

# 10. Neparametrické testy



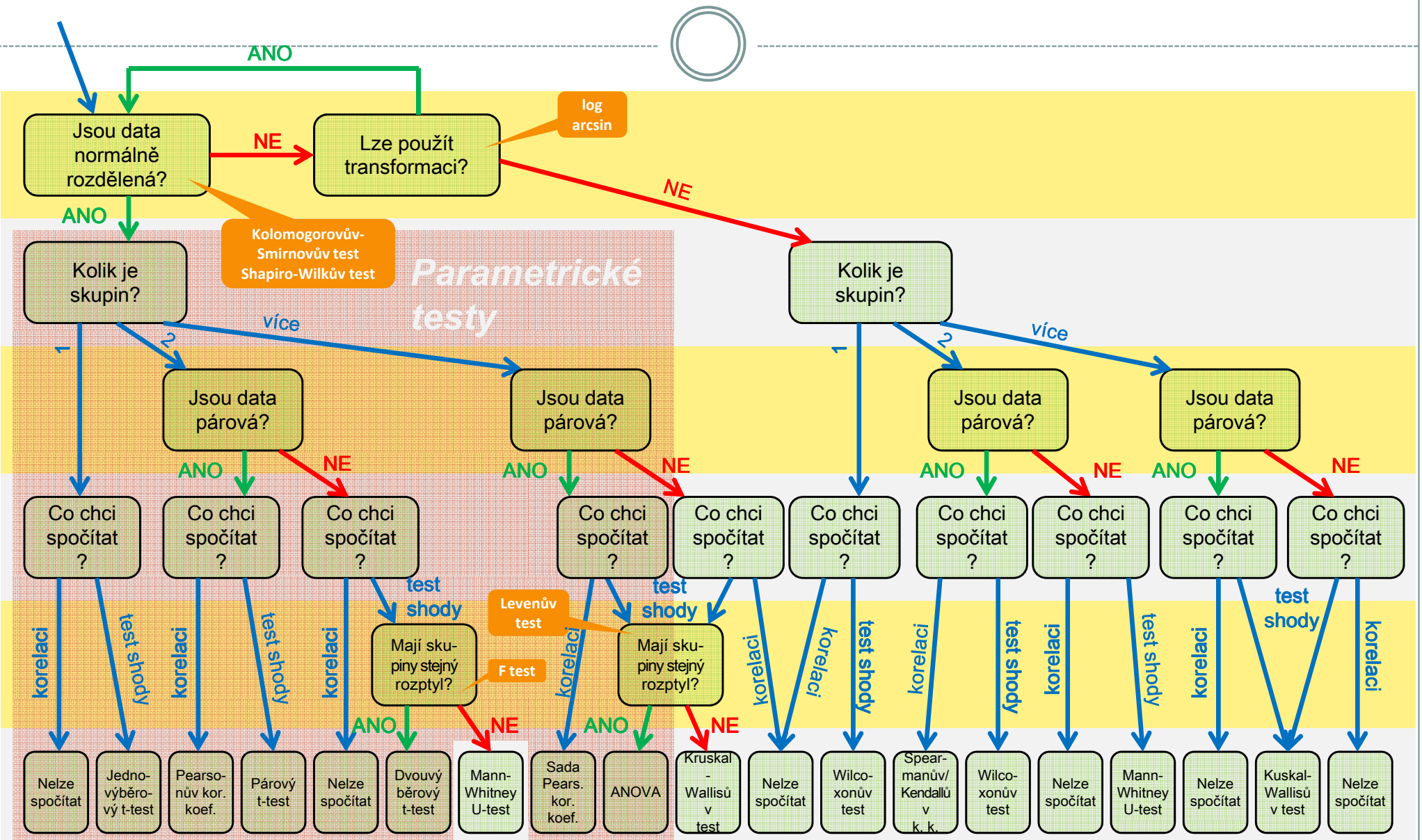
**Mann-Whitney U-test**  
**Wilcoxonův test**  
**Znaménkový test**

# Shrnutí statistických testů



| Typ srovnání                      | Nulová hypotéza                                                       | Parametrický test                                                        | Neparametrický test                            |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| 1 skupina dat vs. etalon          | Střední hodnota je rovna hodnotě etalonu.                             | jednovýběrový t-test                                                     | Wilcoxonův test;<br>znaménkový test            |
| 2 skupiny dat nepárově            | Obě skupiny hodnot pochází ze stejného rozdělení.                     | nepárový t-test                                                          | Mann-Whitneyův test                            |
| 2 skupiny dat párově              | Zkoumaný efekt mezi páry hodnot je nulový.                            | Párový t-test                                                            | Wilcoxonův test;<br>znaménkový test            |
| shoda rozdělení                   | rozdělení dat ve skupině odpovídá teoretickému (vybranému) rozdělení. | Shapiro-Wilkův test;<br>Kolmogorovův-Smirnovův test;<br>Lilieforsův test | $\chi^2$ test,<br>test dobré shody             |
| homoskedasticita (shoda rozptylů) | rozptyl obou (všech) skupin je shodný.                                | Levenův test                                                             |                                                |
| více skupin nepárově              | Zkoumaný efekt mezi skupinami hodnot je nulový.                       | ANOVA                                                                    | Kruskal-Wallisův test                          |
| korelace                          | Neexistuje (příčinná, důsledková) vazba mezi skupinami hodnot.        | Pearsonův koeficient                                                     | Spearmanův koeficient;<br>Kendallův koeficient |

# Shrnutí statistických testů



# Mann-Whitneyův U test



**Neparametrická** varianta t-testu se skoro stejnou silou v případě normálně rozdělených dat. Vždy pro dvě skupiny naměřených hodnot.

**Předpoklad:** **Pravděpodobnost že  $X > Y$  = pravděpodobnosti, že  $Y > X$ .**



**Vypočtená U statistika má přibližně normální rozdělení (pro malé počty jsou hodnoty tabelovány zvlášť).**

**Postup:**

Hodnoty z obou sad měření se seřadí podle velikosti.

Počítá se U statistika pro první nebo druhou sadu (obvykle pro tu s nižšími hodnotami)

$U_1$  je součet počtů hodnot ze sady 2 nižších než jednotlivé prvky sady 1 (postupně se sčítá pro všechny prvky ze sady 1).

Alternativní výpočet:

$$U_1 = R_1 - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2}$$

$R_1$  je součet pořadí skupiny 1.

# Mann-Whitneyův U test



Provede se normalizace:

$$z = \frac{U - m_U}{\sigma_U} \quad m_U = \frac{n_1 n_2}{2} \quad \sigma_U = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$$

$z$  je normalizovaná statistika

$m_U$  je průměr statistiky  $U$

$\sigma_U$  je směrodatná odchylka statistiky  $U$

Vypočtená statistika  $z$  se porovná s tabelovanými hodnotami normálního rozdělení resp. pro nižší počty s tabelovanými hodnotami pro Mann-Whitneyův  $U$  test.

# Neparametrická obdoba párového t-testu



## Wilcoxon test

- Jsou vytvořeny difference mezi soubory, je vytvořeno jejich pořadí bez ohledu na znaménko a poté je sečteno pořadí kladných a pořadí záporných rozdílů. Menší z těchto dvou hodnot je srovnána s kritickou hodnotou testu a pokud je menší než kritická hodnota testu, pak zamítáme hypotézu shody obou souborů hodnot. Pro test existuje aproximace na normální rozložení, ale pouze pro velká  $n > 25$ .

$$t = \frac{\text{Menší\_suma\_diferencí} - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$$

| Před zásahem | Po zásahu | Změna | Absolutní pořadí |
|--------------|-----------|-------|------------------|
| 6            | 2         | 4     | 10               |
| 2,5          | 3         | -0,5  | 1,5              |
| 6,3          | 5         | 1,3   | 6                |
| 8,1          | 9         | -0,9  | 5                |
| 1,5          | 2         | -0,5  | 1,5              |
| 3,4          | 4         | -0,6  | 3                |
| 2,5          | 1         | 1,5   | 8                |
| 1,11         | 2         | 0,89  | 4                |
| 2,6          | 4         | -1,4  | 7                |
| 1            | 3         | -2    | 9                |

# Wilcoxonův test – příklad I

| člověk | A   | B   | diference | pořadí |
|--------|-----|-----|-----------|--------|
| 1      | 142 | 138 | 4         | 4,5    |
| 2      | 140 | 136 | 4         | 4,5    |
| 3      | 144 | 147 | -3        | 3      |
| 4      | 144 | 139 | 5         | 7      |
| 5      | 142 | 143 | -1        | 1      |
| 6      | 146 | 141 | 5         | 7      |
| 7      | 149 | 143 | 6         | 9,5    |
| 8      | 150 | 145 | 5         | 7      |
| 9      | 142 | 136 | 6         | 9,5    |
| 10     | 148 | 146 | 2         | 2      |

**A.....parametr krve před podáním léku**

**B.....parametr krve po podání léku**

**$W_+$  .....  $\Sigma$  pořadí kladných rozdílů = 51**

**$W_-$  ..... = 4**

**$W = \min(W_+; W_-) = 4$   
počet párů =  $n = 10$**

**Pokud je  $W$  menší než kritická hodnota testu, pak zamítáme hypotézu shody distribučních funkcí obou skupin.**

# Wilcoxonův test – příklad II



Byla testována nová dieta pro laboratorní krysy, při pokusu byl zjišťován její vliv na různých liniích krys, bylo proto zvoleno párové uspořádání kdy krysy v obou dietách jsou spojeny přes svoji linii, tj. na začátku byly dvojice krys stejné linie, jedna z nich byla náhodně přiřazena k dietě, druhá z dvojice pak do druhé diety.

1. nulová hypotéza je, že váha krys není ovlivněna použitou dietou, alternativní, že ovlivnění dietou existuje
2. spočítáme difference – tyto difference jsou nenormální a proto je vhodné využít neparametrický test
3. Spočítáme sumu pořadí kladných a záporných diferencí, zde je menší suma záporných diferencí – 31
4. výsledkem výpočtu je  $p > 0,05$  a tedy nemáme dostatečné důkazy pro zamítnutí nulové hypotézy, nelze říci, že by nová dieta byla efektivnější než stará
5. pro doplnění výsledků je vhodné zjistit také skutečnou velikost rozdílu hmotností ve skupinách, např. ve formě mediánu



# Test dobré shody - základní teorie



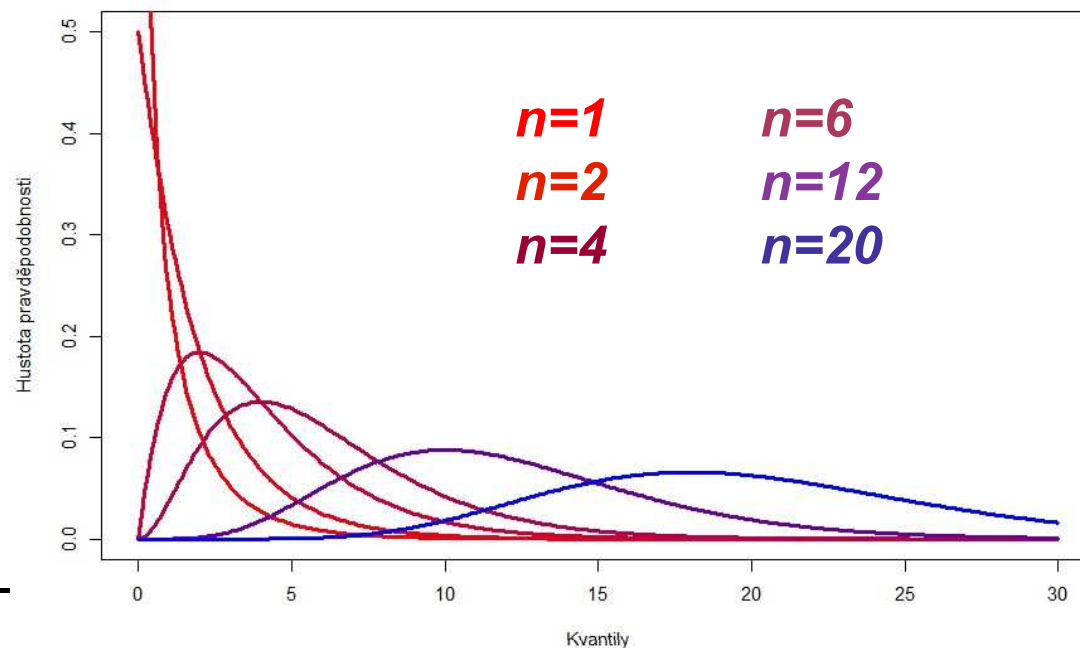
Testuje shodu reálné distribuce hodnot do  $n$  skupin s teoretickou distribucí.

***Předpokladem je, že velikost rozdílu mezi očekávaným a skutečným počtem hodnot v každé skupině je náhodně rozdělená → multinomické rozdělení.***

***Součet druhých mocnin relativních rozdílů očekávaného a skutečného počtu hodnot má přibližně  $\chi^2$  rozdělení.***

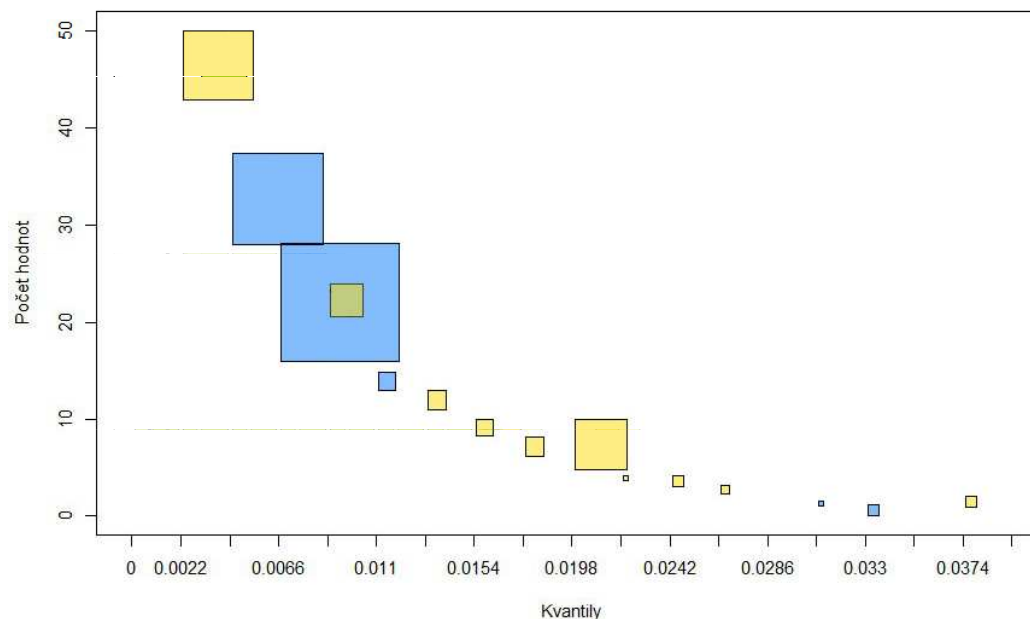
***$\chi^2$  rozdělení pro kladné hodnoty (suma čtverců) se liší podle počtu stupňů volnosti  $k$  (počtu skupin) - se zvyšujícím se  $k$  přechází v normální rozdělení.***

$$\chi^2_{(s.v.)} = \sum \frac{\left[ \begin{array}{c} \text{pozorovaná} \\ \text{četnost} \end{array} - \begin{array}{c} \text{očekávaná} \\ \text{četnost} \end{array} \right]^2}{\text{očekávaná četnost}}$$



# Test dobré shody - základní teorie

$$\chi^2_{(s.v.)} = \frac{\left[ \begin{array}{c} \text{pozorovaná} \\ \text{četnost} \end{array} - \begin{array}{c} \text{očekávaná} \\ \text{četnost} \end{array} \right]^2}{\underbrace{\text{očekávaná četnost}}_{\text{1. jev}}} + \frac{\left[ \begin{array}{c} \text{pozorovaná} \\ \text{četnost} \end{array} - \begin{array}{c} \text{očekávaná} \\ \text{četnost} \end{array} \right]^2}{\underbrace{\text{očekávaná četnost}}_{\text{2. jev}}} + \dots$$



# Očekávané četnosti



V případě platnosti nulové hypotézy je poměr mezi buňkami jednoho sloupce v různých řádcích nezávislý na výběru tohoto sloupce.

***V případě platnosti nulové hypotézy je poměr mezi buňkami jednoho řádku v různých sloupcích nezávislý na výběru tohoto řádku.***

***Pokud tyto poměry normalizujeme, získáváme tabulku očekávaných četností.***

***Řádkové a sloupcové součty se touto operací nemění.***

Pozorované četnosti

|          | Ano | Ne  | $\Sigma$ |
|----------|-----|-----|----------|
| Ano      | 20  | 82  | 102      |
| Ne       | 10  | 54  | 64       |
| $\Sigma$ | 30  | 136 | 166      |

$$102 \times 30 / 166$$

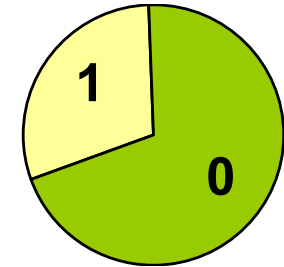
Očekávané četnosti

|          | Ano  | Ne   | $\Sigma$ |
|----------|------|------|----------|
| Ano      | 18,4 | 83,6 | 102      |
| Ne       | 11,6 | 52,4 | 64       |
| $\Sigma$ | 30   | 136  | 166      |

# Test dobré shody - základní teorie

## Binomické jevy (1/0)

$$\chi^2_{(1)} = \frac{\left[ \begin{array}{c} \text{pozorovaná} \\ \text{četnost} \end{array} - \begin{array}{c} \text{očekávaná} \\ \text{četnost} \end{array} \right]^2}{\underbrace{\text{očekávaná četnost}}_{\text{I. jev 1}}} + \frac{\left[ \begin{array}{c} \text{pozorovaná} \\ \text{četnost} \end{array} - \begin{array}{c} \text{očekávaná} \\ \text{četnost} \end{array} \right]^2}{\underbrace{\text{očekávaná četnost}}_{\text{II. jev 2}}}$$



### Příklad



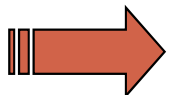
10 000 lidí hází mincí  $\rightarrow$  rub: 4 000 případů (R)  
líc: 6 000 případů (L)



Lze výsledek považovat za statisticky významně odlišný (nebo neodlišný) od očekávaného poměru  $R : L = 1 : 1$  ?

$$\chi^2_{(1)} = \frac{(4000 - 5000)^2}{5000} + \frac{(6000 - 5000)^2}{5000} = 400$$

Tabulková hodnota:  $\chi^2_{(0,95)} (v = 1) = \underline{\underline{3,84}}$  (0,95 = 1 -  $\alpha$ )



**Rozdíl je vysoce statisticky významný ( $p \ll 0,001$ )**

# Znaménkový test



Zjednodušení neparametrického párového Wilcoxonova testu.

***Namísto velikosti rozdílů se počítá pouze jejich orientace (signum).***

***Případy, kde  $\text{sgn}(d) = 0$  se z analýzy vylučují.***

***Sečtou se kladné a záporné rozdíly a menší ze součtů je hledaná statistika  $m$ .***

***Statistika  $m$  se porovná s tabulkovou hodnotou pro danou hladinu pravděpodobnosti:***

| Počet párů<br>$n$ | Hladina významnosti ( $\alpha$ ) |      |      |
|-------------------|----------------------------------|------|------|
|                   | 0,01                             | 0,05 | 0,10 |
| 5                 | -                                | -    | 0    |
| 6                 | -                                | 0    | 0    |
| 7                 | -                                | 0    | 0    |
| 8                 | 0                                | 0    | 1    |
| 9                 | 0                                | 1    | 1    |
| 10                | 0                                | 1    | 1    |
| 11                | 0                                | 1    | 2    |
| 12                | 1                                | 2    | 2    |
| 13                | 1                                | 2    | 3    |
| 14                | 1                                | 2    | 3    |
| 15                | 2                                | 3    | 3    |
| 16                | 2                                | 3    | 4    |
| 17                | 2                                | 4    | 4    |
| 18                | 3                                | 4    | 5    |
| 19                | 3                                | 4    | 5    |
| 20                | 3                                | 5    | 5    |