INTEGRÁLNÍ POČET

Integrace je ***inverzní operace*** k derivaci. Přesto – integrální počet se historicky vyvíjel odděleně od počtu diferenciálního.

NEURČITÝ INTEGRÁL

Nechť F´(x) = f(x). Jaká je funkce F(x)?

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C$$

kde **f(x)** je integrand a **C** je integrační konstanta. Obsahuje **informaci**, která zanikla s derivací **F(x)**! Její hodnota se dá nalézt z počátečních podmínek. Např. jestliže známe hodnotu F(x) v bodě x=0.

Integrály primitivních funkcí:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \qquad \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C \qquad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C$$

ZÁKLADNÍ PRAVIDLA INTEGROVÁNÍ

Integrace výrazu s konstantou:

$$\int a\, f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$$

kde **a** je konstanta.

Integrace součtu je rovna součtu integrálů:

$$\int [u(x) + v(x) - w(x)]\,dx = \int u(x)\,dx + \int v(x)\,dx - \int w(x)\,dx$$

Substituce: x=φ(t) pak dx = φ´(t) dt

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

Příklad: Integrál $\int\left(\frac{1}{ax-b}\right)dx$ ax - b = z , $\frac{dz}{dx}=a$ $\frac{1}{a}dz=dx$

$$\int\left(\frac{1}{ax-b}\right)dx=\frac{1}{a}\int\frac{1}{z}dz=\frac{1}{a}\ln z+C=\frac{1}{a}\ln(ax-b)+C$$

INTEGROVÁNÍ PER PARTES:

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx=u(x)\,v(x)-\int u'(x)\,v(x)\,dx$$

Daný integrál $\int u(x)\,v'(x)\,dx$ se převádí na integrál $\int u'(x)\,v(x)\,dx$, jehož výpočet je snadnější.

Př. Integrál $\int x\,e^x dx$ ($u = x$ $v' = e^x$)

Počítáme: $u' = 1$ $v = e^x$, pak $\int x\,e^x dx = x\,e^x-\int 1.e^x dx = x\,e^x - e^x + C$

Př. Integrál $\int x^2 \ln x\, dx$ ($u = \ln x$ $v' = x^2$)

Počítáme: $u'=\frac{1}{x}$ $v=\frac{x^3}{3}$, pak

$$\int x^2\ln x\,dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{1}{x}\frac{x^3}{3}=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$$

Použití:

Odvozování obecných vztahů (vzorců) z diferenciálních závislostí***:***

Příklad: Jaká je závislost mezi *dráhou* a *časem* při ***volném pádu***?

Obecně: s = f(t).

Pád se zrychluje! Jak? Rychlost roste s časem.

Přírůstek rychlosti s časem (zrychlení) je konstantní a je úměrný gravitační konstantě:

$$+\frac{dv}{dt} = g$$

kde **g** je gravitační konstanta.

Z toho

dv = g dt ,   resp.

$$v(t) = \int g\ dt + C$$

v = gt + C

Pokud v čase t = 0 je i v = 0, pak C = 0 a v = gt

Rychlost **v** lze vyjádřit, jako přírůstek uražené dráhy **s** s časem **t**, tedy

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad \text{a tedy} \qquad \frac{ds}{dt} = gt$$

$$s(t) = \int gt\ dt \qquad\qquad s = \frac{1}{2}gt^2 + C$$

Jestliže t = 0 a s = 0, pak C = 0 a $s = \frac{1}{2}gt^2$