V našem případě vezmeme za ϕ Gaussovu funkci

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

tedy

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}.$$

Následující lemma odůvodňuje termín aproximace identity.

Lemma 2.3.2. *Nechť ϕ_ε je aproximace identity a f je spojitá omezená funkce na $\mathbb{R}$. Pak $f * \phi_\varepsilon(x)$ konverguje (stejnoměrně na kompaktních intervalech) k $f(x)$ pro $\varepsilon \to 0$.*

Důkaz: Nechť $|f(x)| \leq M$ pro $x \in \mathbb{R}$. Máme

$$|f*\phi_\varepsilon(x)-f(x)| = |\int_{-\infty}^{\infty}[f(x-y)-f(x)]\phi_\varepsilon(y)dy| = |\int_{-\infty}^{\infty}[f(x-\varepsilon y')-f(x)]\phi(y')dy',$$

kde jsme použili substituci $y = \varepsilon y'$. Nechť $\delta > 0$ je dáno. Vezměme R tak velké, že $\int_{y\notin\langle -R,R\rangle}\phi(y)dy < \delta$, a dále $\varepsilon > 0$ tak, aby

$$|f(x-\varepsilon y)-f(x)| < \delta$$

pro $y \in \langle -R, R\rangle$. Máme tedy

$$|\int_{-\infty}^{\infty}[f(x-\varepsilon y')-f(x)]\phi(y')dy' \leq |\int_{\langle -R,R\rangle}[f(x-\varepsilon y')-f(x)]|\phi(y')dy'+$$

$$+|\int_{y\notin\langle -R,R\rangle}[f(x-\varepsilon y')-f(x)]\phi(x)dy| \leq \delta + (2M+1)\delta = 2M\delta.$$

Tedy $f * \phi_\varepsilon(x) \to f(x)$ pro $\varepsilon \to 0$. Z nezávislosti odhadu na x plyne stejnoměrná konvergence na kompaktních intervalech.

2.3.2 Důkaz věty o inverzní transformaci

V této kapitole uvedeme důkaz věty o inverzní transformaci, založený na aproximaci identity zavedené v předchozí části.

Věta 2.3.3. *Nechť $f \in L^1 \cap C$, f je stejnoměrne spojitá a $\hat{f} \in L^1 \cap C$. Pak*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi.$$

Důkaz: Nechť $x \in \mathbb{R}$ je libovolný pevně zvolený bod a $\varepsilon > 0$ je dáno. Označme

$$\phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\xi x-\varepsilon^2\frac{\xi^2}{2}}.$$

Víme, že

$$\hat{\phi}(y) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}},$$

tedy

$$\hat{\phi}(y) = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{2\pi} g(\frac{x-y}{\varepsilon}),$$

kde

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Budeme uvažovat aproximaci identity příslušnou této funkci a použijeme základní identitu pro Fourierovu transformaci na funkce f a ϕ. Na jedné straně je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Na druhé straně

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\hat{\phi} = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g_\varepsilon(x-y) dy = \sqrt{2\pi} f * g_\varepsilon(x).$$

Víme, že $f * g_\varepsilon(x) \to f(x)$ stejnoměrně na kompaktech. Ale pro x pevné je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)$$

pro $\varepsilon \to 0$, neboť první člen pod integrálem konverguje k jedné. Celkem tedy pro $\varepsilon \to 0$ dostaneme

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Definice 2.3.4. Inverzní Fourierova transformace je definována vztahem

$$\check{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} d\xi.$$

Podle předchozí věty je inverzní Fourierova transformace opravdu inverzní operací k Fourierově transformaci, platí tedy

$$(\check{\hat{f}}) = f.$$

Pro aplikace v teorii pravděpodobnosti je klíčový následující důsledek.

Důsledek 2.3.5. Charakteristická funkce jednoznačně určuje hustotu náhodné veličiny.

2.4 Příklady

Příklad 2.4.1. Vypočtěte generující funkci geometrického rozdělení

Příklad 2.4.2. Vypočtěte Laplaceovu transformaci funkce $\sin x$, t.j.

$$\int_0^\infty e^{-sx} \sin x dx$$

Příklad 2.4.3. Najděte charakteristickou funkci stejnoměrného rozdělení na intervalu $[-1, 1]$.

Příklad 2.4.4. Dokažte, že obecný moment náhodné veličiny můžeme vyjádřit pomocí charakteristické funkce, vztahem

$$E(X^k) = (-i)^k \phi_X^{(k)}(0).$$

Příklad 2.4.5. Vypočtěte charakteristickou funkci exponenciálního rozdělení s hustotou

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Kapitola 3

Základy L^2-teorie

3.1 Prostor $L^2(\langle a, b\rangle)$

V této části budeme uvažovat funkce na obecném intervalu $\langle a, b\rangle$ s hodnotami v $\mathbb{C}$ a prostor

$$L^2(\langle a, b\rangle)$$

obsahující funkce, pro které

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty.$$

$L^2(\langle a, b\rangle)$ je Hilbertův prostor (nekonečněrozměrná analogie Euklidovského prostoru) se skalárním součinem

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx.$$

Skalární součin indukuje, stejně jako v Euklidovském prostoru, na $L^2(\langle a, b\rangle)$ normu

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

a také metriku. Vzdálenost dvou funkcí je číslo

$$\rho(f, g) = \|f - g\| = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definice 3.1.1. Systém funkcí $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ se nazývá ortogonální systém, jestliže

$$(\phi_n, \phi_m) = 0$$

pro každé $n \neq m$. Nazývá se ortonormální systém, jestliže navíc platí

$$(\phi_n, \phi_n) = 1$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Definice 3.1.2. Nechť $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ je ortonormální systém. Čísla

$$c_k = \int_a^b f(x)\bar{\phi}_k(x)dx$$

se nazývají *Fourierovy koeficienty funkce f vzhledem k systému* $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$. *Formální funkční řada*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k$$

se nazývá Fourierova řada.

Pomocí Fourierových koeficientů definujeme funkce

$$f_N = \sum_{k=0}^{N} c_k \phi_k.$$

Zajímá nás, za jakých podmínek konverguje f_N pro $N \to \infty$ k funkci f. Konvergencí v tomto případě rozumíme konvergenci v normě prostoru L^2. Následující lemma ukazuje, že f_N je nejlepší aproximací f mezi všemi lineárními kombinacemi funkcí $\phi_1, \phi_2, \dots \phi_N$.

Lemma 3.1.3. *Nechť* $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ *je ortonormální systém a* $f \in L^2$. *Pak pro libovolná komplexní čísla* $d_1, \dots, d_N$ *platí*

$$\|f - \sum_{j=0}^{N} d_j \phi_j\| \geq \|f - f_N\|.$$

Rovnost přitom nastane pouze tehdy, je-li $d_j = c_j$ *pro všechna* $j = 0, \dots, N$.

Důkaz: Máme

$$\|f - \sum_{j=0}^{N} d_j \phi_j\|^2 = (f - \sum_{j=0}^{N} d_j \phi_j, f - \sum_{j=0}^{N} d_j \phi_j) =$$

$$= (f, f) - (f, \sum_{j=0}^{N} d_j \phi_j) - (\sum_{j=0}^{N} d_j \phi_j, f) + (\sum_{j=0}^{N} d_j \phi_j, \sum_{j=0}^{N} d_j \phi_j) =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{j=0}^{N} c_j \bar{d}_j - \sum_{j=0}^{N} \bar{c}_j d_j + \sum_{j=0}^{N} d_j \bar{d}_j =$$

$$= \|f\|^2 + \sum_{j=0}^{N} |c_j - d_j|^2 - \sum_{j=0}^{N} |c_j|^2.$$

První a poslední člen nezávisí na koefientech d_j, prostřední člen je nezáporný a minimalizuje se právě tehdy, když $d_j = c_j$ pro $j = 0, \ldots, N$.

Lemma 3.1.4. *Fourierova řada*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k$$

konverguje v normě L^2 k funkci f právě tehdy, když platí Parsevalova rovnost

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2 = \|f\|^2.$$

Ve dvoudimenzionálním prostoru se Parsevalova rovnost redukuje na Pythagorovu větu.

Pro dvě funkce platí Parsevalova rovnost ve tvaru

$$(f,\, g) = \int_a^b f\,(x)\,\overline{g\,(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \overline{d_k},$$

kde c_k jsou Fourierovy koeficienty funkce f, d_k jsou Fourierovy koeficienty funkce g a obě Fourierovy řady funkcí f a g konvergují.

Definice 3.1.5. Ortonormální systém je ***úplný*** jestliže platí: Pokud pro nějakou funkci $g \in L^2\,([a,\, b])$ platí $(g,\, \phi_k) = 0$ pro všechna $k = 0,\, 1, ...,$ pak $g = 0$. Tedy neexistuje nenulová funkce kolmá na všechny prvky systému.

Lemma 3.1.6. *Fourierova řada konverguje pro každou funkci $f \in L^2\,([a,\, b])$ právě tehdy, když systém $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ je úplný.*

3.2 Úplnost a Parsevalova rovnost

Definice 3.2.1. Ornonormální systém $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ se nazývá úplný, jestliže platí: pokud je pro nějakou funkci $(f, \phi_n) = 0$ pro všechna n, pak $f = 0$. Neexistuje tedy nenulová funkce kolmá na všechny ϕ_n.

Věta 3.2.2. *Nechť $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ je úplný ortonormální systém a (c_k) jsou Fourierovy koeficienty funkce f. Pak*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k$$

konverguje v normě L^2 k funkci f a platí tedy Parsevalova rovnost

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2 = \|f\|^2.$$

Důkaz: Víme, že

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2 < \infty,$$

podle Besselovy nerovnosti. Funkce f je tedy rovna funkci z Riesz-Fischerovy věty. Z úplnosti systému totiž plyne, že koeficienty (c_k) určují f jednoznačně. Je-li také $g \sim (c_k)$, pak $(f - g) \sim (0)$, a tedy $f = g$.

Věta 3.2.3. *Nechť f a g jsou funkce z L^2, kde $f \sim (c_k)$, $g \sim (d_k)$. Pak platí*

$$\int_a^b f\bar{g}dx = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \bar{d}_j.$$

Tedy zobrazení $f \rightarrow (c_k)$ z L^2 do l^2 je izomorfismus (zachovává skalární součin).

Důkaz: Je

$$\int_a^b f_n\bar{g}dx = \sum_{j=0}^{n} c_m \int_a^b \phi_m\bar{g}dx = \sum_{j=0}^{n} c_j \bar{d}_j.$$

Ale pro $n \rightarrow \infty$ je $f_n \rightarrow f$ v L^2 a pravá strana konverguje k $\sum_{j=0}^{\infty} c_j \bar{d}_j$. Celkem tedy

$$\int_a^b f\bar{g}dx = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \bar{d}_j.$$

3.2.1 Úplnost a uzavřenost

Nechť $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ je systém funkcí z L^2. Označme $\langle\phi_k\rangle$ prostor všech konečných lineárních kombinací funkcí z $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$, t.j.

$$g \in \langle\phi_k\rangle \;\Leftrightarrow g = \sum_{k=0}^{n} d_k\phi_k$$

pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a $d_k \in \mathbb{C}$.

Definice 3.2.4. Systém $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ se nazývá uzavřený, jestliže prostor $\langle\phi_k\rangle$ je hustý podprostor L^2.

Věta 3.2.5. $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ *je úplný právě tehdy, když je uzavřený.*

Důkaz: Tvrzení stačí dokázat pro ortonormální systém, neboť každý systém lze ortonormalizovat. Nechť $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ je úplný systém a $f \in L^2$. Podle Věty 1.4.2 je $f_n \to f$ v L^2, ale $f_n \in \langle\phi_k\rangle$, tedy $\langle\phi_k\rangle$ je hustý.

Naopak, nechť $\{\phi_k\}_{k=0}^{n}$ je hustý a $f \in L^2$ má všechny Fourierovy koeficienty rovny nule, t.j. $(f, \phi_n) = 0$ pro všechna n. Z hustoty plyne existence posloupnosti funkcí $\Phi_n \in \langle\phi_k\rangle$ tak, že $\Phi_n \to f$ v L^2, t.j. $\|\Phi_n - f\| \to 0$ pro $n \to \infty$. Ale f_n jsou nejlepší aproximací, tedy i $f_n \to f$. Ale $f_n = 0$, tedy i $\|f\| = 0$. Odtud plyne, že $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ je úplný systém.

3.3 Borel-Cantelliho lemma

Pro počítání s nekonečnými posloupnostmi jevů a náhodných veličin je důležitým nástrojem Borel-Cantelliho lemma.

Lemma 3.3.1. *(**Borel-Cantelli**) Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Nechť $A_n \subseteq \Omega$, $n = 1, 2, \ldots$ je posloupnost jevů. Označme jako A jev, že nastává nekonečně mnoho A_n, tedy*

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Pak platí:

1. Jestliže

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right) < \infty$$

(tj. řada konverguje), pak $P\left(A\right) = 0$.
2. Jestliže

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right) = \infty$$

(tj. řada diverguje) a A_n jsou nezávislé, potom $P\left(A\right) = 1$.

Důkaz: Máme

$$\omega \in A \Longleftrightarrow \omega \in \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \,\text{pro všechna}\, n = 1,\, 2,\, ...$$

Platí

$$A \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

pro všechna n. Tedy

$$0 \leq P\left(A\right) \leq P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \leq \sum_{n=m}^{\infty} P\left(A_m\right).$$

Ale

$$\sum_{n=m}^{\infty} P\left(A_m\right)$$

je limita částečných součtů a z definice konvergence tedy platí

$$\sum_{m=n}^{\infty} P\left(A_m\right) \to 0$$

pro $n \to \infty$, čímž je první tvrzení dokázáno.

Pro důkaz druhé části, musíme dokázat, že $P\left(A^C\right) = 0$, kde

$$A^C = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m^C.$$

Máme tedy s využitím nezávislosti a odhadu $1 - x \leq e^{-x}$ pro $x \geq 0$,

$$P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m^C\right) = \lim_{r\to\infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{r} A_m^C\right) = \prod_{m=n}^{\infty} (1 - P(A_m)) \leq \prod_{m=n}^{\infty} \exp(-P(A_m)) =$$

$$= \exp(-\sum_{m=n}^{\infty} P(A_m) = 0$$

kdykoliv $\sum_{m=n}^{\infty} P(A_m) = \infty$. Tedy

$$P(A^C) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m^C\right) = 0,$$

neboli $P(A) = 1$, což jsme chtěli dokázat.

3.4 Příklady

Příklad 3.4.1. Dokažte, že funkce e^{inx} a e^{imx}, pro dvě různá celá čísla n, m, jsou na sebe kolmé na intervalu $(-\pi, \pi)$.

Příklad 3.4.2. Najděte polynom druhého stupně který je kolmý na funkci $f(x) = x$ na intervalu $(-1, 1)$.

Příklad 3.4.3. Pomocí Gramm-Schmidtova procesu najděte ortonormální bázi prostoru polynomů druhého stupně na intervalu $(0, 1)$.

Příklad 3.4.4. Najděte nenulovou lineární funkci, která je kolmá na funkci $f(x) = e^x$ na intervalu $(0, e)$.

Kapitola 4

Wienerův proces

V této kapitole se budeme zabývat Wienerovým procesem, který slouží jako základní kámen spojitých modelů ve finanční matematice. Historie tohoto procesu těsně souvisí s historií finanční matematiky. Jako první tento proces použil Louis Bachelier v roce 1900, když ve své dizertaci odvodil první vzorec pro cenu opce. Model i výsledek jsou překvapivě blízko o mnoho pozdějšímu modelu Blacka a Scholese. Bachelierova práce ve skutečnosti upadla v zapomenutí a v šedesátých letech ji znovuobjevil významný americký matematik J. Savage, který s ní seznámil ekonomickou komunitu.

4.1 Definice Wienerova procesu

Definice 4.1.1. Reálný stochastický proces $W(t)$ na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se nazývá ***Wienerův proces*** , jestliže platí:

1. $W(0) = 0$.

2. (*spojitost trajektorií*) S pravděpodobností 1 je funkce $t \to W(t)$ spojitá v t.

3. (*nezávislost a normalita přírůstků*) Přírůstky $W(t) - W(s)$ mají rozdělení $N(0, t-s)$. Pro libovolné $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$ jsou přírůstky $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), ..., W(t_n) - W(t_{n-1})$ navzájem nezávislé.

V následujícím textu budeme považovat pojmy Wienerův proces a Brownův pohyb za synonyma, stejně tak budeme zaměňovat značení $W(t)$ a W_t.

Nejdříve se budeme zabývat otázkou, zda takový proces vůbec existuje, a ukážeme si jednu z možných konstrukcí Wienerova procesu.

4.2 Haarovy a Schauderovy funkce

Wienerův proces zkonstruujeme jako náhodný součet tzv. Schauderových funkcí, které vzniknou jako integrál z Haarových funkcí.

Definice 4.2.1. Pro $t \in [0,\, 1]$ definujeme ***Haarovy funkce*** $\{h_k\,(t)\}_{k=0}^{\infty}$ následujícím způsobem. Pro $k = 0$ položíme

$$h_0\,(t) = 1$$

pro $t \in [0,\, 1]$. Dále

$$h_1\,(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro}\, t \in \left[0,\, \frac{1}{2}\right] \\ -1 & \text{pro}\, t \in \left(\frac{1}{2},\, 1\right] \end{cases}$$

Pro $n > 1$ nejdříve vyjádříme n ve tvaru

$$n = 2^j + k$$

kde $j \geq 0$, $0 \leq k < 2^j$ (tzv. *dyadické vyjádření čísla* n), a definujeme

$$h_n\,(t) = 2^{\frac{j}{2}} h_1\left(2^j t - k\right).$$

$2^{\frac{j}{2}}$ je normalizační konstanta, faktor 2^j představuje změnu měřítka a k posun (určuje polohu nosiče).

Připomeňme v této souvislosti pojem *nosič funkce,*

$$supp\, f = \overline{\{x \in \mathbb{R};\; f\,(x) \neq 0\}}.$$

Například,

$$supp\ (h_4) = \left[0,\, \frac{1}{4}\right].$$

Pro $n = 73$ máme dyadické vyjádření

$$73 = 64 + 9 = 2^6 + 9,$$

tedy úroveň je $j = 6$ a poloha je $k = 9$.
Podobně pro $n = 51$ je $51 = 32 + 19 = 2^5 + 19$, tedy úroveň je $j = 5$ a poloha je $k = 19$.

Věta 4.2.2. *Funkce $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$ tvoří úplný, ortonormální systém v prostoru $L^2\left([0,\,1]\right)$.*

Důkaz: Nejdříve dokážeme ortogonálnost, tedy

$$\langle h_n,\, h_m \rangle = 0$$

pro $m \neq n$. Nechť $n = 2^j + k$ a $m = 2^{j'} + k'$. Pro $j = j'$ je

$$\operatorname{supp}\left(h_n\right) \cap \operatorname{supp}\left(h_m\right)$$

buď prázdná nebo jednobodová množina. Tedy

$$\int_0^1 h_n\left(x\right) h_m\left(x\right) dx = \int_0^1 0\; dx = 0.$$

Pro $j \neq j'$ musíme uvažovat dva případy, disjunktní a nedisjunktní nosiče h_n a h_m. V prvním případě je opět součin identická nula. V druhém případě předpokládejme bez újmy na obecnosti že $m > n$. Nosič h_m musí ležet v intervalu, kde h_n je konstantní, tedy

$$\int_0^1 h_n h_m = \pm 2^{\frac{j}{2}} \int_0^1 h_m = 0.$$

Dále ukážeme, že $\langle h_n,\, h_n \rangle = 1$, tedy ortonormalitu systému. Pro $n = 1$ máme

$$\|h_1\|^2 = \int_0^1 h_1^2\left(x\right) dx = \int_0^1 1 dx = 1.$$

Pro $n > 1$ dostaneme

$$\|h_n\|^2 = \int_0^1 h_n^2\left(x\right) dx = \left(2^{\frac{j}{2}}\right)^2 \int_0^1 h_1^2\left(2^j t - k\right) dt.$$

Po substituci $u = 2^j t - k$ dostáváme

$$\left(2^{\frac{j}{2}}\right)^2 \int_0^1 h_1^2\left(2^j t - k\right) dt = \int_{-k}^{2^j - k} h_1^2\left(u\right) du = \int_0^1 h_1^2\left(u\right) du = 1.$$

Úplnost systému plyne z jeho uzavřenosti. Pro každé $f \in L^2\left([0,\, 1]\right)$ existuje posloupnost konečných lineárních kombinací funkcí z $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$, která konverguje k f. Opravdu, z Haarových funkcí jako lineární kombinace dostaneme funkce po částech konstantní na dyadických intervalech, pomocí kterých můžeme libovolně dobře aproximovat funkce spojité. Na druhé straně, spojité funkce tvoří hustou podmnožinu v L^2. Odtud plyne tvrzení.

Integrováním Haarových funkcí dostaneme Schauderovy funkce.

Definice 4.2.3. Pro $n = 1, 2, \ldots$ definujeme n-tou ***Schauderovu funkci*** vztahem

$$s_n\left(t\right) = \int_0^t h_n\left(s\right) ds$$

pro $t \in [0,\, 1]$.

Grafem n-té Schauderovy funkce je rovnoramenný trojúhelník, jehož výška je $\frac{1}{2^{j+1}} 2^{\frac{j}{2}} = 2^{\frac{j}{2} - j - 1} = 2^{-\frac{j}{2} - 1}$.

4.3 Ciesielskiho konstrukce

Následující dvě technická lemmata jsou potřeba k důkazu spojitosti trajektorií v Ciesielskiho konstrukci.

Lemma 4.3.1. *Nechť $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$ a nechť platí $|a_k| = O\left(k^{\delta}\right)$, tedy existuje konstanta $c > 0$ tak, že $|a_k| \leq c k^{\delta}$. Pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k s_k\left(t\right)$ konverguje stejnoměrně pro $t \in [0,\, 1]$.*

Důkaz: Zvolme $\varepsilon > 0$. Pro $2^n \leq k < 2^{n+1}$ mají funkce $s_k\left(t\right)$ disjunktní nosiče. Položme

$$b_n = \max_{2^n \leq k < 2^{n+1}} |a_k| \leq c\left(2^{n+1}\right)^{\delta}.$$

Pak pro $0 \leq t \leq 1$ platí:

$$\sum_{k=2^m}^{\infty} |a_k| |s_k(t)| \le \sum_{n=m}^{\infty} b_n 2^n \le \max_{k<2^{n+1}} |s_k(t)| \le c \sum_{n=m}^{\infty} \left(2^{n+1}\right)^{\delta} 2^{-\frac{n}{2}-1} =$$

$$= c2^{(\delta-1)} \sum_{n=m}^{\infty} 2^{n\left(\delta-\frac{1}{2}\right)} < \varepsilon$$

pro dostatečně velké m, neboť $\delta - \frac{1}{2} < 0$ a tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\left(\delta-\frac{1}{2}\right)}$$

konverguje.

Lemma 4.3.2. *Nechť $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ jsou nezávislé náhodné veličiny na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$ s rozdělením $N(0,1)$. Pak pro skoro všechna $\omega \in \Omega$ platí, že $|A_k| = O\left(\sqrt{\log k}\right)$ pro $k \to \infty$ (tedy existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $|A_k| \le c\sqrt{\log k}$).*

Důkaz: Pro $x > 0$ a $k = 1,\, 2, \ldots$ máme:

$$P(|A_k| > x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{s^2}{2}} ds + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \le \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{x}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4}} ds \le c e^{-\frac{x^2}{4}}$$

pro nějakou konstantu c, protože $e^{-\frac{s^2}{4}}$ je klesající na $[x,\, \infty)$. Můžeme vzít např. $c = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4}} ds$.

Položme $x = 4\sqrt{\log k}$. Potom

$$P\left(|A_k| > 4\sqrt{\log k}\right) \le c e^{-4 \log k} = c\frac{1}{k^4}.$$

Protože řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ konverguje, z Borel-Cantelliho lemmatu máme

$$P\left(|A_k| > 4\sqrt{\log k} \text{ pro nekonečně mnoho } k\right) = 0.$$

Tedy pro skoro všechna ω je $|A_k| \le c\sqrt{\log k}$ pro nějakou konstantu c.

Věta 4.3.3. *Nechť* $W(t)$ *je Wienerův proces. Pak*

$$Cov\left(W\left(t\right),\, W\left(s\right)\right) = E\left(W\left(t\right)W\left(s\right)\right) = \min\left(t,\, s\right).$$

Důkaz: Nechť $s \geq t \geq 0$. Máme

$$E\left(W\left(t\right)\left[W\left(t\right) + \left(W\left(s\right) - W\left(t\right)\right)\right]\right) = E\left(W^2\left(t\right)\right) + E\left(W\left(t\right)\left[W\left(s\right) - W\left(t\right)\right]\right) =$$

$$= t = \min\left(t,\, s\right),$$

protože $E\left(W^2\left(t\right)\right) = t$ z definice a

$$E\left(W\left(t\right)\left[W\left(s\right) - W\left(t\right)\right]\right) = 0$$

z nezávislosti přírůstků.

Věta 4.3.4. *Pro libovolná* $0 \leq s,\, t \leq 1$ *platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k\left(s\right) s_k\left(t\right) = \min\left(s,\, t\right).$$

Důkaz: Pro libovolné pevné $s \in [0,\, 1]$ definujeme funkce

$$g_s\left(\tau\right) = \begin{cases} 1 \text{ pro } \tau \leq s \\ 0 \text{ pro } s < \tau \leq 1. \end{cases}$$

Podle Parsevalovy rovnosti (protože Haarovy funkce tvoří ortonormální úplný systém v $L^2\left([0,\, 1]\right)$) máme pro $s \leq t$:

$$s = \int_0^1 g_t\left(x\right) g_s\left(x\right) dx = \sum_0^{\infty} a_k b_k,$$

kde pro koeficienty a_k, b_k platí

$$a_k = \langle g_t,\, h_k \rangle = \int_0^1 g_t\left(x\right) h_k\left(x\right) dx = \int_0^t h_k\left(x\right) dx = s_k\left(t\right)$$

a

$$b_k = \langle g_s,\, h_k \rangle = \int_0^1 g_s\left(x\right) h_k\left(x\right) dx = \int_0^s h_k\left(x\right) dx = s_k\left(s\right).$$

Celkem tedy $\min(s,\ t) = s = \sum_0^\infty s_k(t)\, s_k(s)$.

Věta 4.3.5. ***(Ciesielskiho konstrukce Wienerova procesu)****: Nechť $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s rozdělením $N(0,1)$, definovaných na daném pravděpodobnostním prostoru. Pak součet*

$$W(t,\ \omega) = \sum_{k=1}^\infty A_k(\omega)\, s_k(t)$$

pro $0 \le t \le 1$ konverguje stejnoměrně v t pro skoro všechna ω, a $W(t,\ \omega)$ je Wienerův proces.

Důkaz: Stejnoměrná konvergence plyne z předchozích lemmat. Ze stejnoměrné konvergence řady spojitých funkcí plyne spojitost trajektorie procesu $t \to W(t,\ \omega)$.

Musíme ověřit, že $W(t,\ \omega)$ je Wienerův proces. Zřejmě $W(0) = 0$, protože $s_k(0) = 0$ pro všechna k.

Dále pomocí charakteristické funkce dokážeme, že $W(t) - W(s)$ pro $s < t$ má rozdělení $N(0, t-s)$. Nechť $s < t$. Z definice W, nezávislosti $A_k \sim N(0,1)$ a znalosti charakteristické funkce rozdělení $N(0,1)$,

$$E\left(e^{itA_k}\right) = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

máme

$$E\left[e^{i\lambda(W(t)-W(s))}\right] = E\left[e^{i\lambda\sum_{k=1}^\infty A_k(s_k(t)-s_k(s))}\right] = E\left(\prod_{k=1}^\infty \left[e^{i\lambda A_k(s_k(t)-s_k(s))}\right]\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^\infty E\left[e^{i\lambda A_k(s_k(t)-s_k(s))}\right] = \prod_{k=1}^\infty e^{-\frac{\lambda^2}{2}[s_k(t)-s_k(s)]^2} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^\infty [s_k(t)-s_k(s)]^2} =$$

$$= e^{-\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^\infty s_k^2(t) - 2s_k(t)s_k(s) + s_k^2(s)}.$$

Trojnásobným použitím pomocného tvrzení

$$\sum_{k=1}^\infty s_k(s)\, s_k(t) = \min(s,\ t)$$

dostaneme

$$e^{-\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty} s_k^2(t)-2s_k(t)s_k(s)+s_k^2(s)} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}[t-2s+s]} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}[t-s]}.$$

To je ale charakteristická funkce rozdělení $N(0,\, t-s)$. Z jednoznačnosti charakteristické funkce plyne

$$W(t) - W(s) \sim N(0, t-s).$$

Zbývá dokázat nezávislost přírůstků. Protože přírůstky mají normální rozdělení, stačí dokázat nekorelovanost,

$$E([W(t_{i+1}) - W(t_i)][W(t_{j+1}) - W(t_j)]) = 0$$

pro $i \neq j$.

Nejdříve vypočteme z definice W pro $s < t$

$$E[W(t)W(s)] =$$

$$E\left[\left(\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} A_k(\omega) s_k(t)\right)\left(\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} A_k(\omega) s_k(s)\right)\right] =$$

$$= E\left[\left(\sum\nolimits_{k=1}^{\infty}\sum\nolimits_{l=1}^{\infty} A_k(\omega) A_l(\omega) s_k(t) s_l(s)\right)\right] =$$

$$= E\left(\sum\nolimits_{k=1}^{\infty}\left[A_k^2(\omega)\right] s_k(t) s_k(s)\right),$$

protože z nezávislosti

$$E(A_k(\omega) A_l(\omega)) = 0$$

pro $k \neq l$. Tedy

$$E\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k^2(\omega)\right] s_k(t) s_k(s)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E\left[A_k^2(\omega)\right] s_k(t) s_k(s) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(t) s_k(s) = \min(t,s) = s,$$

neboť $A_k \sim N(0,1)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $t_i < t_j$. Z předchozího výpočtu máme

$$E([W(t_{i+1}) - W(t_i)][W(t_{j+1}) - W(t_j)]) =$$

$$= E\left[W(t_{i+1})\,W(t_{j+1}) - W(t_i)\,W(t_{j+1}) - W(t_{i+1})\,W(t_j) + W(t_i)\,W(t_j)\right] =$$

$$= t_{i+1} - t_i - t_{i+1} + t_i = 0.$$

Přírůstky jsou tedy nekorelované a tím pádem nezávislé.

Analogicky se dokáže vzájemná nezávislost více než dvou přírůstků, s využitím vlastností vícerozměrného normálníého rozdělení.

4.4 Příklady

Příklad 4.4.1. Nakreslete graf Haarovy funkce h_{11} a h_{21}.

Příklad 4.4.2. Najděte nosič Schauderovy funkce s_7 a s_{17}.

Příklad 4.4.3. Nechť $W(t)$ je standardní Wienerův proces. Dokažte, že pro libovolné $k > 0$ je proces

$$X(t) = \frac{1}{k} W(k^2 t)$$

také standardní Wienerův proces.

Příklad 4.4.4. Vypočtěte skalární součin funkcí s_9 a s_{17}.

Příklad 4.4.5. Dokažte úplnost systému Haarových funkcí v prostoru $L^2([0,1])$. (nápověda: stačí dokázat hustotu lineárních kombinací Haarových funkcí v prostoru spojitých funkcí)

Kapitola 5

Lineární a kvadratická variace

V této kapitole se budeme zabývat základní mírou variability funcí. Ukazuje se, že pro charakterizaci trajektorií Wienerova procesu klasický pojem lineární variace nevyhovuje, protože s pravděpodobností jedna všechny trajektorie mají nekonečnou lineární variaci. Proto zavedeme pojem kvadratické variace, která již poskytuje konečnou a nenulovou míru variability trajektorie Wienerova procesu.

5.1 Lineární variace

Variace je míra proměnlivosti (variability) funkce na daném intervalu.
Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a nechť $D = \{a = t_1 < t_2 < ... < t_n = b\}$ je dělení intervalu $[a, b]$.
Lineární variace vzhledem k dělení D je definována jako

$$LV(f, D) = \sum_{j=1}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| .$$

Definice 5.1.1. ***Lineární variace funkce*** f je definována jako limita

$$LV(f) = \lim_{\|D\| \to 0} LV(f, D),$$

kde $\|D\|$ je norma dělení, tj.

$$\|D\| = \max_j | t_{j+1} - t_j | .$$

Příklad 5.1.2. Funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[0,\, 1]$ má lineární variaci

$$LV(f) = f(1) - f(0) = 1.$$

Opravdu, máme $f(t_{j+1}) - f(t_j) > 0$ pro všechna j, neboť f je rostoucí. Lineární variace je tedy

$$LV(f,\, D) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(f(t_{j+1}) - f(t_j)\right) =$$

$$= f(t_n) - f(t_1) = f(b) - f(a) = f(1) - f(0)\,.$$

Obecně, je-li f monotonní na $[a, b]$, pak

$$LV(f) = |f(b) - f(a)|\,.$$

Příklad 5.1.3. Vypočtěte lineární variaci funkce $\sin x$ na intervalu $[0,\, 2\pi]$. Funkce je po částech monotonní na jednotlivých podintervalech délky $\frac{\pi}{2}$, na každém z nich je variace rovna jedné. Sečtením jednotlivých variací dostáváme $LV(f) = 4$.

Nechť $f : [0,\, T] \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce nabývající extrémů v bodech t_1 a t_2. Pak

$$LV(f) = |f(t_1) - f(0)| + |f(t_2) - f(t_1)| + |f(T) - f(t_2)| =$$

$$= \int_0^{t_1} f'(x)\, dx - \int_{t_1}^{t_2} f'(x)\, dx + \int_{t_2}^{T} f'(x)\, dx = \int_0^T |f'(x)|\, dx.$$

Obecně, je-li f diferencovatelná, pak podle věty o střední hodnotě pro každý podinterval $[t_k,\, t_{k+1}]$ existuje bod t_k^* uvnitř tohoto intervalu tak, že

$$f(t_{k+1}) - f(t_k) = f'(t_k^*)\,(t_{k+1} - t_k)\,,$$

tedy

$$\sum_{k=1}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| = \sum_{k=1}^{n-1} |f'(t_k^*)|\,(t_{k+1} - t_k)\,,$$

což je přibližný součet z definice Riemannova integrálu.

Limitním přechodem dostaneme

$$LV(f) = \lim_{\|D\| \to 0} \sum_{k=1}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| = \int_0^T |f'(t)| \, dt.$$

Pro trajektorie Wienerova procesu není lineární variace užitečný pojem, protože je rovna nekonečnu pro skoro všechny trajektorie.

5.2 Kvadratická variace

Definice 5.2.1. Nechť $D = \{t_1, ..., t_n\}$ je dělení intervalu $[0, T]$, tedy $0 = t_1 < t_2 < ... < t_n = T$. ***Kvadratickou variaci*** funkce f na intervalu $[0, T]$ definujeme jako

$$KV(f) = \lim_{\|D\| \to 0} \sum_{k=1}^{n-1} (f(t_{k+1}) - f(t_k))^2,$$

pokud limita existuje.

Lemma 5.2.2. *Nechť f je diferencovatelná funkce na $[0, T]$, pak $KV(f) = 0$.*

Důkaz: Máme

$$KV(f) = \lim_{\|D\| \to 0} \sum_{k=1}^{n-1} (f(t_{k+1}) - f(t_k))^2 =$$

$$\lim_{\|D\| \to 0} \sum_{k=1}^{n-1} |f'(t_k^*)|^2 (t_{k+1} - t_k)^2 \leq \lim_{\|D\| \to 0} \|D\| \sum_{k=1}^{n-1} |f'(t_k^*)|^2 (t_{k+1} - t_k) =$$

$$\lim_{\|D\| \to 0} \|D\| \int_0^T (f'(t))^2 \, dt = 0,$$

neboť integrál $\int_0^T (f'(t))^2 \, dt$ je konečný.

K výpočtu kvadratické variace trajektorie Wienerova procesu budeme potřebovat následující lemma.

Lemma 5.2.3. *Nechť* $W(t)$ *je Wienerův proces. Pak*

$$E\left(W^2(t)\right) = t$$
$$E\left(W^4(t)\right) = 3t^2.$$

Důkaz: Z definice víme, že $W(t) - W(s) \sim N(0,\, t-s)$. Speciálně pro $s = 0$ je $W(t) \sim N(0,\, t)$, tedy $E(W(t)) = 0$ a $E(W^2(t)) = t$. Dále, $N(0,\, t)$ má hustotu $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$. Ze vztahu

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx$$

máme

$$E\left(W^4(t)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} x^4 dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}} x^4 dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(\left[e^{-\frac{x^2}{2t}} (-t)\, x^3 \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}} t3x^2 dx \right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[e^{-\frac{x^2}{2t}} (-t)\, x^3 \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} 3t \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}} x^2 dx$$
$$= 0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} 3t \left(\left[e^{-\frac{x^2}{2t}} (-t)\, x \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}} (t)\, dx \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} 3t^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx =$$
$$= 3t^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = 3t^2.$$

Využili jsme toho, že $\left[e^{-\frac{x^2}{2t}} (-t)\, x^3 \right]_{-\infty}^{\infty} = 0$, jelikož exponenciála klesá rychleji než roste libovolná mocnina x.

Věta 5.2.4. *Nechť* $W(t)$ *je Wienerův proces na intervalu* $[0,\, T]$ *a nechť* $D = \{0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T\}$ *je dělení intervalu* $[0,\, T]$. *Pak*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)^2 \to T$$

pro $\|D\| \to 0$ *v* L^2*-normě.*

Důkaz: Označme $\Delta W_k = W(t_{k+1}) - W(t_k)$ a $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$. Chceme dokázat, že

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{n-1}(\Delta W_k)^2 - T\right)^2\right] \to 0$$

pro $\|D\| \to 0$ (tj. konvergenci v L^2). Máme

$$E\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left[(\Delta W_k)^2 - (t_{k+1}-t_k)\right]\right)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} E(\Delta W_k^4 - 2\,(t_{k+1}-t_k)\,\Delta W_k^2 +$$

$$+\,(t_{k+1}-t_k)^2) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(3\,(t_{k+1}-t_k)^2 - 2\,(t_{k+1}-t_k)^2 + (t_{k+1}-t_k)^2\right) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)^2 \le 2\,\|D\|\sum_{k=1}^{n-1}(t_{k+1}-t_k) = 2\,\|D\|\,T \to 0$$

pro $\|D\| \to 0$.

Tedy trajektorie Wienerova procesu mají kvadratickou variaci rovnu T (všechny stejnou).

Důsledek 5.2.5. Trajektorie Wienerova procesu mají nekonečnou lineární variaci.

Důsledek 5.2.6. Trajektorie Wienerova procesu nejsou diferencovatelné na žádném podintervalu.

Pozoruhodné na předchozích výsledcích je, že na jedné straně trajektorie Wienerova procesu je náhodná, ale veličina

$$\lim_{\Delta t \to 0}\sum(\Delta W_k)^2$$

je deterministická (nezávisí na trajektorii) a rovná se T (stejná pro všechny trajektorie). To je matematický smysl heuristické formule

$$(\Delta W)^2 = \Delta t.$$

5.3 Příklady

Příklad 5.3.1. Vypočtěte lineární variaci funkce $\sin 5x$ na intervalu $(0, 2\pi)$

Příklad 5.3.2. Dokažte, že funkce $\sin \frac{1}{x}$ nemá konečnou lineární variaci na intervalu $(0, 1)$

Příklad 5.3.3. Vypočtěte lineární variaci funkce $x \sin \frac{1}{x}$ na intervalu $(0, 2\pi)$

Příklad 5.3.4. Vypočtěte

$$E(W_t^6),$$

buď přímým výpočtem, nebo s použitím následující úlohy.

Příklad 5.3.5. Nechť W_t je standardní Wienerův proces. Označme

$$m_k(t) = E(W_t^k).$$

Dokažte, že platí

$$m_k(t) = \frac{1}{2}k(k-1)\int_0^t m_{k-2}(s)ds$$

pro $k \geq 2$

Kapitola 6

Itôův integrál a Itôovo lemma

V této kapitole budeme definovat stochastický integrál. Ukazuje se, že na rozdíl od klasického integrálu bude definice záviset na volbě dělícího bodu, ve kterém bereme hodnotu integrované funkce.

Pro aplikace ve finanční matematice dostaneme smysluplnou definici jen v případě že za dělící bod vezmeme levý krajní bod intervalu, což vede ke stochastickému integrálu ve smyslu K. Itô. Jedině při této definici má výsledný proces vlastnost martingalu, a je adaptovaný přirozené filtraci, tedy čerpá informace jen z minulosti.

Druhá přirozená definice vede ke Stratonovičově integrálu, který má využití v jiných aplikacích, především v inženýrství.

6.1 Itôův integrál

Je-li f hladká funkce, pak můžeme přirozeně definovat integrál podle přírůstků funkce f,

$$\int_a^b g(u)\,df(u) = \int_a^b g(u)\,f'(u)\,du = \lim_{\|D\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(t_i)\left(f(t_i) - f(t_{i-1})\right),$$

kde $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ je dělení intervalu $[a,\, b]$. Integrál

$$\int_a^b g(u)\,df(u)$$

je tzv. *Stieltjesův integrál*.

Pro aplikace ve financích chceme analogický integrál podle přírůstků Wienerova procesu W_t,

$$\int_a^b f(t,\,\omega)\,dW_t(\omega)\,.$$

Trajektorie Wienerova procesu ale není hladká funkce, je tedy otázka jaký smysl má dW_t.

Stieltjesův a stochastický integrál se tedy liší ve dvou aspektech:

– integrál je náhodná veličina (výsledek závisí na trajektorii Wienerova procesu)

– W_t není hladká, s pravděpodobností 1 nemá trajektorie derivaci v žádném bodě.

Příklad 6.1.1. (motivační) Nechť $W_t(\omega)$ je cena akcie v čase t při tržním scénáři ω. Nechť $f(t,\,\omega)$ je obchodní strategie, tj. počet držených akcií v čase t za scénáře ω. Pak

$$f(t,\,\omega)\,(W_{t+1}-W_t)=f(t,\,\omega)\,\Delta W$$

je zisk ze strategie v časovém intervalu $[t,\,t+1]$. Součtem hodnot jednotlivých zisků dostaneme v limitě integrál $\int_a^b f dW$ který představuje zisk ze strategie v časovém intervalu $[a,\,b]$.

Příklad 6.1.2. (závislost na volbě vnitřního bodu) Mějme dělení intervalu $[0,\,T]$, $D=\{0=t_0<t_1<...<t_n=T\}$ a nechť

$$\|D\|=\max_{j\in\{0,\ldots,n-1\}}|t_{j+1}-t_j|\,.$$

Pro pevné $\lambda\in[0,\,1]$ položme

$$\tau_k=(1-\lambda)\,t_k+\lambda t_{k+1}$$

pro $k=0,...,n-1$. Pro $\lambda=0$ dostaneme levý krajní bod $\tau_k=t_k$, pro $\lambda=\frac{1}{2}$ dostaneme prostředek $\tau_k=\frac{1}{2}(t_k+t_{k+1})$ a pro $\lambda=1$ dostaneme pravý krajní bod $\tau_k=t_{k+1}$.

Definujeme *Riemannovy součty* pro

$$\int_0^T W dW$$

vztahem

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} W(\tau_k)\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right).$$

Dostaneme

$$W(\tau_k)\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right) = W(\tau_k)\, W(t_{k+1}) - W(\tau_k)\, W(t_k) =$$

$$= W(\tau_k)\, W(t_{k+1}) \pm \frac{1}{2} W^2(\tau_k) \pm \frac{1}{2} W^2(t_k) \pm \frac{1}{2} W^2(t_{k+1}) - W(\tau_k)\, W(t_k) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[W(t_{k+1}) - W(\tau_k)\right]^2 + \frac{1}{2}\left[W(\tau_k) - W(t_k)\right]^2 + \frac{1}{2}\left[W^2(t_{k+1}) - W^2(t_k)\right]$$

Dále

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} W(\tau_k)\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[W(t_{k+1}) - W(\tau_k)\right]^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[W(\tau_k) - W(t_k)\right]^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[W^2(t_{k+1}) - W^2(t_k)\right].$$

Poslední člen je tzv. teleskopující součet ve kterém se všechny členy s výjimkou prvního a posledního vyruší, a rovná se tedy

$$W^2(T) - W^2(0).$$

Pro $\|D\| \to 0$ podobně jako při výpočtu kvadratické variace máme

$$R_n = -\frac{1}{2}(1-\lambda)T + \frac{1}{2}\lambda T + \frac{1}{2}\left[W^2(T) - W^2(0)\right] = \frac{W^2(T)}{2} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)T.$$

Dvě přirozené volby hodnoty λ vedou ke dvěma různým stochastickým integrálům:

pro $\lambda = \frac{1}{2}$ máme $\int_0^T W_t dW_t = \frac{W^2(T)}{2}$ … ***Stratonovičův integrál***,

pro $\lambda = 0$ máme $\int_0^T W_t dW_t = \frac{W^2(T)}{2} - \frac{T}{2}$ … ***Itôův integrál***.

Ve financích se používá jen Itôův integrál, protože portfolio musíme sestavit před pohybem ceny

6.2 Filtrace

Připomeňme si z diskrétních modelů, že σ-algebra popisuje systém pozorovatelných jevů. Zachyceje tedy informaci které jevy můžeme pozorovat a které ne.

Uvažujme standardní příklad s hodem kostkou. Pravděpodobnostní prostor Ω má šest prvků,

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Uvažujme nejdříve σ-algebru všech podmnožin Ω. Při této σ-algebře jsou pozorovatelné všechny jevy. Informace kterou σ-algebra nese je tedy přímo hodnota která na kostce padla.

Na druhé straně, uvažujme menší systém tvořený množinami

$$\emptyset, \Omega, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}$$

Snadno ověříme uzavřenost na sjednocení a doplňky, je to tedy opět σ-algebra. Při takové σ-algebře jsou pozorovatelné jen dva jevy, že padlo sudé číslo nebo liché číslo. Informace kterou σ-algebra nese je tedy pouze sudost nebo lichost hodnoty která na kostce padla.

Následující příklad připomíná použití σ-algeber při popisu vývoje informace v čase.

Příklad 6.2.1. Uvažujme tři časové okamžiky, $t = 0, t = 1$ a $t = 2$ a dvoukrokový model trhu. Náš pravděpodobnostní prostor je tvořen množinou všech úplných scénářů

$$\Omega = \{(++)\,, (+-)\,, (-+)\,, (--)\}\,.$$

V čase $t = 0$ jsou určeny pouze jevy Ω a $\emptyset$, tedy σ-algebra popisující tuto informaci je

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\, \Omega\}\,.$$

V čase $t = 1$ jsou určeny jevy: $F_+ = \{(++)\,, (+-)\}$ a $F_- = \{(-+)\,, (--)\}$. Tedy σ-algebra popisující tuto informaci je

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset,\, \Omega,\, F_+,\, F_-\}\,.$$

V čase $t = 2$ jsou určeny všechny jevy (každá podmnožina Ω), tedy σ-algebra popisující tuto informaci je

$$\mathcal{F}_2 = \exp \Omega = \{\forall \, \text{podmnožiny} \, \Omega\} .$$

.

Definice 6.2.2. Systém σ-algeber $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, \, t \in \tau\}$ na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \, \mathcal{A}, \, P)$ se nazývá ***filtrace***, pokud pro všechna $t \in \tau$ je $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}$ a $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ kdykoliv je $s < t$.

Definice 6.2.3. Nechť $W(t)$ je Wienerův proces na $(\Omega, \, \mathcal{A}, \, P)$. Filtrace $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, \, t \geq 0\}$ se nazývá ***historie Wienerova procesu***, jestliže pro každé $t > 0$ je $\mathcal{F}_t$ σ-algebra generovaná náhodnými veličinami $W(s, \, \omega)$ pro $s \leq t$.

$\mathcal{F}$ popisuje růst informace o trajektorii Wienerova procesu v závislosti na čase. $\mathcal{F}_t$ je tedy informace o trajektorii v čase t. Platí

Věta 6.2.4. *$\mathcal{F}_t$ je nejmenší σ-algebra generovaná množinami typu*

$$\{\omega; \, W(t_1, \omega) \in F_1, \, ..., \, W(t_k, \omega) \in F_k\} ,$$

kde $k = 1, 2, ...$ a $t_j < t$ pro všechna $j = 1, \ldots k$ jsou libovolné časy a $F_j \subseteq \mathbb{R}$ jsou libovolné Borelovské množiny.

Věta 6.2.5. *Funkce $h(\omega)$ je $\mathcal{F}_t$-měřitelná, kde $\mathcal{F}$ je historie Wienerova procesu právě tehdy, když h je bodová limita součtů funkcí tvaru*

$$g_1(W_1) ... g_k(W_{t_k}) ,$$

kde $g_1, \, ..., \, g_k$ jsou omezené spojité funkce, $t_j \leq t$ pro $j = 1, \, ..., \, k$ a $k \in \mathbb{N}$.

Definice 6.2.6. Nechť $W(t)$ je Wienerův proces na prostoru $(\Omega, \, \mathcal{A}, \, P)$ a nechť $\mathcal{F}$ je historie Wienerova prostoru. Říkáme, že proces $\{G(t, \, \omega) \, ; \, t \in [0, \, \infty)\}$ je ***adaptovaný historii Wienerova procesu*** (neboli $G(t, \, \omega)$ je ***neanticipativní***), jestliže pro každé $t \geq 0$ je funkce $\omega \to G(t, \, \omega)$ $\mathcal{F}_t$-měřitelná.

Tedy hodnota $G(t, \, \omega)$ závisí jen na historii Wienerova procesu do času t. $G(t, \, \omega)$ nepředvídá proud informací reprezentovaných σ-algebrami $\mathcal{F}_t$.

Definice 6.2.7. Stochastický proces S se nazývá ***jednoduchá funkce*** na intervalu $[0,\,T]$, jestliže existuje dělení $D = \{0 = t_0 < ... < t_m = T\}$ tak, že

$$S\,(t,\,\omega) = S_k\,(\omega)$$

pro $t_k \leq t < t_{k+1}$ $(k = 0,\,...,\,m-1)$ pro nějaké náhodné veličiny S_k.

Definice 6.2.8. Nechť S je jednoduchá funkce. Pak

$$\int_0^T SdW = \sum_{k=0}^{m-1} S_k\,(\omega)\,(W\,(t_{k+1},\,\omega) - W\,(t_k,\,\omega))$$

se nazývá ***Itôův stochastický integrál*** funkce S na intervalu $[0,\,T]$.

Tedy označíme-li $\Delta W_k = (W\,(t_{k+1},\,\omega) - W\,(t_k,\,\omega))$, máme

$$\int_0^T SdW = \sum_{k=0}^{m-1} S_k \Delta W_k.$$

Definice 6.2.9. Nechť $W\,(t)$ je Wienerův proces na prostoru $(\Omega,\,\mathcal{A},\,P)$. Symbolem M budeme označovat třídu stochastických procesů

$$f\,(t,\,\omega) : [0,\,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$$

takových, že:
– $f\,(t,\,\omega)$ je neanticipativní,
– $f\,(t,\,\omega)$ je $\mathcal{B} \times \mathcal{A}$-měřitelná, kde $\mathcal{B}$ jsou Borelovské množiny na $[0,\,\infty)$,
– platí

$$P\left\{\int_0^T [f\,(t)]^2\,dt < +\infty\right\} = 1$$

Příklad 6.2.10. (**Investiční strategie**) V intervalu $[t_i,\,t_{i+1})$ držíme $e_i\,(\omega)$ akcií, kde $e_i\,(\omega)$ závisí na vývoji ceny $W_t\,(\omega)$ do času t_i (W_t je cena akcie v čase t)

$$\Phi\,(t,\,\omega) = \sum_{i=0}^{m-1} e_i\,(\omega)\,\chi_{[t_i,\,t_{i+1})},$$

kde

$$\chi_{[t_i,\,t_{i+1})} = \begin{cases} 1 \text{ pro } t \in [t_i,\,t_{i+1}) \\ 0 \text{ jinak.} \end{cases}$$

Pak $\Phi(t, \omega)$ je počet akcií, které držíme v čase t (za scénáře ω). Φ je jednoduchá funkce. Integrál

$$\int_0^T \Phi(t, \omega)\, dW_t(\omega) = \sum_{i=0}^{m-1} e_i(\omega) \big(W_{t_{i+1}}(\omega) - W_{t_i}(\omega)\big)$$

je náš celkový zisk z této strategie od času 0 do času T.

Věta 6.2.11. *(**Itôova izometrie**): Nechť S je jednoduchá omezená funkce (tedy S_k jsou omezené náhodné veličiny). Pak*

$$E\left[\left(\int_0^T S(t, \omega)\, dW_t(\omega)\right)^2\right] = E\left(\int_0^T S^2(t, \omega)\, dt\right).$$

Důkaz: Označme $\Delta W_j = W(t_{j+1}, \omega) - W(t_j, \omega)$. Máme z definice

$$E\left[\left(\int_0^T S dW\right)^2\right] = E\left[\left(\sum_{j=0}^{m-1} S_j \Delta W_j\right)^2\right] = E\left[\sum_{j=0}^{m-1} S_j^2 (\Delta W_j)^2 + 2\sum_{i<j}^{m-1} S_i S_j \Delta W_i \Delta W_j\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} E\left(S_j^2 \Delta W_j^2\right) + 2i < j \sum_{i,j=0}^{m-1} E\left(S_i S_j \Delta W_i\right) E\left(\Delta W_j\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} E\left(S_j^2\right) E\left(\Delta W_j^2\right) = \sum_{j=0}^{m-1} E\left(S_j^2\right)(t_{j+1} - t_j) =$$

$$= E\left(\sum_{j=0}^{m-1} S_j^2 (t_{j+1} - t_j)\right) = E\left[\int_0^T S^2 dt\right].$$

Pro obecný proces $f \in M$ definujeme $\int_0^T f(t, \omega)\, dW$ limitním přechodem:

Lemma 6.2.12. *Nechť f je náhodný proces patřící do třídy M. Pak existuje posloupnost jednoduchých funkcí $f_n \in M$ tak, že pro $n \to \infty$ platí*

$$E\left(\int_0^T (f_n(t, \omega) - f(t, \omega))^2\, dt\right) \to 0.$$

Definice 6.2.13. Pro obecný proces $f \in M$ definujeme Itôův integrál předpisem

$$\int_0^T f(t, \omega)\, dW = \lim_{n \to \infty} \int_0^T f_n(t, \omega)\, dW.$$

Tato limita nezávisí na volbě posloupnosti f_n (důkaz je technický, pomocí Itôovy izometrie - viz literatura).

Věta 6.2.14. ***(Základní vlastnosti Itôova integrálu)*** *Platí*
1. $\int_0^T (aG + bF)\, dW = a\int_0^T GdW + b\int_0^T FdW$
2. $E\left(\int_0^T GdW\right) = 0$
3. $\int_0^t GdW$ *je* $\mathcal{F}_t$*-měřitelný*

Důkaz: První tvrzení plyne ihned z definice. Dokážeme druhé tvrzení. Nechť G je jednoduchá funkce, tedy $G(t, \omega) = G_k(\omega)$ pro $t_k \leq t < t_{k+1}$, kde $k = 0, ..., m-1$. Jelikož $G_k(\omega)$ závisí jen na $W(s)$ pro $s \leq t_k$ (z neanticipativnosti), dostáváme:

$$E\left(\int_0^T GdW\right) = E\left(\sum_{k=0}^{m-1} G_k(\omega)\, \Delta W_k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} E\left(G_k(\omega)\, \Delta W_k\right) = \sum_{k=0}^{m-1} E\left(G_k(\omega)\right) E\left(\Delta W_k\right).$$

Protože $E(G_k(\omega)) < \infty$ a $E(\Delta W_k) = 0$, platí

$$\sum_{k=0}^{m-1} E\left(G_k(\omega)\right) E\left(\Delta W_k\right) = 0.$$

6.3 Itôovo lemma

Motivace: Nechť f je hladká funkce na intervalu $[a, b]$. Uvažujme rovnoměrné dělení intervalu $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$, kde $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{n}$ pro všechna $i = 0, 1, ..., n-1$.

Pak platí, s využitím Taylorova polynomu

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_{i+1}) - f(t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f'(t_i)\,\Delta t_i + \frac{1}{2} f''(t_i)\,(\Delta t_i)^2 + ...$$

f je hladká, tedy

$$|f''(t)| < M$$

pro nějakou konstantu M na $[a, b]$. Odtud

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f''(t_i)\,(\Delta t_i)^2 \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} M \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 = \frac{n}{2} M \frac{(b-a)^2}{n^2} \to 0$$

pro $n \to \infty$.
Tedy pro $n \to \infty$:

$$f(b) - f(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f'(t_i)\,\Delta t_i = \textstyle\int_a^b f'(t)\,dt.$$

Pro deterministický případ jsme tedy dostali Newton-Leibnitzův vzorec.

Teď uvažujme stochastické funkce. V aplikacích, cena aktiva je funkcí Wienerova procesu W_t,

$$S_t(\omega) = f(W_t(\omega))$$

Nechť f je hladká funkce. Pak

$$f(W(b)) - f(W(a)) = \sum_{i=0}^{n-1} f(W(t_{i+1})) - f(W(t_i)) =$$

$$= \sum f'(W(t_i))\,\Delta W_i + \sum \frac{1}{2} f''(W(t_i))\,(\Delta W_i)^2 + ...$$

Z lemmatu o kvadratické variaci víme, že

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\Delta W_i)^2 \to b - a$$

pro $n \to \infty$, tedy členy 2. řádu nelze zanedbat (vyššího řadu už ano).
Dostaneme tedy:

$$f(W(b)) - f(W(a)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f'(W(t_i))\,\Delta W_{t_i} + \frac{1}{2} f''(W(t_i))\,(\Delta W_{t_i})^2 =$$

$$= \int_a^b f'(W_t)\,dW_t + \frac{1}{2}\int_a^b f''(W(t))\,dt.$$

Definice 6.3.1. Nechť W_t je Wienerův proces na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$. ***Jednodimenzionální Itôův proces*** je stochastický proces tvaru:

$$X_t(\omega) = X_0 + \int_0^t u(s,\, \omega)\,ds + \int_0^t v(s,\, \omega)\,dW_s(\omega)\,,$$

kde $u,\, v \in M$.

Člen $\int_0^t u(s,\, \omega)\,ds$ je obyčejný Riemannův integrál (z náhodné funkce) a $\int_0^t v(s,\, \omega)\,dW_s(\omega)$ je Itôův stochastický integrál.

Poznámka. Často se Itôův proces zapisuje v diferenciálním tvaru:

$$dX_t(\omega) = u(t,\, \omega)\,dt + v(t,\, \omega)\,dW_t(\omega)\,,$$

což je tzv. *stochastický diferenciál*, kde koeficient $u(t,\, \omega)$ se obvykle nazývá drift a $v(t,\, \omega)$ je volatilita.

Věta 6.3.2. *(Itôovo lemma) Nechť $X(t,\, \omega)$ je Itôův proces se stochastickým diferenciálem*

$$dX(t) = udt + vdW(t)\,,$$

kde $u,\, v$ jsou procesy třídy M. Nechť

$$g(t,\, x) : \langle 0,\, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce. Potom

$$Y(t) = g(t,\, X(t))$$

je opět Itôův proces. Jeho stochastický diferenciál má tvar

$$dY(t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t,\, X(t))\,dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,\, X(t))\,dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,\, X(t))\,(dX(t))^2\,,$$

kde

$$(dX(t))^2 = (udt + vdW(t))^2 = (dX(t))(dX(t))$$

se počítá podle pravidel $dtdt = dtdW = 0$ *a* $dWdW = dt$.

Příklad 6.3.3. (Stochastická diferenciální rovnice pro vývoj ceny akcie): Ceny se vyvíjí podle geometrického Wienerova procesu

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

neboli

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t.$$

Nechť

$$g(t,\, x) = \ln x$$

a

$$Y_t = g(t,\, S_t).$$

Máme tedy

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Podle Itôova lemmatu dostaneme

$$dY(t) = 0 + \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S_t^2}\right)(dS_t)^2,$$

kde $(dS_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 dt$. Tedy

$$dY(t) = \frac{1}{S_t}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t.$$

Odtud

$$dY_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t,$$

tedy

$$Y_t = Y_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t,$$

kde $W_0 = 0$. Tedy

$$\ln S_t = \ln S_0 + \mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t$$

má normální rozdělení

$$\ln S_t \sim N\left(\ln S_0 + \mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t;\ \sigma^2 t\right)$$

a

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$$

má lognormální rozdělení.

6.4 Příklady

Příklad 6.4.1. Nechť $f(x) = x^2$ Vypočtěte

$$\int_0^1 \sin x df(x)$$

Příklad 6.4.2. Vypočtěte

$$\int_0^1 W^2(t)dW$$

Příklad 6.4.3. Pomocí Itôova lemmatu najděte stochastický diferenciál procesu

$$X(t) = t + \cos W(t)$$

a

$$X(t) = t^3 + W(t)^2$$

Kapitola 7

Martingaly a Itôovy proces

7.1 Definice martingalu

V diskrétním případě jsme definovali martingal takto. Posloupnost náhodných veličin S_n, $0 \leq n \leq \infty$, která pro všechna n splňuje

$$E\left(S_{n+1} \mid S_0,\, S_1,\, ...,\, S_n\right) = S_n,$$

se nazývá martingal.

Připomeňme si z předchozích kapitol dvě definice.

Filtrace na $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$ je systém σ-algeber $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t,\, t \in T\}$, kde pro každé $t \in T$ platí $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}$, a $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ pro $s \leq t$.

Historie Wienerova procesu je filtrace $\mathcal{F}^{\mathcal{W}} = \left\{\mathcal{F}^{\mathcal{W}}{}_t,\, t \in T\right\}$ taková, že $\mathcal{F}^{\mathcal{W}}{}_t$ je σ-algebra generovaná náhodnými veličinami $W(s)$ pro $s \leq t$. Popisuje růst informace o trajektorii Wienerova procesu v závislosti na čase.

Pokud bude zřejmé z kontextu že uvažovaná filtrace je historie Wienerova procesu, budeme horní index W vynechávat.

Definice 7.1.1. Nechť $\{W_t;\, t \geq 0\}$ je Wienerův proces na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$ a $\left\{\mathcal{F}^{\mathcal{W}}{}_t,\, t \geq 0\right\}$ je historie Wienerova procesu. Stochastický proces M_t se nazývá ***martingal*** vzhledem k $\mathcal{F}_t^W$, jestliže:
– M_t je neanticipativní (tj. M_t je určeno hodnotami Wienerova procesu do času t),
– $E\left[|M_t|\right] < \infty$ pro $\forall t \geq 0$,

– platí tzv. *Martingalová podmínka*

$$E\left[M_s \mid \mathcal{F}_t^W\right] = M_t$$

pro všechna $s \geq t$.

Řečeno slovy: "Očekávání budoucí hodnoty je rovno současné hodnotě."

Věta 7.1.2. *Nechť $\{W(t)\,;\, t \geq 0\}$ je Wienerův proces na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$ a $\{\mathcal{F}_t,\, t \geq 0\}$ je historie Wienerova procesu. Pak $W(t)$ je martingalem vzhledem k $\{\mathcal{F}_t,\, t \geq 0\}$.*

Důkaz: Musíme dokázat všechny tři vlastnosti martingalu. W_t je neanticipativní, tedy W_t je určeno hodnotami Wienerova procesu do času t pro $s \leq t$. To je triviální. Dále

$$E\left[|W_t|\right] < \infty$$

kde

$$W_t \sim N(0,\, t)$$

a $f = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$, tedy

$$E\left[|W_t|\right] = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx.$$

Jelikož jsou obě funkce v integrálu sudé, můžeme psát

$$E\left[|W_t|\right] = 2\int_0^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$$

Zavedeme substituci $s = -\frac{x^2}{2t}, ds = -\frac{1}{2t} 2x dx$ a dostáváme

$$E\left[|W_t|\right] = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{-\infty} e^s (-t)\, ds = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{0} t e^s ds =$$

$$= \frac{2t}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{0} e^s ds = \frac{2t}{\sqrt{2\pi t}} \left[e^s\right]_{-\infty}^{0} = \frac{2t}{\sqrt{2\pi t}} \left(1 - e^{-\infty}\right) = \frac{2t}{\sqrt{2\pi t}} < \infty$$

Zbývá nám dokázat, že $E\left[W_s \mid \mathcal{F}_t\right] = W_t$, pro $s \geq t$,

$$E\left[W_s \mid \mathcal{F}_t\right] = E\left[W_t + (W_s - W_t) \mid \mathcal{F}_t\right] =$$

$$= E\left[W_t \mid \mathcal{F}_t\right] + E\left[W_s - W_t \mid \mathcal{F}_t\right] = W_t + 0 = W_t$$

neboť $W_s - W_t$ a W_t jsou nezávislé, tedy $E[W_s - W_t \mid \mathcal{F}_t] = 0$.

V diskrétním případě je martingalová transformace martingal. Ve spojitém případě je analogií martingalové transformace Itôův integrál. Platí

$$E\left(\int_{s_1}^{s_2} a(t,\, \omega)\, dW\right) = 0$$

pro každé s_1, s_2, odkud plyne, že Itôův integrál je martingal.

7.2 Itôův proces a stopping time

Definice 7.2.1. Nechť $W(t)$ je standardní Wienerův proces na $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$ a $\{\mathcal{F}_t\}$ je historie Wienerova procesu. Nezáporná náhodná veličina τ se nazývá ***stopping time*** ("čas zastavení"), jestliže pro všechna $t \geq 0$ je událost (jev) $\{\tau \leq t\}$ prvkem σ-algebry $\mathcal{F}_t$.

V čase t tedy víme, zda čas τ už nastal, nebo ne.

Příklad 7.2.2. První čas průchodu bodem a:

Nechť $a > 0$,

$$\tau_a = \min_t \{t \in (0,\, \infty)\, ; W(t) = a\}$$

a $\tau_a = \infty$ pokud neexistuje t takové, že $W(t) = a$. Je vidět, že τ_a je stopping time.

Příklad 7.2.3. Maximum na intervalu $[0,\, T]$ není stopping time.

Definujeme

$$M(T) = \max_{t \in [0,\, T]} W(t)$$

maximální hodnotu $W(t)$, a

$$\tau = \min_t \{t \in [0,\, T]\, ,\, W(t) = M(T)\}$$

čas dosažení maxima. V čase t nevíme, jestli τ nastal nebo ne (může být potom ještě vyšší hodnota), tedy nejde o stopping time.

Věta 7.2.4. ***(Princip reflexe)****: Nechť $W(t)$ je Wienerův proces, $a > 0$ a $\tau(a)$ je čas prvního dosažení bodu a. Platí*

$$P[\tau(a) < t] = 2P[W(t) > a]\, .$$

Výraz na pravé straně rovnice umíme spočítat:

$$P\left[W(t) > a\right] = \int_a^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{r^2}{2t}} dx.$$

Důkaz: Je-li $W(t) > a$, pak ze spojitosti trajektorií Wienerova procesu plyne, že $\tau(a) < t$. Protože $\tau(a)$ je stopping time,

$$W(t + \tau(a)) - W(\tau(a))$$

je Wienerův proces, který je nezávislý na vývoji před časem $\tau(a)$. Tedy

$$W(t) - W(\tau(a)) \sim N(0, t - \tau(a))$$

Ze symetrie normálního rozdělení plyne

$$P\left[W(t) - W(\tau(a)) > 0 \mid \tau(a) < t\right] = P\left[W(t) - W(\tau(a)) < 0 \mid \tau(a) < t\right] = \frac{1}{2}.$$

Tedy

$$P\left[W(t) > a\right] = P\left[\tau(a) < t \wedge W(t) - W(\tau(a)) > 0\right] =$$

$$= P\left[\tau(a) < t\right] P\left[W(t) - W(\tau(a)) > 0 \mid \tau(a) < t\right] = \frac{1}{2} P\left[\tau(a) < t\right]$$

Celkem

$$P\left[\tau(a) < t\right] = 2P\left[W(t) > a\right].$$

Poznámka. Pokud víme, že $\tau(a) < t$, pak je stejná pravděpodobnost, že se $W(t)$ nachází na úrovni a jako pod úrovní a.

7.3 Příklady

Příklad 7.3.1. Dokažte, že symetrická náhodná procházka má vlastnost martingalu

Příklad 7.3.2. Nechť $X_1, X_2, \ldots$ je posloupnost náhodných veličin, pro které platí $E(X_n) = 0$ pro všechna n. Dokažte, že posloupnost částečných součtů $S_0 = 0$ a $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ je martingal.

Příklad 7.3.3. Mějme nezávislé náhodné proměnné s $E(X_n) = 0$ a $Var(X_n) = \sigma^2$ pro všechna n. Uvažujme posloupnost částečných součtů z předchozího příkladu. Ukažte, že posloupnost $M_0 = 0$ a $M_n = S_n^2 - n\sigma^2$ je martingal vzhledem k posloupnosti X_n.

Příklad 7.3.4. Nechť W_t je standardní Wienerův proces. Je proces W_t^2 martingal? Je proces $W_t + 3$ martingal? Je proces $W_t - t$ martingal?

Kapitola 8

Cameron-Martinova věta

8.1 Radon-Nikodýmova derivace

Při oceňování složitějších typů opcí závislých na cestě je potřeba tzv. Cameron-Martinova věta (nebo její obecnější verze Girsanova věta).

Nechť $W(t)$ je standardní Wienerův proces na $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$.
Nechť $\widetilde{W}$ je Wienerův proces s driftem,

$$\widetilde{W}(t) = W(t) + \gamma t$$

pro nějakou reálnou konstantu $\gamma \neq 0$. Chceme najít pravděpodobnostní míru Q na Ω tak, aby $\widetilde{W}(t)$ byl obyčejný Wienerův proces na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega,\, \mathcal{A},\, Q)$.

Poznámka: Prostor Ω, který často ani není explicitně zadán, můžeme ztotožnit s prostorem všech trajektorií Wienerova procesu, tedy s prostorem všech spojitých funkcí na intervalu $[0, T]$. Změna míry je tedy proces který mění pravděpodobnost jednotlivých trajektorií (přesně řečeno jejich okolí).

Radon-Nikodýmova derivace Q vůči P, označovaná $\frac{dQ}{dP}$, umožňuje převádět jednu pravděpodobnostní míru na jinou.

Definice 8.1.1. Nechť $(\Omega,\, \mathcal{A})$ je pravděpodobnostní prostor, na kterém jsou dány dvě pravděpodobnostní míry P a Q. Říkáme, že P a Q jsou ***ekvivalentní***, jestliže platí $P(A) = 0 \Longleftrightarrow Q(A) = 0$.

Definice 8.1.2. Nechť P a Q jsou ekvivalentní míry na $(\Omega, \mathcal{A})$ a pro náhodnou veličinu $Z = \frac{dQ}{dP}$ platí

$$E_Q(X) = \int_\Omega X dQ = \int_\Omega X \frac{dQ}{dP} dP =$$

$$= \int_\Omega XZ dP = E_P(XZ) = E_P\left[\frac{dQ}{dP} X\right],$$

pak Z se nazývá ***Radon-Nikodýmova derivace*** pravděpodobnostní míry Q vzhledem k pravděpodobnostní míře P.

8.2 Cameron-Martinova věta

Věta 8.2.1. *(**Cameron-Martin**): Nechť $\{W(t) : t \in [0, T]\}$ je standardní Wienerův proces na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nechť Q je pravděpodobnostní míra, jejíž Radon-Nikodýmova derivace vzhledem k P je*

$$\frac{dQ}{dP}(\omega) = \exp\left(-\gamma W(T, \omega) - \frac{1}{2}\gamma^2 T\right).$$

Pak $\widetilde{W}(t) = W(t) + \gamma t$ je Wienerův proces (a tedy marginal) vzhledem ke Q.

Je-li například $\gamma < 0$, pak vzhledem k míře Q je pravděpodobnost trajektorie tím větší, čím je větší její hodnota v čase T (viz. obrázek u hesla Girsanovova věta na wikipedii). Opravdu, v Radon-Nikodýmově derivaci druhý člen v exponentu nezávisí na trajektorii a první je přímo úměrný hodnotě procesu v bodě T.

K důkazu je třeba moment generující funkce, připomeneme její definici.

Definice 8.2.2. ***Moment generující funkce*** náhodné veličiny X je definován jako

$$\psi(\theta) = E\left[e^{\theta X}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{\theta x} f(x)\, dx,$$

kde f je hustota X.

Lemma 8.2.3. *Nechť X je náhodná veličina s rozdělením*

$$N\left(0, \sigma^2\right)$$

a θ je parametr. Pak

$$E\left(e^{\theta X}\right) = e^{\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2}.$$

Důkaz:

$$E\left(e^{\theta X}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta X} dF\left(x\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x - \frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Doplníme na čtverec v exponentu,

$$E\left(e^{\theta X}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\frac{x^2}{2\sigma^2} - \theta x\right]} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\frac{x}{\sqrt{2}\sigma} - \frac{\theta\sqrt{2}\sigma}{2}\right]^2 + \frac{\theta^2\sigma^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{\theta^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\frac{x}{\sqrt{2}\sigma} - \frac{\theta\sqrt{2}\sigma}{2}\right]^2} dx = e^{\frac{\theta^2\sigma^2}{2}},$$

protože

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left[\frac{x}{\sqrt{2}\sigma} - \frac{\theta\sqrt{2}\sigma}{2}\right]^2}$$

je hustota $N\left(\frac{\theta\sqrt{2}\sigma}{2};\, \sigma^2\right)$, jejíž integrál přes celou reálnou osu je roven jedné.

Důkaz Cameron-Martinovy věty: Chceme dokázat, že

$$\widetilde{W}\left(t\right) = W\left(t\right) + \gamma t$$

je standardní Wienerův proces vůči pravděpodobnostní míře Q, kde

$$\frac{dQ}{dP}\left(\omega\right) = \exp\left(-\gamma W\left(T,\, \omega\right) - \frac{1}{2}\gamma^2 T\right).$$

Musíme dokázat vlastnosti Wienerova procesu vzhledem ke Q. Máme

$$\widetilde{W}\left(0\right) = W\left(0\right) + \gamma 0 = 0.$$

Spojitost trajektorií plyne ze spojitosti trajektorií $W\left(t\right)$ a spojitosti funkce γt. Dále s využitím předchozího lemmatu dokážeme, že $\widetilde{W}\left(t\right)$ má vůči Q rozdělení $N\left(0,\, t\right)$. Víme, že moment generující funkce určuje jednoznačně pravděpodobnostní rozdělení. Vypočteme moment generující funkce $\widetilde{W}(t)$ vůči Q,

$$E_Q\left(e^{\theta\widetilde{W}(t)}\right) = E_P\left(\frac{dQ}{dP}e^{\theta\widetilde{W}(t)}\right) = E_P\left[e^{-\gamma W(T)-\frac{1}{2}\gamma^2 T+\theta(W(t)+\gamma t)}\right] =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 T+\theta\gamma t}E_P\left(e^{-\gamma W(T)+\theta W(t)}\right) = e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 T+\theta\gamma t}E_P\left(e^{-\gamma(W(T)-W(t))-\gamma W(t)+\theta W(t)}\right).$$

Víme, že $W(t)$ a $W(T)-W(t)$ jsou nezávislé (z definice Wienerova procesu). Tedy

$$e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 T+\theta\gamma t}E_P\left(e^{-\gamma(W(T)-W(t))-\gamma W(t)+\theta W(t)}\right) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 T+\theta\gamma t}E_P\left(e^{-\gamma(W(T)-W(t))}\right)E_P\left(e^{(\theta-\gamma)W(t)}\right).$$

Použitím předchozího lemmatu s hodnotami $\sigma^2 = t$ respektive $\sigma^2 = T-t$, je tedy výraz roven

$$e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 T+\theta\gamma t}e^{\frac{\gamma^2}{2}(T-t)}e^{\frac{(\theta-\gamma)^2}{2}t} = e^{\frac{\theta^2 t}{2}},$$

neboť

$$-\frac{1}{2}\gamma^2 T+\theta\gamma t+\frac{\gamma^2}{2}T-\frac{\gamma^2}{2}t+\frac{\theta^2}{2}t-\theta\gamma t+\frac{\gamma^2}{2}t = \frac{\theta^2}{2}t.$$

To je ale moment generující funkce $N(0,\, t)$. Zcela analogicky se dokáže, že

$$\widetilde{W}(s)-\widetilde{W}(t)$$

má rozdělení $N(0,\, s-t)$ pro $s > t$ vůči Q.

8.3 Girsanovova věta

Girsanovova věta zobecňuje Cameron-Martinovu větu na případ obecného driftu.

Věta 8.3.1. *(**Girsanov**): Nechť $W(t,\omega)$, $0 \le t \le T$ je Wienerův proces na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nechť $\gamma(t,\omega)$ je adaptovaný proces vzhledem k historii Wienerova procesu, pro který*

$$E_P\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma(t)\,dt\right)\right] < \infty.$$

Pak existuje pravděpodobnostní míra Q na $(\Omega, \mathcal{A})$ taková, že platí $Q \sim P$,

$$\frac{dQ}{dP}(\omega) = \exp\left(-\int_0^T \gamma(t,\omega)\,dW(t,\omega) - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma^2(t,\omega)\,dt\right)$$

a

$$\widetilde{W}(t,\omega) = W(t,\omega) + \int_0^T \gamma(s,\omega)\,ds$$

je Wienerův proces vzhledem ke Q.

Věta 8.3.2. *(**obrácená Girsanovova věta**): Nechť $W(t,\omega)$, $0 \le t \le T$ je Wienerův proces na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nechť $Q \sim P$. Pak existuje adaptovaný proces $\gamma(t,\omega)$ takový, že*

$$\widetilde{W}(t,\omega) = W(t,\omega) + \int_0^t \gamma(s,\omega)\,ds$$

je Wienerův proces na $(\Omega, \mathcal{A}, Q)$. Navíc

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\int_0^T \gamma(t,\omega)\,dW(t,\omega) - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma^2(t,\omega)\,dt\right).$$

Kapitola 9

Odvození Black-Scholesovy rovnice

Black-Scholesova rovnice je důsledkem modelu vývoje ceny akcie pomocí Wienerova procesu. Předpokládejme, že pohyb ceny akcie je popsán geometrickým Wienerovým procesem,

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW,$$

neboli

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW.$$

Použijeme Itôovo lemma na funkci $G(S, t) = lnS$. Máme $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}$ a $\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = \frac{1}{S^2}$. Tedy z Itôova lemmatu

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW$$

a

$$d(\ln S) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW.$$

Z toho plyne, že $\ln S_T - \ln S_0$ má normální rozdělení se střední hodnotou $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T$ a rozptylem $\sigma^2 T$. Tedy

$$\ln S_T \sim N\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T;\, \sigma^2 T\right).$$

S_T má tedy ***lognormální rozdělení*** ($\ln S_T$ má normální rozdělení).

9.1 Black-Scholesova rovnice

V této podkapitole připomeneme odvození Black-Scholesovy rovnice. Budeme předpokládat existenci bezrizikového aktiva s úrokovou mírou r.

Vyjdeme z rovnice pro cenu akcie, která sleduje geometrický Wienerův proces

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW. \tag{9.1}$$

Nechť V je cena evropské call opce s danou realizační cenou K a časem expirace T. Zisk z takové opce v čase T je tedy $(S_T - K)_+$. V závisí na S a t a je tedy funkcí dvou proměnných $V(S, t)$. Hodnota $V(S, t)$ je cena opce v čase t v situaci, kdy cena akcie je rovna S.

Z Itôova lemmatu máme

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS)^2 .$$

Za dS dosadíme ze 9.1, tedy

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} (\mu S dt + \sigma S dW) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (\mu S dt + \sigma S dW)^2 .$$

Podle Itôova lemmatu $(dt)^2$ a $dtdW$ jsou členy vyššího řádu za které dosadíme nulu, zatímco $(dW)^2 = dt$. Dostáváme tedy

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S dW. \tag{9.2}$$

Vhodnou kombinací 9.1 a 9.2 můžeme sestavit portfolio z akcií a opcí, jehož výnos za čas dt je deterministický. Jinak řečeno, můžeme eliminovat stochastický člen dW.

Označme Π hodnotu portfolia složeného z 1 opce a $-\frac{\partial V}{\partial S}$ akcie, tedy

$$\Pi = -\frac{\partial V}{\partial S} S + 1V$$

Pro přírůstek hodnoty portfolia za čas dt máme:

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial V}{\partial S} \right) dS + 1df.$$

Po dosazení z 9.1 dostaneme

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial V}{\partial S}\mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt,$$

stochastický člen se vyruší.

$d\Pi$ se musí (z neexistence arbitráže) rovnat zisku z bezrizikového aktiva s úrokovou mírou r, tedy

$$d\Pi = r\Pi dt.$$

Dosazením dostaneme

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt = r \left(-\frac{\partial V}{\partial S} S + V \right) dt,$$

tedy

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial V}{\partial S} Sr = rV.$$

To je *Black-Scholesova parciální diferenciální rovnice.*

Po vhodných transformacích proměnných dostaneme rovnici vedení tepla (rovnici difuze)

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

Řešením společně s příslušnou podmínkou (známe hodnotu $V(T) = (S_T - K)_+$) dostaneme Black-Scholesův vzorec.

Kapitola 10

Black-Scholesův model

V této kapitole odvodíme Black-Scholesův vzorec za obecnějšího předpokladu než v minulé kapitole. Budeme uvažovat úrokovou míru měnící se v čase.

10.1 Předpoklady Black-Scholesova modelu

Předpokládejme, že na trhu existují dvě aktiva,

- bezrizikový dluhopis, jehož cena v čase t je B_t.
- riziková akcie, jejíž cena v čase t je S_t. S_0 je cena v současnosti, tedy známá hodnota.

Dluhopis má známou úrokovou míru r_t, kde r_t je deterministická funkce času. Tedy cena dluhopisu B_t v čase t splňuje

$$\frac{dB_t}{dt} = r_t B_t.$$

Řešením (separací proměnných) dostaneme:

$$\frac{dB_t}{B_t} = r_t dt.$$

Tedy $\ln B_t = \int r_t dt$ a

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right).$$

Cena podílu akcie se řídí stochastickou diferenciální rovnicí tvaru

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{10.1}$$

kde W_t je standardní Wienerův proces, μ_t je deterministická funkce času a $\sigma > 0$ je konstanta nazývaná volatilita akcie.

10.2 Rovnovážná pravděpodobnostní míra

Vyjdeme z předpokladu neexistence arbitráže.

Věta 10.2.1. *(**Základní věta arbitrážní teorie**): Pokud neexistuje na trhu arbitráž, potom existuje rovnovážná (risk-neutrální) pravděpodobnostní míra na prostoru tržních scénářů, vůči níž je proces diskontované ceny akcie martingal. Speciálně*

$$S_0^* = E\left(S_t^*\right),$$

kde S_t^* je diskontovaná cena v čase t.

Věta 10.2.2. *Nechť koeficient driftu μ_t je omezený. Pak stochastická diferenciální rovnice (10.1) má řešení*

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t + \int_0^t \mu_s ds\right).$$

Navíc, vzhledem k risk-neutrální míře musí platit $r_t = \mu_t$.

Důkaz: Použijeme Itôovu formuli na funkci

$$g(x,\, t) = \exp\left(\sigma x - \frac{\sigma^2}{2} t + \int_0^t \mu_s ds\right)$$

a podkladový proces $X = W$.

Pro $S = g(x,\, t)$ dostaneme

$$dS = \sigma S dW + \mu_t S dt.$$

Tedy S řeší rovnici (10.1).

Dále víme, že vzhledem k risk-neutrální míře diskontovaný proces ceny akcie musí být martingal. Diskontovací faktor je cena bezrizikového dluhopisu B_t, tedy

$$S_t^* = \frac{S_t}{B_t} = \frac{\exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t + \int_0^t \mu_s ds\right)}{\exp\left(\int_0^t r_s ds\right)} = \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t + \int_0^t (\mu_s - r_s)\, ds\right).$$

Dále, stejnou aplikací Itôova lemmatu dostaneme, že S_t^* splňuje stochastickou diferenciální rovnici

$$dS_t^* = \sigma S_t^* dW_t + S_t^* (\mu_t - r_t)\, dt.$$

Víme, že S_t^* je martingal právě tehdy, když koeficient u dt je identicky roven nule, tedy $r_t = \mu_t$ pro všechna t.

Důsledek 10.2.3. Vzhledem k rovnovážné pravděpodobnostní míře (tedy pro $r_t = \mu_t$) logaritmus diskontované ceny akcie S_t^* v čase t má normální rozdělení se střední hodnotou $\ln S_0 - \frac{\sigma^2}{2}t$ a rozptylem $\sigma^2 t$.

10.3 Odvození Black-Scholesova vzorce pro evropskou call opci

Evropská call opce na akcii s realizační cenou K a časem expirace T dává majiteli právo koupit v čase T akcii za cenu K. Tedy hodnota opce v čase T je

$$V_T = (S_T - K)_+ = \begin{cases} S_T - K \text{ pro } S_T \geq K \\ 0 \text{ pro } S_T < K \end{cases}$$

Zajímá nás současná cena opce V_0. Podle základní věty arbitrážní teorie plyne, že pokud na trhu neexistuje arbitráž, pak cena opce v čase $t = 0$ musí být rovna diskontovanému očekávání vzhledem k rovnovážné pravděpodobnostní míře její hodnoty v čase T. Podle předchozí věty tedy platí

$$V_0(S_0,\, K,\, T) = E_Q\left(S_T^* - \frac{K}{B_T}\right)_+,$$

kde $S_T^* = \frac{S_T}{B_T}$, B_T je cena dluhopisu v čase T a S_T^* má rozdělení podle důsledku předchozí věty vzhledem k risk neutrální míře Q.
Výpočtem očekávání dostaneme Black-Scholesův vzorec

$$V\left(S_0,\,K,\,T\right)=S_0\phi\left(z\right)-\frac{K}{B_T}\phi\left(z-\sigma\sqrt{T}\right),$$

kde

$$z=\frac{\ln\left(S_0\frac{B_T}{K}\right)+\sigma^2\frac{T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}$$

a ϕ je distribuční funkce normálního rozdělení:

$$\phi\left(z\right)=\textstyle\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Pro výpočet příslušného očekávání připomeňme že

$$V_0=E_Q\left(S_T^*-\frac{K}{B_T}\right)_+,$$

kde

$$S_T^*=\frac{S_T}{B_T}$$

a

$$\ln S_T^*\sim N\left(\ln S_0-\frac{\sigma^2}{2}T;\,\sigma^2t\right).$$

Jinak řečeno, $S_T^*=S_0e^X$, kde $X\sim N\left(-\frac{\sigma^2}{2}T;\,\sigma^2T\right)$.
Tedy

$$V_0=\int_{-\infty}^{\infty}\left(S_0e^x-\frac{K}{B_T}\right)_+\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2T}}e^{-\frac{\left(x+\frac{\sigma^2}{2}T\right)^2}{2\sigma^2T}}dx$$

Určíme skutečný obor integrace (kde je integrovaná funkce nenulová):

$$S_0e^x-\frac{K}{B_T}\geq 0\Longleftrightarrow e^x\geq\frac{K}{S_0B_T}\Rightarrow x\geq\ln\frac{K}{S_0B_T}.$$

Označme $M=\ln\frac{K}{S_0B_T}$. Pak

$$V_0=S_0\int_M^{\infty}e^x\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2T}}e^{-\frac{\left(x+\frac{\sigma^2}{2}T\right)^2}{2\sigma^2T}}dx-\frac{K}{B_T}\int_M^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2T}}e^{-\frac{\left(x+\frac{\sigma^2}{2}T\right)^2}{2\sigma^2T}}dx.$$

V prvním integrálu doplníme v exponentu na čtverec:

$$x-\frac{\left(x+\frac{\sigma^2}{2}T\right)^2}{2\sigma^2T}=\frac{2\sigma^2Tx-\left(x+\frac{\sigma^2}{2}T\right)^2}{2\sigma^2T}=$$

$$=\frac{2\sigma^2Tx-x^2-2x\frac{\sigma^2}{2}T-\left(\frac{\sigma^2T}{2}\right)^2}{2\sigma^2T}=-\frac{\left(x-\frac{\sigma^2T}{2}\right)^2}{2\sigma^2T}$$

a dostáváme:

$$V_0 = S_0 \int_M^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{\left(x-\frac{\sigma^2 T}{2}\right)^2}{2\sigma^2 T}} dx - \frac{K}{B_T} \int_M^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{\left(x+\frac{\sigma^2}{2}T\right)^2}{2\sigma^2 T}} dx =$$

$$= S_0 P\left(Z_1 \geq M\right) - \frac{K}{B_T} P\left(Z_2 \geq M\right),$$

kde

$$Z_1 \sim N\left(\frac{1}{2}\sigma^2 T;\, \sigma^2 T\right)$$

a

$$Z_2 \sim N\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T;\, \sigma^2 T\right).$$

Tedy celkem

$$V_0 = S_0 P\left(\frac{Z_1 - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \geq \frac{M - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \frac{K}{B_T} P\left(\frac{Z_2 + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \geq \frac{M + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

S využitím $1 - \phi\left(M\right) = \phi\left(-M\right)$ dostaneme:

$$V_0 = S_0 \phi\left(\frac{-M + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \frac{K}{B_T}\phi\left(\frac{-M - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right),$$

což už je Black-Scholesův vzorec.

Kapitola 11

Rovnice vedení tepla a Wienerův proces

11.1 Řešení rovnice vedení tepla na přímce

Budeme se zabývat rovnicí vedení tepla na přímce,

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$$

pro $x \in \mathbb{R}$ a $t \geq 0$, kde $u(x,t)$ je teplota v bodě x a čase t. Teplota v počátečním čase je známa, je daná počáteční podmínkou

$$u(x,0) = \psi(x).$$

Pro každé pevné $t > 0$ budeme uvažovat Fourierovu transformaci funkce u v proměnné x. Na jedné straně máme

$$\widehat{(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})}(\xi,t) = (i\xi)^2 \hat{u}(\xi,t),$$

na druhé straně t hraje při integraci v definici Fourierovy transformace roli parametru, tedy je

$$\widehat{(\frac{\partial u}{\partial t})}(\xi,t) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,t).$$

Transformovaná rovnice má tedy tvar

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi,t).$$

Pro pevné ξ je to obyčejná diferenciální rovnice v proměnné t, kterou umíme vyřešit,

$$\hat{u}(\xi, t) = Ce^{-\xi^2 t},$$

kde $C = \hat{u}(\xi, 0)$. Z počáteční podmínky tedy

$$C = \hat{\psi}(\xi).$$

Celkem

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{\psi}(\xi)e^{-\xi^2 t}.$$

Zpětnou transformací, podle pravidla o transformaci konvoluce dostaneme

$$u(x, t) = (\psi * G_t)(x, t),$$

kde $G_t(x)$ je zpětná transformace funkce $e^{-\xi^2 t}$. Tu najdeme ze znalosti transformace Gaussovy funkce a lemmatu o transformaci po změně měřítka, kde vezmeme $R = \frac{1}{\sqrt{2t}}$. Dostaneme tedy

$$G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

což je tzv. Gaussovo jádro. Řešení počáteční úlohy pro rovnici vedení tepla má tedy tvar

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \psi(y) dy.$$

11.2 Souvislost řešení rovnice vedení tepla a Wienerova procesu

Z definice Wienerova procesu víme, že

$$P\left\{W\left(t+s\right) = y \mid W\left(s\right) = x\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}.$$

Tato funkce je zároveň Gaussovo jádro pro modifikovanou rovnici vedení tepla (s konstantou $\frac{1}{2}$ před druhou derivací).

Věta 11.2.1. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. Pak jednoznačné řešení $u\left(t, x\right)$ počáteční úlohy pro rovnici vedení tepla:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

kde $u(t, x)$ je teplota v bodě x a čase t a

$$u(0, x) = f(x)$$

je počáteční podmínka, je rovno

$$u(t, x) = Ef(W_t^x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_t(x, y) f(y)\, dy,$$

kde $P_t(x, y)$ je Gaussovo jádro:

$$P_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$$

a W_t^x je Wienerův proces začínající v bodě x (místo nuly).

Důkaz: Stačí dokázat, že $P_t(x, y)$ řeší rovnici vedení tepla (*) pro každé y. To, že konvoluce s počáteční podmínkou (tedy vlastně lineární kombinace těchto řešení) je také řešení pak plyne derivováním integrálu podle parametru. Máme

$$\frac{\partial}{\partial t}(P_t(x, y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{2}\right)(t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} t^{-2}\left(-\frac{(x-y)^2}{2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(P_t(x, y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}\left(-\frac{x-y}{t}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(P_t(x, y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}\left(-\frac{x-y}{t}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}\left(-\frac{1}{t}\right)$$

Tedy

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(P_t(x, y)) = 2\frac{\partial}{\partial t}(P_t(x, y))$$

Splnění počáteční podmínky plyne okamžitě z definice funkce u.

11.3 Feynman-Kacova formule

Uvažujme parciální diferenciální rovnici:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x,\, t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,\, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

(tzv. zpětná Kolmogorova rovnice). s koncovou podmínkou

$$f(x,\, T) = \psi(x)\,,$$

kde μ, σ, ψ jsou dané funkce a T je pevně daný čas, $T > 0$.

Pro $\mu \equiv 0$ a $\sigma^2 \equiv 1$ dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

tedy zpětnou rovnici vedení tepla.

Věta 11.3.1. *(**Feynman-Kac**): Řešení je dáno očekáváním*

$$f(x,\, t) = E\left(\psi(X_T) \mid X_t = x\right),$$

kde X je Itôův proces daný rovnicí

$$dX = \mu(X,\, t)\, dt + \sigma(X,\, t)\, dW.$$

Důkaz: Nechť f je řešení parciální diferenciální rovnice. Použijeme Itôovo lemma na funkci $f(x,\, t)$ a podkladový proces X. Dostaneme

$$df(X,\, t) = \left(\mu(X,\, t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(X,\, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) dt + \sigma(X,\, t)\frac{\partial f}{\partial x} dW,$$

kde

$$\left(\mu(X,\, t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(X,\, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = 0,$$

neboť f řeší parciální diferenciální rovnici. Dále integrováním dostaneme

$$\int_t^T df = f(X_T,\, T) - f(X_t,\, t) = \int_t^T \sigma(X,\, t)\frac{\partial f}{\partial x} dW.$$

Vezmeme očekávání (za podmínky $X_t = x$). Víme, že

$$E\left(\int_t^T \sigma\left(X,\,t\right)\frac{\partial f}{\partial x}dW\right)=0$$

(základní vlastnost Itôova integrálu) Tedy ze vztahu

$$E\left(f\left(X_T,\,T\right)-f\left(X_t,\,t\right)\right)=0$$

máme

$$f\left(x,\,t\right)=E\left[f\left(X_t,\,t\right)\mid X_t=x\right]=E\left[f\left(X_T,\,T\right)\mid X_t=x\right]=E\left[\psi\left(X_T\right)\mid X_t=x\right],$$

což jsme chtěli dokázat.

Kapitola 12

Pravděpodobnostní rozdělení se silnými chvosty

V této kapitole se budeme věnovat distribucím se silnými chvosty. V Black-Scholesově modelu je předpoklad normality rozdělení zdůvodněn zejména centrální limitní větou.

Připomeňme, že Black-Scholesův model má tři základní předpoklady:

- lognormální rozdělení cen podkladového aktiva
- spojitost trajektorií cen aktiva
- nezávislost přírůstků cen za disjunktní časové intervaly

Na druhé straně, empirické výsledky ukazují odchylky od těchto předpokladů:

- silné chvosty pravděpodobnostních rozdělení
- skoky v cenách aktiv (při příchodu důležité informace, při přerušení obchodování, ...)
- krátkodobé korelace v pohybech cen (do cca 30 minut)

12.1 Charakterizace chvostů distribucí

Jedním ze způsobů jak kvantitativně sílu chvostu charakterizovat je pomocí existence nebo neexistence momentů. Připomeňme, že k-tý obecný moment je definován jako

$$m_k = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx, \tag{12.1}$$

kde $f(x)$ je hustota příslušné náhodné veličiny. Pokud m_k existuje, tedy integrál je konečný, pak musí platit

$$f(x) < \frac{1}{|x|^{n+1}} \tag{12.2}$$

pro $|x| \to \infty$.

Pravděpodobnostní rozdělení se řídí tzv. *mocninným zákonem*, jestliže platí

$$f(x) \approx \frac{A_\pm}{|x|^{n+1}} \tag{12.3}$$

pro $|x| \to \infty$ (tedy limita podílu obou stran je rovna jedné). V tom případě je zřejmě pro $k \geq n$

$$m_k = \infty. \tag{12.4}$$

Speciálně pro $n \leq 2$ distribuce nemá konečný rozptyl. Zřejmě musí vždy být $n > 0$, jinak by integrál z $f(x)$ divergoval.

12.2 Charakterizace pomocí funkce přežití

Připomeňme, že funkce přežití $S_X(x)$ náhodné veličiny X je definována jako pravděpodobnost, že X je větší než x, tedy

$$S_X(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x).$$

Pro relativní míru síly chvostu, řekneme že X_1 má lehčí chvost než X_2 pokud podíl funkcí přežití X_1 a X_2 diverguje do nekonečna, tedy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{S_{X_1}}{S_{X_2}} = \infty.$$

Pomocí L'Hospitalova pravidla můžeme vypočet limity redukovat na vztah pro hustoty náhodné veličiny,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{S_{X_1}}{S_{X_2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{S'_{X_1}}{S'_{X_2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-f_{X_1}}{-f_{X_2}}.$$

12.3 Charakterizace pomocí funkce rizika

Připomeňme, že funkce rizika (hazard rate function) $h_X(x)$ náhodné veličiny X je definována jako podíl hustoty a funkce přežití, tedy

$$h_X(x) = \frac{f(x)}{S(x)}.$$

Chování funkce rizika také úzce souvisí s chováním chvostů pravděpodobnostního rozdělení. Je-li funkce rizika pravděpodobnostního rozdělení rostoucí, má rozdělení lehké chvosty. Je-li klesající, pak má těžké chvosty.

Obecně samozřejmě nemusí být ani rostoucí ani klesající, ale pro standardní rozdělení používaná v praxi tomu tak bude.

Hraničním případem je exponenciální rozdělení, pro které je funkce rizika konstantní.

Příklad 12.3.1. Jako příklad uveďme Paretovo rozdělení s parametry a, b, tedy s hustotou

$$f(x) = ab^a(x+b)^{-a-1}.$$

Funkce přežití je rovna

$$S(x) = b^a(x+b)^{-a}.$$

Celkem tedy

$$h(x) = \frac{ab^a(x+b)^{-a-1}}{b^a(x+b)^{-a}} = \frac{a}{x+b},$$

což je zřejmě klesající funkce. Toto rozdělení má tedy těžké chvosty.

Analogicky je možné charakterizovat chování chvostů pomocí *funkce očekávané ztráty.* Ta je definovaná vztahem

$$e_X(y) = E(X - y|X > y).$$

Pokud je tato funkce klesající, má rozdělení těžký chvost, pokud je rostoucí, má lehký chvost.

12.4 Stabilní distribuce

Lévyho rozdělení je speciální případ mocninného zákona, které má navíc vlastnost stability. Objevuje se proto v obecné verzi centrální limitní věty. Používají se při popisu "víceúrovňových jevů", jako je velikost příjmu, amplituda zemětřesení, atd.

Označme $L_\mu(x)$ hustotu Lévyho rozdělení s parametrem μ, kde $\mu \in [1,2]$. Platí

$$L_\mu(x) \approx \frac{A_\pm^\mu}{|x|^{\mu+1}}, \tag{12.5}$$

kde $A_\pm^\mu$ jsou konstanty popisující přesnou sílu pravého a levého chvostu. Pokud platí

$$A_+^\mu = A_-^\mu, \tag{12.6}$$

pak mluvíme o symetrickém Lévyho rozdělení. Obecné Lévyho rozdělení pak charakterizuje ještě parametr asymetrie

$$\beta = \frac{A_+^\mu - A_-^\mu}{A_+^\mu + A_-^\mu}. \tag{12.7}$$

S výjimkou případu krajních hodnot a $\mu = \frac{3}{2}$ neexistuje pro hustotu analytické vyjádření. Jednoduchý popis ale existuje pro charakteristickou funkci.

Pro krajní hodnoty parametru dostaneme nejdříve pro $\mu = 1$ Cauchyho rozdělení s hustotou

$$L_1(x) = \frac{A}{x^2 + \pi^2 A^2}. \tag{12.8}$$

Pro charakteristickou funkci máme obecně následující popis,

$$\hat{L}_\mu(\xi) = \exp(-a_\mu |\xi|^\mu), \tag{12.9}$$

kde a_μ je konstanta úměrná konstantě A_μ. V limitě pro $\mu = 2$ dostaneme Gaussovo rozdělení, pro které

$$\hat{L}_2(\xi) = \exp(-c\xi^2). \tag{12.10}$$

Pokud součet n náhodných veličin se stejným rozdělením má opět totéž rozdělení, pak mluvíme o stabilní distribuci. Tato vlastnost je velmi silná a vzácná. Stabilními distribucemi jsou právě Lévyho distribuce (včetně limitního případu Gaussovy distribuce).

Lévyho distribuce má také vlastnost nekonečné dělitelnosti, jak uvidíme dále.

Kapitola 13

Lévyho procesy

13.1 Limitní rozdělení

V obecné verzi centrální limitní věty, bez předpokladu konečnosti rozptylu, hrají stabilní distribuce zcela analogickou roli jako Gaussovo rozdělení hraje v klasickém případě.

Stabilní distribuce, tedy Lévyho a Gaussova (jako limitní případ), jsou z definice pevnými body konvoluce. Pro jejich hustoty tedy platí, symbolicky zapsáno,

$$f \star f = f. \tag{13.1}$$

Navíc ale také fungují jako "atraktory" pro konvoluci. Libovolná distribuce při velkém počtu nezávislých sčítanců s tímto rozdělením konverguje ke stabilnímu rozdělení. To je obsah Centrální limitní věty.

Pro IID náhodné veličiny s konečným rozptylem platí standardní Centrální limitní věta, limitní distribucí je Gaussovo rozdělení.

Věta 13.1.1. *Nechť* X_i, $i = 1, 2, \dots,$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s hustotou pravděpodobnosti f, kde $\hat{f} \in C^2(\mathbb{R})$. Nechť $E(X_i) = 0$ a $E(X_i^2) = 1$. Pak hustota pravděpodobnosti

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$$

se blíží k hustotě standardizovaného normálního rozdělení, t.j.

$$Pr\{a \leq \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \leq b\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

pro $n \to \infty$.

Důležité při aplikaci této věty je mít na paměti, že chvosty součtu se mohou velmi lišit od chvostů normálního rozdělení. CLV dává aproximaci v *centrální* oblasti, o chování chvostů neříká nic. Chvosty konečného součtu jsou kvalitativně stále stejné jako pro jednotlivé sčítance.

Poznamenejme, že tato verze CLV platí v daleko větší obecnosti. Na místo nezávislosti stačí předpokládat že korelace X_i a X_j klesají dostatečně rychle pro $|i-j| \to \infty$. Podobně lze oslabit i předpoklad stejného rozdělení. Stačí, aby rozptyly jednotlivých X_i si byly "dostatečně podobné".

S vlastností atraktoru pro operaci konvoluce normálního rozdělení souvisí další významná vlastnost normálního rozdělení. Mezi všemi distribucemi s daným konečným rozptylem má normální rozdělení nejmenší Shannonovu informační entropii. Ta měří informační obsah daného pravděpodobnostního rozdělení, největší je pro konstantní náhodnou veličinu, kdy hodnotu známe s jistotou. Shannonova informační entropie je definována jako

$$I(f) = -\int f(x) \ln f(x) dx. \tag{13.2}$$

Minimalizace entropie těsně souvisí s tím že při sčítání náhodných veličin ztrácíme informaci. Z hodnoty součtu nemůžeme zjistit téměř nic o hodnotách jednotlivých sčítanců

Pokud uvažujeme posloupnost IID náhodných veličin s mocninným zákonem s parametrem $\mu < 2$, tedy s nekonečným rozptylem, pak limitní distribuce je Lévyho distribuce.

13.2 Lévyho procesy

V této kapitole se budeme zabývat širokou třídou procesů, které poskytují přirozené zobecnění Wienerova procesu. Jejich hlavní výhodou je fakt že dovolují do pravděpodobnostního popisu vývoje cen aktiv zahrnout skoky a také rozdělení se silnými chvosty. Obě tyto vlastnosti jsou klíčové pro věrohodnost modelu.

Definice 13.2.1. Adaptovaný stochastický proces X se nazývá *Lévyho proces,* jestliže platí:

1. $X_0 = 0$
2. X má přírůstky nezávislé na minulosti, tedy $X_t - X_s$ je nezávislé na hodnotách procesu do času s
3. X má stacionární přírůstky, tedy $X_t - X_s$ má stejné rozdělení jako X_{t-s}.
4. X je stochasticky spojitý, tedy pro každé ϵ a $t \geq 0$ platí

$$\lim_{h \to 0} P(|X_{t+h} - X_t| \geq \epsilon) = 0 \tag{13.3}$$

Věta 13.2.2. *Nechť X je Lévyho proces. Pak existuje jednoznačně určená funkce ψ tak, že*

$$\phi_{X_t}(\xi) = e^{t\psi(\xi)} \tag{13.4}$$

Funkce z předchozí věty se nazývá Lévyho exponent.

Definice 13.2.3. X je nekonečně dělitelná náhodná veličina, jestliže pro každé N existují stejně rozdělené nezávislé náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_N$ tak, že

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N.$$

S využitím charakteristické funkce můžeme otázku dělitelnosti převést na problém kdy je $(\psi_X)^{\frac{1}{N}}$ charakteristická funkce nějakého pravděpodobnostního rozdělení.

Věta 13.2.4. *Nechť X je Lévyho proces. Pak X_t je nekonečně dělitelné pro každé t a platí*

$$\phi_{X_t}(\xi) = (\phi_{X_{\frac{t}{n}}}(\xi))^n \tag{13.5}$$

Příklad 13.2.5. V případě Wienerova procesu je Lévyho exponent zřejmě roven

$$\phi_{X_t}(\xi) = e^{-t(\frac{\xi^2}{2})} \tag{13.6}$$

tedy

$$\psi(\xi) = -\frac{\xi^2}{2} \tag{13.7}$$

Pro Wienerův proces s driftem a a volatilitou b dostaneme

$$\psi(\xi) = -ia\xi - \frac{b^2\xi^2}{2} \tag{13.8}$$

13.3 Příklady

Příklad 13.3.1. Vypočtěte šikmost a špičatost stejnoměrného rozdělení na intervalu $(0, 1)$.

Příklad 13.3.2. Odvoďte horní odhad na hodnotu špičatosti pro libovolné pravděpodobnostní rozdělení.

Příklad 13.3.3. S využitím předchozích dvou úloh dokažte, že stejnoměrného rozdělení na intervalu $(0, 1)$ není dělitelné.

Příklad 13.3.4. Ukažte, že normální rozdělení je nekonečně dělitelné.

Příklad 13.3.5. Vypočtěte Shannonovu entropii normálního rozdělení a exponenciálního rozdělení (v obou případech s rozptylem rovným jedné). Porovnejte oba výsledky.

Příklad 13.3.6. Dokažte, že standardizované normální rozdělení minimalizuje Shannonovu entropii mezi všemi rozděleními s jednotkovým rozptylem a hladkou hustotou.

Kapitola 14

Bariérové opce

Nejjednodušší typ opce, kde výplata závisí na celém vývoji ceny akcie, nikoliv jenom na ceně akcie v době realizace je bariérová opce.
Máme čtyři základní typy bariérových opcí:

- ***up and in*** … opce je bezcenná, pokud hodnota akcie v čase $[0, T]$ nepřekročí hodnotu A.
- ***down and in*** … opce je bezcenná, pokud hodnota akcie v čase $[0, T]$ neklesne pod hodnotu a.
- ***up and out*** … opce je bezcenná, pokud hodnota akcie v čase $[0, T]$ překročí hodnotu A.
- ***down and out*** … opce je bezcenná, pokud hodnota akcie v čase $[0, T]$ klesne pod hodnotu a.

14.1 Binární bariérové opce

Uvažujme pro konkrétnost opci typu up and in.
Výplatní funkce nabývá pouze dvou hodnot.

$$V_T = 1\left\{\max_{t\in[0,\,T]} S_t \geq A\right\} = \begin{cases} 1 \text{ pokud } \max_{t\in[0,\,T]} S_t \geq A \\ 0 \text{ jinak.} \end{cases}$$

Převedením na Wienerův proces bez driftu (pomocí Cameron-Martinovy věty) a použitím principu reflexe, vypočteme pravděpodobnost, že $\max W(t) \geq A$, kde A je aktivující bariéra, S_t je cena akcie v čase t.

Předpoklady jsou jako u Black-Scholesova modelu pro evropskou call opci s konstantní úrokovou mírou. Máme dvě aktiva, bezrizikový dluhopis, jehož cena v čase t je B_t a rizikovou akcii, jejíž cena v čase t je S_t a cena v čase 0 je S_0, což je známá hodnota.

Dluhopis má konstantní úrokovou míru r, tedy

$$\frac{dB_t}{dt} = rB_t \Rightarrow B_t = B_0 e^{rt}.$$

Při odvozování Black-Scholesova vzorce jsme dokázali že

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)\right)$$

vůči risk-neutrální míře P.

Pro jednoduchost předpokládejme, že $S_0 = 1$ a $\sigma = 1$. Toho lze docílit vhodnou volbou jednotek času a peněz. Tedy

$$S_t = \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\right) t + W(t)\right).$$

Hodnota opce v čase $t = 0$ je rovna diskontované očekávané hodnotě v čase T vůči míře P, tedy

$$V_0 = e^{-rt} E_P(V_t) = e^{-rt}\left[0P\left(max_{0\le t\le T} S_t < A\right) + 1P\left(max_{0\le t\le T} S_t \ge A\right)\right] =$$

$$= e^{-rt} P\left(max_{0\le t\le T}\left[\exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\right) t + W(t)\right)\right] \ge A\right) =$$

$$= e^{-rt} P\left(max_{0\le t\le T}\left[\left(r - \frac{1}{2}\right) t + W(t)\right] \ge \alpha\right),$$

kde $\alpha = \ln A$. Označme

$$\widetilde{W}(t) = \left(r - \frac{1}{2}\right) t + W(t) = \gamma t + W(t)$$

Wienerův proces s driftem, kde $\gamma = r - \frac{1}{2}$. Pomocí Cameron-Martinovy věty najdeme pravděpodobnostní míru Q, vůči níž je $\widetilde{W}(t)$ standardní Wienerův proces. Podle Cameron-Martinovy věty máme pro Q:

$$\frac{dP}{dQ} = \exp\left(\gamma W(T) + \frac{1}{2}\gamma^2 T\right).$$

Vůči Q je $\widetilde{W}$ standardní Wienerův proces, tedy $\widetilde{W}$ vůči Q se chová stejně jako W vůči P. Odtud dostáváme:

$$V_0 = e^{-rt} P \left(max_{0 \le t \le T} \left[\gamma t + W\left(t\right) \right] \ge \alpha \right) =$$
$$= e^{-rt} E_P \left[1 \left\{ 0 \le t \le T \max \widetilde{W}\left(t\right) \ge \alpha \right\} \right] =$$
$$= e^{-rt} E_Q \left[\exp \left(\gamma W\left(T\right) + \frac{1}{2} \gamma^2 T \right) 1 \left\{ max_{0 \le t \le T} \widetilde{W}\left(t\right) \ge \alpha \right\} \right] =$$
$$= e^{-rt} E_Q \left[\exp \left(\gamma \left(\widetilde{W}\left(T\right) - \gamma T \right) + \frac{1}{2} \gamma^2 T \right) 1 \left\{ max_{0 \le t \le T} \widetilde{W}\left(t\right) \ge \alpha \right\} \right] =$$
$$= e^{-rt} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 T} E_Q \left[\exp \left(\gamma \widetilde{W}\left(T\right) \right) 1 \left\{ 0 \le t \le T \max \widetilde{W}\left(t\right) \ge \alpha \right\} \right] =$$
$$= e^{-rt} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 T} E_P \left[\exp \left(\gamma W\left(T\right) \right) 1 \left\{ max_{0 \le t \le T} W\left(t\right) \ge \alpha \right\} \right].$$

Očekávání obsahuje pouze funkci standardního Wienerova procesu, můžeme tedy sestavit integrál popisující toto očekávání. Je-li $max_{0 \le t \le T} W\left(t\right) < \alpha$, je očekávání nulové.
Zaměřme se tedy pouze na případ

$$max_{0 \le t \le T} W\left(t\right) \ge \alpha.$$

Je-li $W\left(T\right) \ge \alpha$, pak

$$max_{0 \le t \le T} W\left(t\right) \ge \alpha$$

s jistotou. Pravděpodobnostní rozdělení $W\left(T\right)$ je $N\left(0, T\right)$, a tedy očekávání v tomto případě je rovno (substituce $y = x - \alpha, x = y + \alpha, dx = dy$)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_\alpha^\infty e^{\gamma x} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx == \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_0^\infty e^{\gamma(y+\alpha)} e^{-\frac{(y+\alpha)^2}{2T}} dy =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{\gamma \alpha} \int_0^\infty e^{\gamma y} e^{-\frac{(y+\alpha)^2}{2T}} dy.$$

Ve druhém případě, pokud $W\left(t\right) < \alpha$, víme z principu reflexe, že pokud

$$max_{0 \le t \le T} W\left(t\right) \ge \alpha,$$

pak $W\left(T\right)$ má symetrické rozdělení okolo α. Tedy, je-li $p\left(x\right)$ hustota $W\left(T\right)$, pak platí

$$p\left(x\right) = p\left(2\alpha - x\right)$$

pro každé x. Tedy pokud $W(t) < \alpha$, má $e^{\gamma W(T)}$očekávání (substituce $y = x - \alpha, x = y + \alpha, dx = dy$)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{\gamma x} e^{-\frac{(2\alpha - x)^2}{2T}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{0} e^{\gamma(y+\alpha)} e^{-\frac{(-y+\alpha)^2}{2T}} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{\gamma\alpha}\int_{-\infty}^{0} e^{\gamma y} e^{-\frac{(-y+\alpha)^2}{2T}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{\gamma\alpha}\int_{0}^{\infty} e^{-\gamma z} e^{-\frac{(z+\alpha)^2}{2T}} dz.$$

Celkem tedy máme:

$$E_P\left[e^{\gamma W(T)} 1\left\{max_{0\leq t\leq T} W(t) \geq \alpha\right\}\right] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{\gamma\alpha} \int \left(e^{-\gamma x} + e^{\gamma x}\right) e^{-\frac{(x+\alpha)^2}{2T}} dx.$$

Doplněním na čtverec dostaneme:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{\gamma\alpha}\int_{0}^{\infty} \left(e^{-\gamma x} + e^{\gamma x}\right) e^{-\frac{(x+\alpha)^2}{2T}} dx =$$
$$= e^{\gamma\alpha} e^{\frac{\gamma^2 T}{2}} \left[e^{\gamma\alpha}\phi\left(\frac{-\gamma T - \alpha}{\sqrt{T}}\right) + e^{-\gamma\alpha}\phi\left(\frac{\gamma T - \alpha}{\sqrt{T}}\right)\right],$$

kde ϕ je distribuční funkce standardního normálního rozdělení $N(0,\ 1)$. Dále,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{\gamma\alpha}\int_{0}^{\infty} \left(e^{-\gamma x} + e^{\gamma x}\right) e^{-\frac{(x+\alpha)^2}{2T}} dx$$

Nejprve doplníme na čtverec exponent prvního integrálu po roznásobení:

$$-\gamma x - \frac{(x+\alpha)^2}{2T} = \frac{-2T\gamma x - (x^2 + 2x\alpha + \alpha^2)}{2T} =$$
$$= -\frac{x^2 + (2\alpha + 2T\gamma)x + \alpha^2}{2T} = -\frac{(x + \alpha + T\gamma)^2 - 2\alpha T\gamma - T\gamma^2}{2T}$$

Dostáváme tedy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{\gamma\alpha}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x+\alpha+T\gamma)^2}{2T}} e^{\alpha\gamma} e^{\frac{T\gamma^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{2\gamma\alpha} e^{\frac{T\gamma^2}{2}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x+\alpha+T\gamma)^2}{2T}} dx =$$

$$= e^{2\gamma\alpha} e^{\frac{T\gamma^2}{2}} P(Z_1 \geq 0),$$

kde $Z_1 \sim N(-\alpha - T\gamma;\ T)$. Dále,

$$P\left(Z_1 \geq 0\right) = P\left(\frac{Z_1 + \alpha + T\gamma}{\sqrt{T}} \geq \frac{\alpha + T\gamma}{\sqrt{T}}\right) =$$
$$1 - \phi\left(\frac{\alpha + T\gamma}{\sqrt{T}}\right) = \phi\left(\frac{-\alpha - T\gamma}{\sqrt{T}}\right)$$

Celkem
$$e^{2\gamma\alpha} e^{\frac{T\gamma^2}{2}} \phi\left(\frac{-\alpha - T\gamma}{\sqrt{T}}\right).$$

Analogicky postupujeme pro druhý integrál. Nejprve doplníme na čtverec exponent druhého integrálu:

$$\gamma x - \frac{(x+\alpha)^2}{2T} = \frac{2T\gamma x - (x^2 + 2x\alpha + \alpha^2)}{2T} =$$
$$= -\frac{x^2 + (2\alpha - 2T\gamma)x + \alpha^2}{2T} = -\frac{(x + \alpha - T\gamma)^2 + 2\alpha T\gamma - T\gamma^2}{2T}.$$

Dostáváme tedy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{\gamma\alpha} \int_0^\infty e^{-\frac{(x+\alpha-T\gamma)^2}{2T}} e^{-\alpha\gamma} e^{\frac{T\gamma^2}{2}} dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{\frac{T\gamma^2}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x+\alpha-T\gamma)^2}{2T}} dx = e^{\frac{T\gamma^2}{2}} P\left(Z_2 \geq 0\right),$$

kde $Z_2 \sim N\left(-\alpha + T\gamma; T\right)$. Dále,

$$P\left(Z_2 \geq 0\right) = P\left(\frac{Z_2 + \alpha - T\gamma}{\sqrt{T}} \geq \frac{\alpha - T\gamma}{\sqrt{T}}\right) =$$
$$1 - \phi\left(\frac{\alpha - T\gamma}{\sqrt{T}}\right) = \phi\left(\frac{-\alpha + T\gamma}{\sqrt{T}}\right)$$

Celkem dostaneme
$$e^{\frac{T\gamma^2}{2}} \phi\left(\frac{T\gamma - \alpha}{\sqrt{T}}\right).$$

Tedy

$$e^{\frac{T\gamma^2}{2}} \left[e^{2\gamma\alpha} \phi\left(\frac{-\alpha - T\gamma}{\sqrt{T}}\right) + \phi\left(\frac{T\gamma - \alpha}{\sqrt{T}}\right)\right] =$$
$$e^{\frac{T\gamma^2}{2}} e^{\alpha\gamma} \left[e^{\gamma\alpha} \phi\left(\frac{-\alpha - T\gamma}{\sqrt{T}}\right) + e^{-\gamma\alpha} \phi\left(\frac{T\gamma - \alpha}{\sqrt{T}}\right)\right]$$

Tedy hodnota opce v čase $t = 0$ je rovna
$V_0 = e^{-rt} P\left(max_{0 \leq t \leq T} S_t \geq A\right) = e^{-rt} e^{\gamma\alpha} \left[e^{\gamma\alpha} \phi \left(\frac{-\gamma T - \alpha}{\sqrt{T}} \right) + e^{-\gamma\alpha} \phi \left(\frac{\gamma T - \alpha}{\sqrt{T}} \right) \right].$

Literatura

[1] Grimmett G., Stirzaker D.: *Probability and Random Processes,* Oxford University Press 2001

[2] Ross S.: *Stochastic Processes,* Wiley 1996

[3] Strauss, W.: *Partial Differential Equations,* Wiley 1992

[4] Körner T.: *Fourier Analysis,* Oxford University Press 2004

[5] Hull J. C.: *Options, Futures and Other Derivatives,* Prentice Hall 2012

[6] Melicherčík I., Olšarová L., Úradníček V.: *Kapitoly z finančnej matematiky,* EPOS Bratislava 2005

[7] Bouchaud P., Potters, M.: *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing: From Statistical Physics to Risk Management*, Cambridge University Press 2003

[8] Willmott P., Howison S., Dewynne, J.: *The Mathematics of Financial derivatives, A Student Introduction*, Cambridge University Press 1996

[9] Klugman S., Panjer H., Willmot G.: *Loss Models: From Data to Decisions*, Wiley 2006

[10] Ševčovič D., Stehlíková B., Mikula K.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov,* Slovenská technická univerzita 2009

[11] Etheridge A.: *A Course in Financial Calculus,* Cambridge University Press 2002

[12] Baxter M., Rennie A.: *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing,* Cambridge University Press 1996

[13] Wilmott P.: *Paul Wilmott on Quantitative Finance, 3 Volume Set,* Wiley 2006

[14] Wilmott P.: *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance,* Wiley 2007