Příklad 1 $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Popište geometricky toto zobrazení.

A je ortogonální matice $\quad (A A^T = E)$

φ je ortogonální zobrazení, z teorie víme, že φ je

- otočení kolem osy
- otočení kolem osy složené s reflexí (symetrií) podle roviny kolmé k této ose

Podstatné informace získáme z vlastních čísel a vektorů

$$\det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} 4/3-\lambda & -1/3 & 4/3 \\ 2/3 & 2/3-\lambda & -1/3 \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \quad \cdot\ \cdot \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\det\begin{pmatrix} 2-3\lambda & -1 & 2 \\ 2 & 2-3\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 2-3\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda+1)$$ kontrola správnosti: jeden kořen je ± 1

$\lambda_1 = 1 \qquad (A-E)v = 0 \qquad v = (p, p, p) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Chceme najít ortonormální bázi, vhodnou pro popis φ

$\lambda_{2,3} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \qquad \tilde{\varphi}: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \quad \tilde{\varphi}(x) = Ax$

spočítáme vl. vektory $\tilde{\varphi}$ pro λ_2 (λ_3)

$$A-\lambda_2 E = \begin{pmatrix} 2/3 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -1/3 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \sim$$

$ax_2 + bx_3 = \emptyset$

$(x_2, x_3) = (b, a)$

$$\sim \begin{pmatrix} 1-i3\sqrt{3} & -2 & 4 \\ 4 & 1-i3\sqrt{3} & -2 \\ -2 & 4 & 1-i3\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1-i3\sqrt{3} \\ 4 & 1-i3\sqrt{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{i}{\sqrt{3}}$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1-3i\sqrt{3} \\ 0 & 9-i3\sqrt{3} & -i6\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1-3i\sqrt{3} \\ 0 & 3-i\sqrt{3} & -i2\sqrt{} \end{pmatrix}$$

$x_3 = 3 - i\sqrt{3}$

$x_2 = i2\sqrt{=}$

Numericky ?

Za λ_2 je lastni vektor $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ $\qquad \frac{u}{\sqrt{6}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$ lastni vektor je $w = \overline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\frac{1}{\sqrt{6}} u = v_3 + i v_2 \qquad \|v_3\| = 1, \quad \|v_2\| = 1$

$\langle v_3, v_2 \rangle = 0$

$A u = \lambda_2 u$

$A(v_3 + i v_2) = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(v_3 + i v_2)$ $\qquad (v_1 = v, v_2, v_3) = \alpha$

$A v_3 = \frac{1}{2} v_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} v_2$

$i A v_2 = i\left(\frac{1}{2} v_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} v_3\right)$

V bazi α ima φ matrici

$\varphi(v_1) = v_1 \qquad \varphi(v_2) = \frac{1}{2} v_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} v_3$

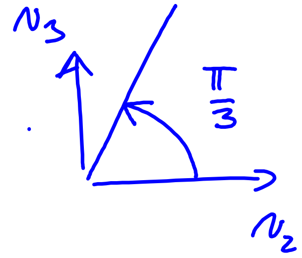
$\varphi(v_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2} v_2 + \frac{1}{2} v_3$

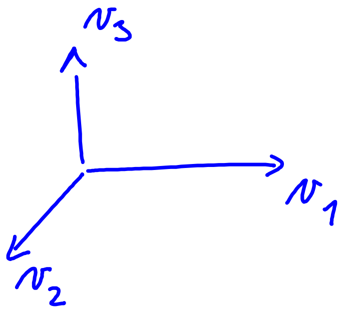
$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

$\cos\alpha$

$\sin\alpha$

souřadnice v bázi α





$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \xmapsto{\varphi} \begin{matrix} y_1 \\ \text{otočení o úhel } \frac{\pi}{3} \end{matrix}$$

otočení o úhel $\frac{\pi}{3}$ je od v_2 k v_3

v_1, v_2, v_3

$\beta = (v_1, v_3, v_2)$

otočení o $-\frac{\pi}{3}$ od v_3 k v_2

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos -\frac{\pi}{3} & -\sin(-\frac{\pi}{3}) \\ 0 & \sin -\frac{\pi}{3} & \cos(-\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}$$

Kde je skryta geom. informace

Vlastni cisla 1 pouze otoceni

-1 otoceni slozeno s reflexi

Vlastni vektor k 1 zadava osu otaceni

Rovina k nemu kolma ... rovina reflexe

Realna a imaginarni slozka ke kompl cislu $\lambda_2 = a + ib$, $b \neq 0$

urcuji smer otaceni

Vlastni cisla $\lambda_2 = \cos\alpha + i \sin\alpha$ urcuji uhel otaceni.

<u>(2p.) Příklad</u>$_{\varepsilon,\varepsilon}$ $\varphi : R^3 \to R^3$ otočení kolem osy $x_1 = x_2,\ x_3 = 0$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ tak, že $\varphi(1,0,0)$ má všechny složky kladné.

Najděte matici A tak, aby ve stand. bázi

$$\varphi(x) = Ax$$

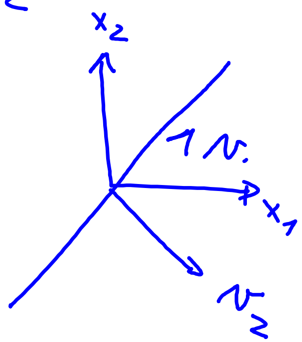
Obecný postup. Najdeme matici ve vhodné ortonormální bázi $\tilde{\alpha}$ a pak spočítáme

$$A = (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = (id)_{\varepsilon,\tilde{\alpha}}(\varphi)_{\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}}(id)_{\tilde{\alpha},\varepsilon}$$

Vhodná báze je: $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ osa otáčení

$$v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$v_3 = (0, 0, 1)$$



$$\varphi(v_1) = v_1$$
$$\varphi(v_2) = v_3$$
$$\varphi(v_3) = -v_2$$

Kdyby v zadání byla obecně úhel $\alpha \in (0, \pi)$

$$\varphi(v_1) = v_1$$
$$\varphi(v_2) = \cos\alpha\, v_2 - \sin\alpha\, v_2$$
$$\varphi(v_3) = \sin\alpha\, v_2 + \cos\alpha\, v_3$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\tilde\alpha,\tilde\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} \qquad (\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ortogonální matice

$$P^{-1} = P^T$$

$$A = (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = \underbrace{(id)_{\varepsilon,\tilde\alpha}}_{\text{známe}} \underbrace{(\varphi)_{\tilde\alpha,\tilde\alpha}}_{\text{známe}} \underbrace{(id)_{\tilde\alpha,\varepsilon}}_{\cancel{\text{známe}}} = P \qquad (id)_{\varepsilon,\tilde\alpha} = \begin{array}{ccc} & & \\ \left(\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \\ \uparrow\; v_1 \quad \uparrow\; v_2 \quad \uparrow\; v_3 \end{array}$$

$$= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot P^T$$

$$(\varphi)_{\varepsilon\varepsilon} = \ldots\ldots = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

jiný postup ... viz text k přednášce v ISu (přednáška 9)

SAMOADJUNGOVANÉ OPERÁTORY

U, V vekt. prostory se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

$\varphi : U \to V$ lin. zobrazení.

Adjungované zobrazení k $\varphi : U \to V$ je lineární zobrazení

$$\varphi^* : V \to U$$

takové, že platí

$$\langle \varphi(u), v \rangle_V = \langle u, \varphi^*(v) \rangle_U$$

pro všechna $u \in U$, $v \in V$.

Věta o matici adj. zobrazení: Nechť α je ortonormální báze v U a β ortonormální báze ve V. Nechť $A = (\varphi)_{\beta,\alpha}$, pak $(\varphi^*)_{\alpha,\beta} = \overline{A}^T$.

Důkaz: Označme.

$$(\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta\alpha} (u)_\alpha = A \cdot x$$

$$(\varphi^*(v))_\alpha = (\varphi^*)_{\alpha\beta} (v)_\beta = B \cdot y$$

skalární součin v souřadnicích ortonormální báze je

$u, \tilde{u} \in U$ $\quad \langle u, \tilde{u} \rangle = (u)_\alpha^T \cdot \overline{(\tilde{u})_\alpha} = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \ldots + x_n \overline{y_n}$

stejně ve V a v bázi β. Nechť $(\varphi^*)_{\alpha\beta} = B$.

$\forall u, v$

$$\langle \varphi(u), v \rangle_V = \langle u, \varphi^*(v) \rangle_U$$

$$(\varphi(u))_\beta^T \cdot \overline{(v)_\beta} = (u)_\alpha^T \cdot \overline{(\varphi^*(v))_\alpha}$$

$$(A \cdot x)^T \cdot \overline{y} = x^T \overline{(B \cdot y)}$$

$\forall x, y$

$$x^T A^T \cdot \overline{y} = x^T \overline{B} \cdot \overline{y}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad A^T = \overline{B} \iff B = \overline{A}^T$$

Tedy $(\varphi^*)_{\alpha,\beta} = B = \overline{A}^T$.

Důsledek: Ke každému lin. zobrazení $\varphi : U \to V$ mezi prostory konečné dimenze se skal. součinem existuje $\varphi^* : V \to U$

Důkaz. V souřadnicích od bází α, β je

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = A$$

a proto najdeme $\varphi^* : V \to U$ tak, aby

$$(\varphi^*)_{\alpha,\beta} = \overline{A}^T.$$

Samoadjungované zobrazení

U vekt. prostor se skal. součinem, $\varphi : U \to U$.

Zobrazení $\varphi : U \to U$ je samoadjungované, jestliže $\varphi = \varphi^*$ tj. platí
$\forall u, v \in U$: $\langle \varphi(u), v \rangle_U = \langle u, \varphi(v) \rangle_U$

Věta: Lin. operátor $\varphi : U \to U$ je samoadjungovaný, právě když jeho matice v ortonormální bázi α splňuje

$$A = \bar{A}^T$$

Definice: A čtvercová komplexní matice splňující: $A = \bar{A}^T$
se nazývá HERMITOVSKÁ.

Příklad $A = \begin{pmatrix} 2 & 8-3i \\ 8+3i & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \bar{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 8-3i \\ 8+3i & 3 \end{pmatrix}$

Reálná matice taková, že $A = A^T$ se nazývá symetrická.

Každá sym. reálná matice je hermitovská

VĚTA o vlastních číslech a vlastních vektorech samoadj. operátorů

Nechť $\varphi : U \to U$ je samoadjungovaný. Platí

(1) Všechna vlastní čísla (i když jsme nad $\mathbb{C}$) jsou reálná

(2) Jsou-li u_1 a u_2 vlastní vektory k různým vl. číslům, jsou kolmé

(3) V U existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory (platí nad $\mathbb{C}$ i nad $\mathbb{R}$)

Důkaz odbudeme

ještě ke (3)

Báze $\alpha = (u_1, \dots, u_n)$ je tvořena vlastními vektory, pak

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Důsledek (3) Pro každou reálnou symetrickou matici A existuje ortogonální matice P tak, že matice

$$P^T A P = P^{-1} A P$$

je diagonální (na diagonále jsou vlastní čísla matice A).

Důkaz. Matice A určuje operátor $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = Ax$.

Platí $(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = A$. Z předchozí věty víme, že existuje ortonormální báze α tvořená vlastními vektory matice A. Potom

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)_{\alpha,\varepsilon} (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} (id)_{\varepsilon,\alpha} =$$

$$= P^{-1} A P$$

$$= P^{T} A P$$

Tato matice je ortogonální, neboť její sloupce jsou souřadnice vektorů ortonormální báze α

Důsledek pro kvadratické formy (Zlatý hřeb 2/3 semestru)

Pro každou kvadratickou formu $g : U \to \mathbb{R}$, kde U je vekt. prostor se skalárním součinem existuje v U ortonormální báze taková, že v jejích souřadnicích je

$$g(u) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice kvadr. formy, každé tolikrát, kolikrát činí jeho násobnost.

Důkaz pro $U = \mathbb{R}^n$. Nechť A je matice kvadr. formy g.

A je symetrická: Za bázi α vezmeme ortonormální bázi tvořenou vlastními vektory. Ta existuje podle předchozích vět.

Matice kvadr. formy g v dané bázi α bude B

$$\underbrace{B_{\alpha} = (id)^{T}_{\varepsilon\alpha} \, A_{\varepsilon} \, (id)_{\varepsilon\alpha}}_{\text{pravidla pro matice sym. bilin. forem}} = (id)^{-1}_{\varepsilon\alpha} \, A \, (id)_{\varepsilon\alpha}$$

ortog. matice

$=$ matice lin. operátoru $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(\varphi(x) = Ax)$ v bázi α tvořené vl. vektory

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad g(u) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

v souřadnicích báze α.