Samoadjungované operátory

$\varphi : U \longrightarrow V$, U, V prostory se skalárním součinem

$\varphi^* : V \longrightarrow U$ adjungované k φ

$$\forall u \in U, \forall v \in V : \langle \varphi(u), v \rangle_V = \langle u, \varphi^*(v) \rangle_U$$

$\varphi : U \longrightarrow U$ lin. operátor je samoadjungovaný, jestliže

$$\varphi = \varphi^*$$

$$\forall u, v \in U \quad \langle \varphi(u), v \rangle_U = \langle u, \varphi(v) \rangle_U$$

α je ortonormální báze, pak matice φ v bázi α je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = A = \bar{A}^T \quad \text{hermitovská}$$

V reálném vekt. prostoru $A = A^T$ symetrická

Příklad: $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x) = Ax$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ vlastní čísla jsou kořeny char. polynomu

$$(1-\lambda)(2-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1$$

Kořeny = vlastní čísla $\quad \lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$v_1 = \left(1, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$

Vlastní čísla jsou reálná.

$v_2 = \left(1, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Vlastní vektory k různým vl. číslům jsou na sebe kolmé

(v_1, v_2) tvoří bázi $\mathbb{R}^2$.

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 1 - 1 = 0$$

Věta: $\varphi: U \to U$ samoadjungovaný; U nad $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$

(1) Vlastní čísla operátoru φ jsou reálná

(2) Vlastní vektory k různým vlastním číslům jsou kolmé.

(3) V U existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory

Důkaz: (1) λ vlastní číslo s vl. vektorem $u \in U \setminus \{\vec{o}\}$

$$\underset{\neq 0}{\lambda \|u\|^2} = \langle \lambda u, u\rangle = \langle \varphi(u), u\rangle = \langle u, \varphi(u)\rangle = \langle u, \lambda u\rangle = \bar{\lambda}\, \|u\|^2$$

Dostáváme $\lambda = \bar{\lambda}$, tedy λ je reálné.

$$\langle u, av\rangle = \bar{a}\, \langle u, v\rangle$$

(2)

$\mathbb{C}^2$

$$\langle x, y\rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2}$$

$$\langle x, ay\rangle = x_1 \overline{a y_1} + x_2 \overline{a y_2} - \bar{a}(x \ldots)$$ [illegible]

c komplexní číslo $\qquad c \cdot \overline{c} = |c|^2$

$\mathbb{C}^2 \quad \langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} \qquad , \; x_i, y_i \in \mathbb{C}$

$\langle x, x \rangle = x_1 \overline{x_1} + x_2 \overline{x_2} = |x_1|^2 + |x_2|^2 \geq 0$

Takže můžeme definovat

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$$\langle x, ay \rangle = x_1 \cdot \overline{a y_1} + x_2 \cdot \overline{a y_2} = x_1 \cdot \overline{a} \cdot \overline{y_1} + x_2 \cdot \overline{a} \cdot \overline{y_2} =$$

$$= \overline{a} (x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2}) = \overline{a} \langle x, y \rangle$$

---

(2) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dvě vlastní čísla, $\varphi(u_1) = \lambda_1 u_1$, $\varphi(u_2) = \lambda_2 u_2$, $u_1 \neq \vec{o}$, $u_2 \neq \vec{o}$

$\underline{\lambda_1 \langle u_1, u_2 \rangle} = \langle \lambda_1 u_1, u_2 \rangle = \langle \varphi(u_1), u_2 \rangle = \langle u_1, \varphi(u_2) \rangle = \langle u_1, \lambda_2 u_2 \rangle = \overline{\lambda_2} \langle u_1, u_2 \rangle = \underline{\lambda_2 \langle u_1, u_2 \rangle}$

$\underset{\neq 0}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \langle u_1, u_2 \rangle = 0 \implies \langle u_1, u_2 \rangle = 0.$ $\qquad \lambda_2$ je reálné

(3) Nyní předpokládejme, že U je komplexní vekt. prostor.

$\varphi : U \to U$ je ta char. polynom má kořen v $\mathbb{C}$ ..... λ_1

Z předchozího víme, že λ_1 je reálné číslo.

Důkaz indukcí podle $\dim U$.

$\dim U = 1$ $\quad \varphi(u) = \lambda_1 u, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}$

zřejmé

Nechť platí pro $\dim \leq n-1, \quad n \geq 2$.

$\varphi : U \to U, \ \dim U = n, \quad \varphi$ má vlastní číslo λ_1 s vl. vektorem u_1 velikosti 1.

Ukážeme, že $\quad U = [u_1] \oplus [u_1]^\perp \quad$ (známe)

$[u_1]^\perp$ je invariantní vůči φ.

$v \in [u_1]^\perp$ chceme dokázat $\varphi(v) \in [u_1]^\perp$

$$\langle \varphi(v), u_1\rangle = \langle v, \varphi(u_1)\rangle = \langle v, \lambda_1 u_1\rangle = \bar{\lambda}_1 \underbrace{\langle v, u_1\rangle}_{=0} = 0.$$

Nyní aplikujeme tvrzení na operátor

$$\varphi|_{[u_1]^\perp} : [u_1]^\perp \longrightarrow [u_1]^\perp, \quad \dim [u_1]^\perp = n-1.$$

Ten má v $[u_1]^\perp$ ortonormální bázi $u_2, u_3, \dots, u_n$ tvořenou vlastními vektory.

Tedy $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ je ortonormální báze prostoru U

Spektrum lineárního operátoru $\varphi : U \to U$, jsou všechna vlastní čísla operátoru φ každé počítána tolikrát, kolik činí jeho algebraická násobnost

<u>Věta.</u> Kolmá projekce na podprostor je samoadjungovaný operátor

<u>Důkaz:</u> $P : U \to U$ je kolmá projekce na podprostor $V \subseteq U$

$\operatorname{im} P = V$.

Chceme dokázat, že $\langle Pu, v\rangle = \langle u, Pv\rangle$

$$\langle Pu, v\rangle = \langle Pu, Pv + \underbrace{(v - Pv)}_{\in V^\perp}\rangle = \underline{\langle Pu, Pv\rangle}$$

$$\langle u, Pv\rangle = \langle Pu + \underbrace{(u - Pu)}_{\in V^\perp}, Pv\rangle = \underline{\langle Pu, Pv\rangle}$$

<u>Dodatek o vlastních číslech</u> Vezmeme ortonormální bázi podprostoru V a přidejme k ní ortonormální bázi $V^\perp$

$u \in V \quad Pu = u \qquad v \in V^\perp \quad Pv = 0$

Vezmi $\alpha - (\underbrace{u_1, \dots, u_k}_{\in V}, \underbrace{u_{k+1}, \dots, u_n}_{\in V^\perp})$ na P matici

$$(P)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & & & \vdots & & & \\ & 1 & & \vdots & & 0 & \\ & & \ddots & \vdots & & & \\ & & & 1 & & & \\ \hdashline & & & & 0 & & \\ & 0 & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n-k \end{matrix}$$

Věta o spektrálním rozkladu samoadjungovaného operátoru

Každý samoadjungovaný operátor $\varphi : U \to U$ je lineární kombinace s reálnými koeficienty

$$\varphi = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_k P_k$$

kde P_i jsou kolmé projekce do navzájem kolmých podprostorů

Důkaz: Nechť $\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ je ortonormální báze samoadj. operátoru T

tvořená vlastními vektory

Vlastní čísla

$$\underbrace{\overbrace{u_1, \ldots, u_{k_1}}^{U_1}}_{\lambda_1}, \underbrace{\overbrace{u_{k_1+1}, \ldots, u_{k_2}}^{U_2}}_{\lambda_2}, \ldots, \underbrace{\overbrace{\ldots u_n}^{U_k}}_{\lambda_k}$$

Potom $U = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_k$

$u \in U_i \qquad \varphi(u) = \lambda_i u$

$u \in U \qquad u = v_1 + v_2 + \ldots + v_k, \quad v_i \in U_i, \quad \underline{v_i = P_{U_i} u}$

$$\underline{\varphi(u)} = \varphi(v_1 + v_2 + \ldots + v_k) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) + \ldots + \varphi(v_k)$$

$$= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k = \underline{\lambda_1 P_{U_1} u + \lambda_2 P_{U_2} u + \ldots + \lambda_k P_{U_k} u}$$

Minule jsme si ukázali, že pro symetrickou reálnou matici A existuje ortogonální matice P tak, že

$$P^{-1}AP = P^TAP \text{ je diagonální}$$

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = Ax$, φ má ortonormální bázi α tvořenou vlastními vektory

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = (id)^{-1}_{\varepsilon,\alpha} (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} \, (id)_{\varepsilon,\alpha} \quad {=}\; P \text{ je ortogonální}$$

$$= P^{-1} A P$$

$$= P^T A P$$

ještě diagonalizace kvadr. forem

$g : U \to U$ kvadr. forma na reálném vekt. prostoru U se skal. součinem

Pro g existuje ortonormální báze α tak že v jejích souřadnicích je

$$g(u) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice kvadr. formy.

Příklad $\quad g(u) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 x_2$ v souřadnicích stand. báze

matice g v bázi $\varepsilon = (e_1, e_2)$ je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Známá úprava na diagonální tvar $\qquad g(u) = f(u,u)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & e_1 \\ -1 & 2 & e_2 \\ \hline e_1 & e_2 & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & e_1 \\ 0 & 1 & e_2+e_1 \\ \hline e_1 & e_2 & \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & e_1 \\ 0 & 1 & e_2+e_1 \\ \hline e_1 & e_2+e_1 & \end{array}\right) \end{array}$$

$f(e_i, e_j)$

Takže v bázi $B = (e_1, e_1+e_2)$ má kvadr. forma vyjádření

$$g(u) = y_1^2 + y_2^2$$

Báze B není ani ortogonální $\langle e_1, e_1+e_2\rangle = 1$

Ortonormální bázi pro diagonalizaci kvadr. formy g získáme z vlastních vektorů matice A.

$$u_1 = \left(1, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \qquad v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}}\left(1, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$u_2 = \left(1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \qquad v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}\left(1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

V souřadnicích báze $\alpha = (v_1, v_2)$ je

$$g(u) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2$$

α je ortonormální báze, λ_1, λ_2 příslušné vlastní vektory.

OPRAVA V zadání je kvadr. forma $g: U \to \mathbb{R}$

Jordanův kanonický tvar

$\varphi : U \to U$ lin. operátor

Existuje-li taková báze vlastními vektory, tak v této bázi je matice $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ diagonální

!) platí speciálně pro unitární a samoadjungované operátory, i pro nějaké další, ale

NE PRO VŠECHNY

i když budeme nad $\mathbb{C}$.

Proto budeme hledat nějakou bázi α tak, aby matice

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$$

byla „co nejjednodušší". Tvar matice $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ budeme nazývat Jordanův kanonický tvar.

Matice A je v Jordanově kanonickém tvaru, jestliže je blokově diagonální:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{J_1(\lambda_1)} & & & 0 \\ & \boxed{J_2(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_k(\lambda_k)} \end{pmatrix}$$

kde $J_i(\lambda_i)$ jsou tzv. Jordanovy buňky

$$J(\lambda_i) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}}_{k_i} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a\\a\\a\\a\\a \end{pmatrix}}\right\} k_i$$

k_i je velikost buňky

Příklad

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}} & \\ & & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

Nechť $\varphi: U \to U$ má bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ takovou, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & & 0 \\ \cdot & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \lambda \end{pmatrix} = J_k(\lambda)$$

od této chvíle k značí velikost

λ číslo na diagonále

Co musí vektory $u_1, u_2, \dots u_k$ splňovat, aby tato platila?

$\varphi(\underline{u_1}) = \lambda \underline{u_1}$ $\quad$ u_1 je vlastní vektor pro vlastní číslo λ

$\varphi(\underline{u_2}) = u_1 + \lambda \underline{u_2}$

$\varphi(\underline{u_3}) = u_2 + \lambda \underline{u_3}$

$\dots\dots$

$\varphi(\underline{u_k}) = u_{k-1} + \lambda \underline{u_k}$

Tyto rovnice lze ekvivalentně zapsat takto:

$$
\begin{aligned}
\varphi(u_1) - \lambda u_1 &= 0 & \qquad (\varphi - \lambda id)\, u_1 &= \vec{o} \\
\varphi(u_2) - \lambda u_2 &= u_1 & \qquad (\varphi - \lambda id)\, u_2 &= u_1 \\
\varphi(u_3) - \lambda u_3 &= u_2 & \qquad (\varphi - \lambda id)\, u_3 &= u_2 \qquad\qquad (*) \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
\varphi(u_k) - \lambda u_k &= u_{k-1} & \qquad (\varphi - \lambda id)\, u_k &= u_{k-1}
\end{aligned}
$$

$(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ tvoří řetězec pro vlastní číslo λ operátoru φ, jestliže pro ně platí rovnice $(*)$, schématicky

$$
u_k \xrightarrow{\varphi-\lambda id} u_{k-1} \xrightarrow{\varphi-\lambda id} u_{k-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow u_3 \xrightarrow{\varphi-\lambda id} u_2 \xrightarrow{\varphi-\lambda id} u_1 \xrightarrow{\varphi-\lambda id} \vec{o}
$$

Hledání báze pro Jordanův kanonický tvar (JKT) spočívá v hledání vhodných řetězců. Z nich dostaneme požadovanou bázi

<u>Věta:</u> (O Jordanově kan. tvaru)

Nechť $\varphi : U \to U$ je lineární operátor, $\dim_{\mathbb{K}} U = n$. Nechť φ má v $\mathbb{K}$ n vlastních čísel včetně algebraických násobností. Pak v U existuje báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$$

je matice v Jordanově kanonickém tvaru. Tato matice je určena jednoznačně, až na pořadí buněk

Přiřadíme

$\alpha = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & 0 & & \\ 0 & 3 & 1 & & \\ 0 & 0 & 3 & & \\ \hline & & & 2 & 1 \\ & & & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$\beta = (u_4, u_5, u_1, u_2, u_3)$

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & & & \\ 0 & 2 & & & \\ \hline & & 3 & 1 & 0 \\ & & 0 & 3 & 1 \\ & & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Věta o JKT nad $\mathbb{C}$

Je-li U kompl. vekt. prostor a $\varphi: U \to U$ lin. operátor. Pak existuje báze α v U taková, že $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$ je matice v JKT.