INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Racionální lomené funkce

Mgr. Zdeněk Kříž, Ph. D. a Mgr. Veronika Švandová

Obsah

1 Integrace racionální lomené funkce

V této kapitole využijeme znalosti získané v minulém semestru a rozšířené v předchozí kapitole. Budeme se zabývat integrály tvaru $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy.

1.1 Parciální zlomky

Funkci proměnné x ve tvaru $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy, nazýváme **racionální lomenou funkcí**. Je-li stupeň polynomu v čitateli $P(x)$ menší než stupeň polynomu ve jmenovateli $Q(x)$, nazýváme danou funkci **ryze lomenou**. V opačném případě mluvíme o funkci **neryze lomené**.

Každou neryze lomenou funkci lze dělením polynomu polynomem převést na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Základním řešením integrace ryze lomených racionálních funkcí je jejich převedení na jednoduché zlomky, které již umíme integrovat. Tyto jednoduché zlomky nazýváme **parciálními zlomky**. Pro rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky je třeba nalézt kořeny polynomu jmenovatele a polynom ve jmenovateli převést na součin kořenových činitelů. Tyto činitele, případně jejich mocniny, používáme jako jmenovatele jednotlivých parciálních zlomků.

Budeme rozlišovat tři základní typy parciálních zlomků:

1) Je-li v rozkladu jmenovatele na kořenové činitele výraz: $(ax + b)$, kde $\alpha = -\frac{b}{a}$ je jednoduchý kořen jmenovatele, odpovídá tomuto činiteli v rozkladu parciální zlomek
$\frac{A}{ax+b}$,
kde A je vhodná konstanta.

2) Je-li v rozkladu jmenovatele na kořenové činitele výraz: $(ax + b)^k$ a $\alpha = -\frac{b}{a}$ je $k-$násobný kořen jmenovatele, kde $k > 1$, odpovídá tomuto činiteli v rozkladu k parciálních zlomků tvaru
$\frac{A_1}{ax+b}, \frac{A_2}{(ax+b)^2}, ..., \frac{A_k}{(ax+b)^k}$,
kde $A_1, A_2, ..., A_k$ jsou vhodné konstanty.

3) Je-li v rozkladu jmenovatele na kořenové činitele výraz: $ax^2 + bx + c$, který nemá reálné kořeny, to jest $b^2 - 4ac < 0$, odpovídá tomuto činiteli v rozkladu parciální zlomek tvaru:
$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$,
kde A, B jsou vhodné konstanty. V případě vícenásobných imaginárních kořenů postupujeme stejně jako v případě 2.

Nejlepší bude ukázat si rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky na modelových příkladech. Začneme jednodušším příkladem se jmenovatelem s reálnými kořeny.

Modelový příklad 1:

Nalezněte rozklad racionální lomeneé funkce na součet parciálních zlomků

$\frac{x^2+1}{x^3(2x-1)}$

Jmenovatel zlomku je už rozložený na součin kořenových činitelů, máme proto snažší práci. Funkce má jeden jednonásobný kořen $\frac{1}{2}$ a jeden trojnásobný kořen 0. Rozklad na parciální zlomky bude mít tvar:

$\frac{x^2+1}{x^3(2x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{2x-1}$

Nyní vynásobíme obě strany rovnice výrazem $x^3(2x-1)$ a získáme rovnici:

$x^2 + 1 = Ax^2(2x-1) + Bx(2x-1) + C(2x-1) + Dx^3$

Dva polynomy si jsou rovny tehdy, rovnají-li se jejich koeficienty u stejných mocnin proměnné x. Budeme tedy porovnávat koeficienty na levé a pravé straně rovnice pro výrazy $x^3, x^2, x^1 a\ x^0$, tím získáme čtyři rovnice pro čtyři neznámé:

$x^3 \quad : \quad 0 = 2A + D$

$x^2 \quad : \quad 1 = 2B - A$

$x^1 \quad : \quad 0 = 2C - B$

$x^0 \quad : \quad 1 = -C$

Vyřešením této soustavy rovnic získáme koeficienty: $A = -5, B = -2, C = -1, D = 10$. Rozklad na parciální zlomky má tedy tvar:

$\frac{x^2+1}{x^3(2x-1)} = \frac{-5}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{10}{2x-1}$

Modelový příklad 2:

Nalezněte rozklad racionální lomené funkce na součet parciálních zlomků

$\frac{x}{x^3-1}$

V tomto případě musíme nejdříve rozložit jmenovatele na součin kořenových činitelů. Výraz $x^3 - 1$ má jeden kořen roven 1, lze jej tedy vydělit výrazem $x - 1$, tím získáme rozklad $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ druhý výraz nemá reálný kořen. Rozklad na součet parciálních zlomků bude mít tvar:

$\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$

Vynásobením obou stran rovnice získáme tvar:

$x = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)$

Porovnáním příslušných koeficientů dostáváme soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$x^2 \quad : \quad 0 = A + B$

$x^1 \quad : \quad 1 = A - B + C$

$x^0 \quad : \quad 0 = A \ \ - C$

Sočtem všech tří rovnic určíme koeficient $A = \frac{1}{3}$, dosazením proměnné A do první a třetí rovnice vypočítáme proměnné B a C. $B = -\frac{1}{3}$ a $C = \frac{1}{3}$. Rozklad na parciální zlomky má tedy tvar:

$\frac{x}{x^3-1} = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x-1}{3(x^2+x+1)}$.

1.2 Integrace parciálních zlomků

Nyní již můžeme přistoupit k integraci jednotlivých parciálních zlomků. Uvedeme si sice vzorce pro integraci jednotlivých zlomků, ale není třeba se je učit na zpaměť. Využejeme znalostí z minulého semestru o integraci funkce $\frac{1}{x-a}$, případně $\frac{1}{(x-1)^k}.Prvnzlomekpovedenapirozenlogaritmusfunkce, druhvedekezlomk$

Vzorce pro integraci parciálních zlomků mají tvar:

1) $\int \frac{A}{ax+b} = \frac{A}{a} \ln|ax+b|; \quad a \neq 0$

2) $\int \frac{A}{(ax+b)^k} = -\frac{A}{a(k-1)} \frac{1}{(ax+b)^{k-1}}; \quad a \neq 0; k > 1$

3) $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a} \ln|a^2+bx+c| + (B - \frac{Ab}{2a}) \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}; \quad b^2-4ac < 0$

Je zřejmé, že zvláště poslední vzorec je zbytečné se učit na zpaměť. Ukážeme si tedy jak provést integraci bez znalosti tohoto vzorce. Nejprve se ale podíváme na předchozí první modelový příklad.

Modelový příklad 1 - integrace:

Integrál racionální lomené funkce z prvního modelového příkladu předchozí kapitoly bude mít tedy tvar:

$\int \frac{x^2+1}{x^3(2x-1)} dx = \int (\frac{-5}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{10}{2x-1}) dx = -5 \ln|x| + \frac{2}{x} + \frac{1}{2x^2} + 5 \ln|2x-1| + C$

Podrobný výpočet ponecháme na procvičení čtenáři.

Nyní se podíváme na druhý modelový příklad.

Modelový příklad 2 - integrace:

$\int \frac{x}{x^3-1} dx = \int \frac{1}{3} \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{3} \frac{x-1}{x^2+x+1} dx$

První integrál vede opět na přirozený logaritmus jmenovatele, druhý integrál budeme upravovat:

Nejprve dosadíme do příslušného vzorce:

$\int \frac{x}{x^3-1} dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

Nyní si ukážeme postup výpočtu druhého integrálu bez znalosti příslušného vzorce:

$\int \frac{1}{3} \frac{x-1}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx =$

nejprve upravíme zlomek tak, aby čitatel byl derivací jmenovatele

$\frac{1}{3} \int \frac{1}{2} \frac{2x+1-3}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{6} \int (\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{3}{x^2+x+1}) dx =$

$= \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{3}{6} \int \frac{dx}{x^2+x+1} dx =$

integrál nyní upravíme na tvar vedoucí na funkci $\arctan x$

$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}})^2 + 1}$ = tento integrál po úpravách vede k výsledku: $\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ Po shrnutí všech výpočtů obdržíme stejný výsledek jako při dosazení do vzorce. Necháme na čtenáři, aby si sám zvolil postup k řešení tohoto druhu funkcí.

1.3 Integrace racionálních lomených funkcí

Při integraci racionálních lomených funkcí využíváme předchozích znalostí. Nejdříve vždy převedeme neryze lomenou funkci na součet polynomu a ryze lomené funkce. Ryze lomenou funkci převedeme na parciální zlomky a ty postupně integrujeme. Pokud byla původní funkce neryze lomená, nesmíme zapomenout na integraci polynomu. Celý postup si ukážeme na řešených příkladech.

1.4 Řešené příklady

Příklad 1. *Vypočtěte integrál* $\int \frac{4x-1}{x^2+4x+8} dx$

Řešení. Integrál ve zlomku si nejdříve rozdělíme na dva tak, že jeden povede na logaritmus funkce a druhý na funkci arcustangens. $\int \frac{4x-1}{x^2+4x+8} dx = \alpha \int \frac{2x+4}{x^2+4x+8} dx + \beta \int \frac{1}{x^2+4x+8} dx =$ nejdříve vypočítáme koeficienty α a β. $4x - 1 = \alpha(2x + 4) + \beta.1$ Porovnáním koeficientů dostaneme $4x = \alpha.2x$ a $-1 = 2.4 + \beta.1 = 8 + \beta$ $\beta = -9$ Budeme tedy řešit integrály $2 \int \frac{2x+4}{x^2+4x+8} dx - 9 \int \frac{dx}{x^2+4x+8}$ První integrál je roven: Druhý integrál upravíme: $-9 \int \frac{dx}{x^2+4x+8} = -\frac{9}{4} \int \frac{dx}{(\frac{x^2+2}{2})^2+1}$ Tento integrál je roven: $-\frac{9}{2} \arctan \frac{x+2}{2}$. Celý integrál je tedy roven: $2 \ln(x^2 + 4x + 8) - \frac{9}{2} \arctan \frac{x+2}{2} + C$

1.5 Příklady k procvičení

Příklad 2. *1)* $\int \frac{x}{1+x^4} dx =$

2) $\int \frac{x^3}{1+x^4} dx =$

3) $\int \frac{4x^2+5}{x^3-2x^2+x} dx =$

4) $\int \frac{2x}{x^2-6x+5} dx =$

5) $\int \frac{dx}{x^2(x-1)} =$

6) $\int \frac{3x+4}{x^2+2x+2} dx =$

7) $\int \frac{2x^3-11x^2+4x-4}{x^4-2x^3} dx =$

8) $\int \frac{2x+1}{x^2-6x+12} dx =$

Řešení. 1) $\frac{1}{2} \arctan x^2 + C$

2) $\frac{1}{4} \ln(1 + x^4) + C$

3) $5 \ln |x| - ln|x - 1| - \frac{9}{x-1} + C$

4) $\frac{5}{2} \ln |x - 5| - \frac{1}{2} \ln |x - 1| + C$

5) $\ln |x - 1| - \ln |x| + \frac{1}{x} + C$

6) $\frac{3}{2} \ln |x^2 + 2x + 2| + \arctan(x + 1) + C$

7) $5\ln|x| - 3\ln|x-2| + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + C$

8) $\ln|x^2 - 6x + 12| + \sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$