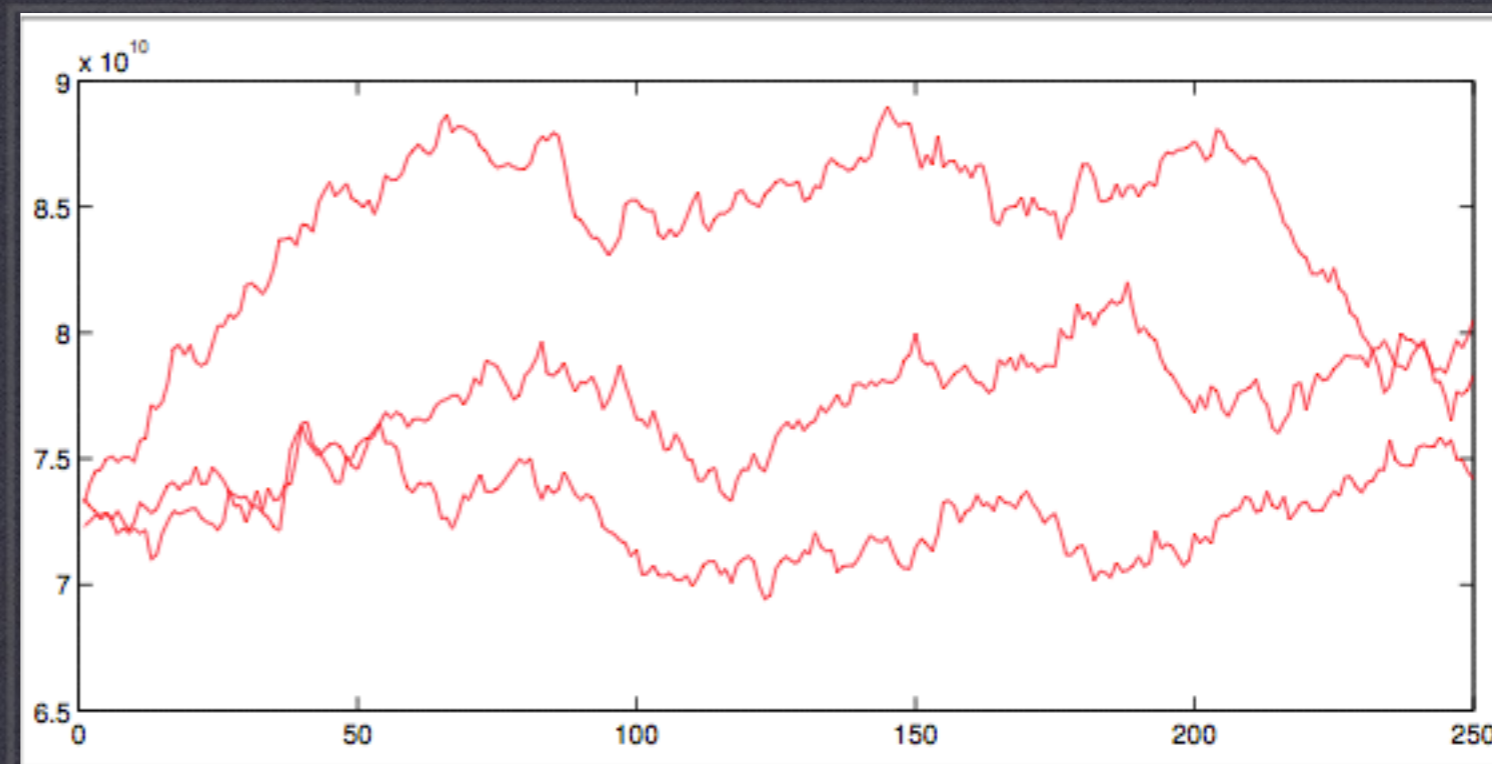


# GEOMETRICKÝ BROWNOV POHYB

BLAHOVSKÝ LUKÁŠ



# Osnova

- \* Geometrický Brownov pohyb
- \* Aplikácia GBP v praxi (UniCredit Bank ČR)

# **GEOMETRICKÝ BROWNOV POHYB - TEÓRIA**

# Brownov pohyb

- \* predpokladáme znalosť náhodnej prechádzky a Brownovho pohybu
- \* ceny aktív sa na finančných trhoch chovajú náhodne a nezávislo na predchádzajúcom vývoji
- \* Brownov pohyb - ideálny nástroj opisujúci toto náh. chovanie
- \* nevýhoda - môže nadobudnúť aj záporne hodnoty
- \* preto sa vo finančných a ekonomických modeloch používajú zväčša jeho modifikácie

# Geometrický Brownov pohyb

- \* modelovanie cien akcií a komodít
- \* Nech  $\Delta t$  je určitý časový úsek,  $S(t)$  a  $S(t + \Delta t)$  sú ceny akcií v danom čase (v súčasnom čase  $t$  a v budúcom čase  $t + \Delta t$ ), a  $B(t)$  je prírastok Brownovho pohybu za čas  $\Delta t$ . Model pre vývoj cien akcií v diskretnom čase má tvar:

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)} = \mu \Delta t + \sigma \Delta B(t)$$

kde  $\mu$  a  $\sigma$  sú konštanty.

- \* GBP vieme vyjadriť aj pomocou tzv. stochastickej diferenciálnej rovnice

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dB(t)$$

- \* Položme  $u = \ln S$ . Z Itôovej lemy dostávame:

$$du = \left( \mu S \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 \right) dt + \sigma S \frac{\partial u}{\partial S} dB(t)$$

- \* Na vyjadrenie  $du$  budeme potrebovať parciálne derivácie funkcie  $u$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial S} &= \frac{1}{S} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} &= -\frac{1}{S^2} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

- \* Dosadením parciálnych derivácií do  $du$  dostávame

$$du = \left( \mu S \frac{1}{S} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{S^2} \right) S^2 \sigma^2 \right) dt + \sigma S \frac{1}{S} dB(t)$$

- \* Zjednodušením dostávame vzťah vyplývajúci z  $du$

$$du = d(\ln(S)) = \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dB(t)$$

- \* Dopracovávame sa k cene  $S$  v čase  $T$ .

$$\begin{aligned} \ln(S(T)) - \ln(S(0)) &= \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma B(T) \\ \ln \frac{S(T)}{S(0)} &= \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma B(T) \end{aligned}$$

- \* Teda  $\ln[S(T)/S(0)]$  má normálne rozdelenie s parametrami

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \ln \left[ \frac{S(T)}{S(0)} \right] \right\} &= \mathbb{E} \left[ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma B(T) \right] = \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \\ \mathbb{D} \left\{ \ln \left[ \frac{S(T)}{S(0)} \right] \right\} &= \mathbb{D} \left[ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma B(T) \right] = \sigma^2 T \end{aligned}$$

aj stredná hodnota, aj rozptyl rastú lineárne v čase.

- \* Konečnou úpravou dostávame finálny tvar pre  $S(T)$ :

$$S(T) = S(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma B(T)}$$

- \* Môžeme vidieť, že vďaka exponenciále, nebudeme nadobúdať záporné hodnoty ako tomu je pri štandardnom Brownovom pohybe.



# Historický odhad parametrov

- \*  $\Delta t = 1/250$
- \* Ďalej predpokladáme, že výnosy  $v_i$  majú normálne rozdelenie. Platí

$$v_i = \ln \left( \frac{S(t)}{S(t - \Delta t)} \right)$$
$$v_i \sim N\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t, \sigma\Delta t\right)$$
$$\mathbb{E}(v_i) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t\right)$$
$$\mathbb{D}(v_i) = (\sigma\Delta t)$$

- \* Parametre geometrického Brownovho pohybu drift a volatilitu teda odhadujeme pomocou aritmetického priemeru a rozptylu.

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i$$
$$s_v^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{s_v^2}{\Delta t}}$$
$$\mu = \frac{\bar{v}}{\Delta t}$$

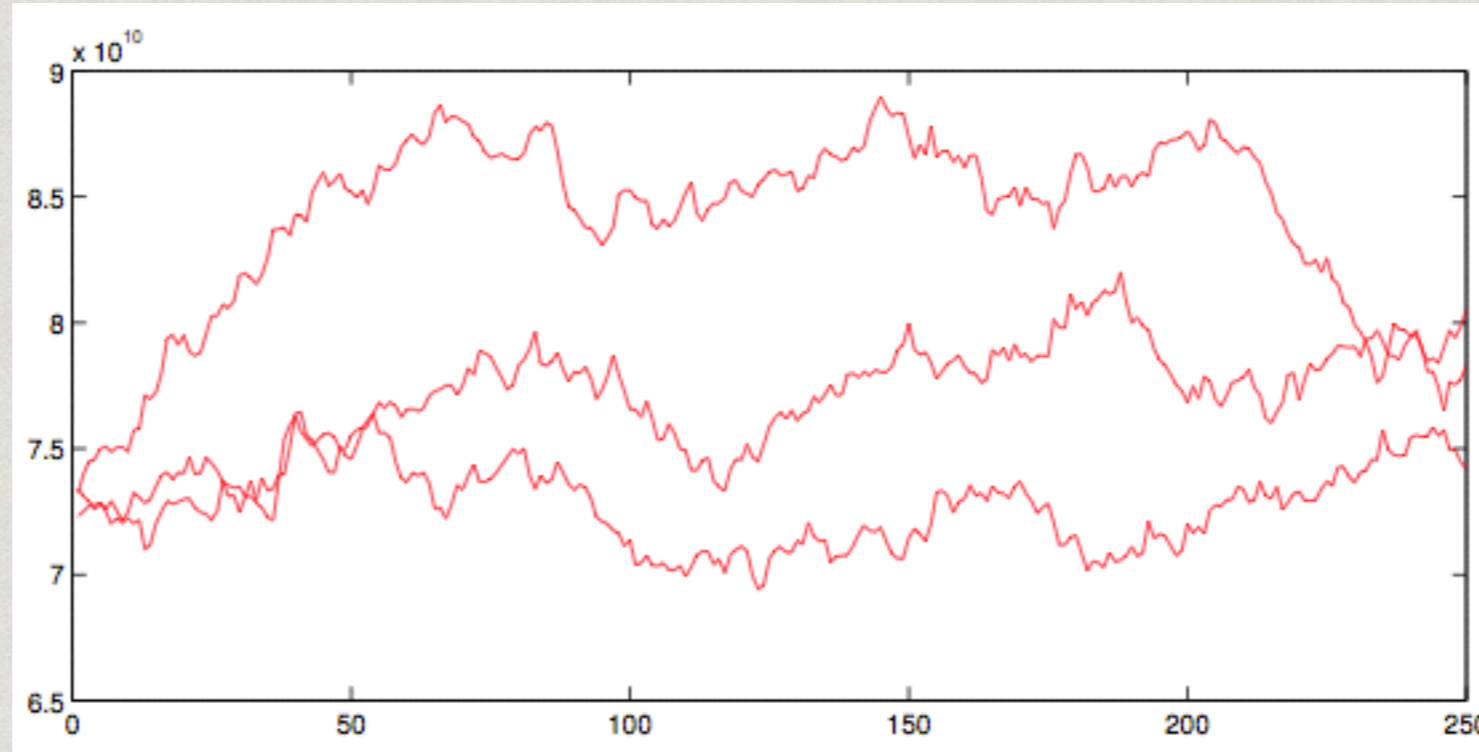
# POUŽITIE V PRAXI

# UniCredit Bank ČR

UniCredit Bank používa geometrický Brownov pohyb pre modelovanie štruktúálnej likvidity. Použitie tohoto modelu je špecifické pre depozitá, ktoré nemajú pevnú splatnosť, ako sú napríklad bežné účty. Ak by tieto depozitá nemodelovali, museli by byť vykázane ako Overnight depozitum. Je však jasné, že aj tieto depozitá financujú úvery so splatnosťou vyššou ako je samotný Overnight. Takže potrebujú u týchto depozít vysledovať ich stabilitu v banke, respektíve určiť ich potencionálny odliv na určitej hladine pravdepodobnosti.

# GBP v základnom tvare

- \* tri realizácie geometrického Brownovho pohybu



# GBP použitý v praxi

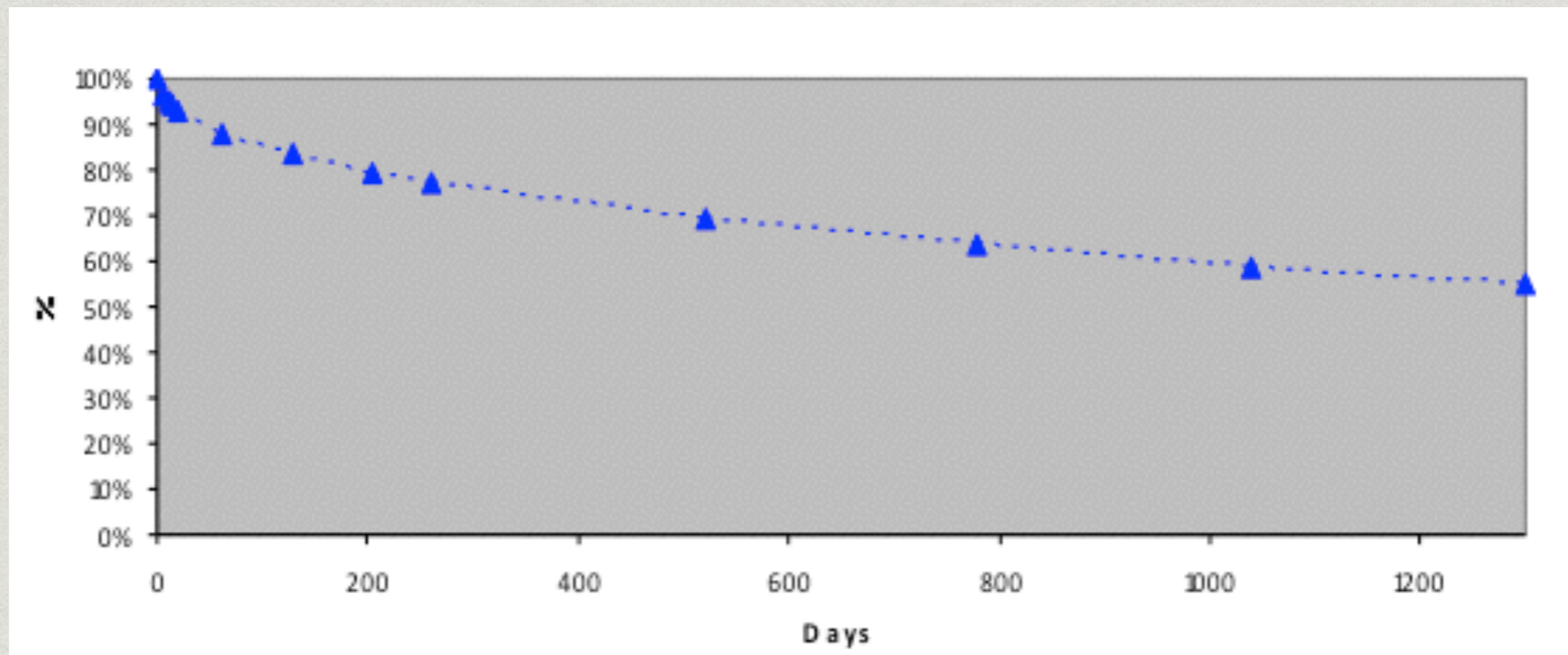
- \* pre kalkuláciu odlivu je použitá rovnica:

$$Z(T) = Z_0 * \exp(-\alpha * \sigma * \sqrt{T} - 0,5 * T * \sigma^2)$$

- \* T značí počet dní
- \* Sigma značí volatilitu
- \* Alfa značí hladinu pravdepodobnosti (nepočítajú drift)

| obdobia | Date     | COR            | RET            | COR                   | RET    | Alfa  | parametre celej rady |         |
|---------|----------|----------------|----------------|-----------------------|--------|-------|----------------------|---------|
| 1       | 02.01.08 | 61 832 601 431 | 76 411 743 978 | Volatilita log. zmien |        | 0%    | mi                   | -0,0229 |
| 2       | 03.01.08 | 61 981 275 658 | 75 966 203 039 | 0,24%                 | -0,58% | 0,11% | sigma                | 0,416   |
| 3       | 04.01.08 | 62 425 099 296 | 76 518 929 739 | 0,71%                 | 0,72%  | 0,22% |                      |         |
| 4       | 07.01.08 | 61 616 874 835 | 76 744 950 310 | -1,30%                | 0,29%  | 0,33% |                      |         |
| 5       | 08.01.08 | 62 702 835 413 | 76 025 679 169 | 1,75%                 | -0,94% | 0,44% |                      |         |
| 6       | 09.01.08 | 62 488 940 956 | 75 963 503 118 | -0,34%                | -0,08% | 0,55% |                      |         |
| 7       | 10.01.08 | 61 166 877 278 | 76 064 180 479 | -2,14%                | 0,13%  | 0,66% |                      |         |
| 8       | 11.01.08 | 61 101 807 429 | 75 877 400 773 | -0,11%                | -0,25% | 0,77% |                      |         |
| 9       | 14.01.08 | 58 939 714 712 | 75 947 903 235 | -3,60%                | 0,09%  | 0,88% |                      |         |
| 10      | 15.01.08 | 60 082 324 794 | 76 322 628 045 | 1,92%                 | 0,49%  | 0,99% |                      |         |
| 11      | 16.01.08 | 60 802 892 111 | 76 510 950 325 | 1,19%                 | 0,25%  | 1,10% |                      |         |
| 12      | 17.01.08 | 61 818 337 852 | 76 410 447 643 | 1,66%                 | -0,13% | 1,20% |                      |         |
| 13      | 18.01.08 | 61 184 925 531 | 75 671 727 453 | -1,03%                | -0,97% | 1,31% |                      |         |
| 14      | 21.01.08 | 64 025 025 439 | 75 898 556 835 | 4,54%                 | 0,30%  | 1,42% |                      |         |
| 15      | 22.01.08 | 66 241 305 757 | 76 280 488 028 | 3,40%                 | 0,50%  | 1,53% |                      |         |
| 16      | 23.01.08 | 66 409 718 547 | 76 552 496 817 | 0,25%                 | 0,36%  | 1,64% |                      |         |
| 17      | 24.01.08 | 65 141 725 112 | 76 544 899 763 | -1,93%                | -0,01% | 1,75% |                      |         |
| 18      | 25.01.08 | 63 820 293 310 | 75 733 392 945 | -2,05%                | -1,07% | 1,86% |                      |         |
| 19      | 28.01.08 | 67 225 166 839 | 76 314 271 062 | 5,20%                 | 0,76%  | 1,97% |                      |         |
| 20      | 29.01.08 | 64 023 719 693 | 76 424 669 588 | -4,88%                | 0,14%  | 2,08% |                      |         |
| 21      | 30.01.08 | 62 760 230 991 | 76 823 700 386 | -1,99%                | 0,52%  | 2,19% |                      |         |
| 22      | 31.01.08 | 62 434 770 427 | 77 166 947 235 | -0,52%                | 0,45%  | 2,30% |                      |         |

# Výsledný graf



**ĎAKUJEM ZA POZORNOST**



# Literatúra

- \* ROSS, Sheldon M., *Stochastic Processes*, 2nd ed., California: John Wiley & Sons, Inc., 1996. ISBN 0-471-12062-6.
- \* Bakalárska práca, *Geometrický Wienerov Proces*, Prírodovedecká fakulta MUNI
- \* Jiří Houška (Head of Assets and Liabilities Management UniCredit Bank Czech Republic), *Likviditní riziko*, Prezentácia pre Mendelovu Univerzitu v Brne – december 2011