Jordanův kanonický tvar

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{k_1}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix} \qquad J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$\varphi : U \to U \qquad \alpha = (u_1, u_2, \dots, u_r)$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$ právě když vektory $u_1, u_2, \dots, u_r$ tvoří kan. řetězec

$$\begin{aligned}
\varphi(u_1) &= \lambda u_1 \qquad u_1 \neq \vec{0} & (\varphi - \lambda id)\, u_1 &= 0 \\
\varphi(u_2) &= u_1 + \lambda u_2 & (\varphi - \lambda id)\, u_2 &= u_1 \\
\varphi(u_3) &= u_2 + \lambda u_3 \quad \Longleftrightarrow & &\dots\dots \\
&\dots\dots & & \\
\varphi(u_r) &= u_{r-1} + \lambda u_r & (\varphi - \lambda id)\, u_r &= u_{r-1}
\end{aligned}$$

$$u_r \xrightarrow{\varphi - \lambda id} u_{r-1} \longrightarrow \quad \longrightarrow u_3 \xrightarrow{\varphi - \lambda id} u_2 \xrightarrow{\varphi - \lambda id} u_1 \xrightarrow{\varphi - \lambda id} \vec{0}$$

$u_1 \neq \vec{0}$

definice řetězce pro vlastní číslo λ

<u>Lemma</u> Jestliže $u_1, u_2, \dots, u_r$ tvoří řetězec pro operátor φ a jeho vlastní číslo λ, pak jsou lineárně nezávislé.

Důkaz indukcí podle r

$r = 1$ $\quad u_1 \neq 0$ a tvrzení platí

Nechť platí pro $r-1 \geq 1$ a dokážeme pro r.

Nechť $\quad a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_r u_r = \vec{0} \qquad (*)$

Chceme dokázat, že $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$.

Na rovnici $(*)$ aplikujeme operátor $(\varphi - \lambda\, id)$.

$$a_1(\varphi - \lambda\, id)u_1 + a_2(\varphi - \lambda\, id)u_2 + \dots + a_r(\varphi - \lambda\, id)u_r = 0$$

$$a_1 \cdot \vec{0} + \underbrace{a_2 u_1 + a_3 u_2 + \dots + a_r u_{r-1} = 0}$$

$u_1, u_2, \dots u_{r-1}$ tvoří řetězec, podle ind. předpokladu jsou lin. nezávislé

tudíž $a_2 = a_3 = \dots = a_r = 0$. Dosadíme do $(*)$ a dostaneme

$$a_1 \underbrace{u_1}_{\neq \vec{0}} = 0 \implies a_1 = 0$$

Tím jsme dokázali LN vektorů $u_1, u_2, \dots, u_n$

Pro operátor φ budeme hledat JKT, přesněji bázi, ve které má φ matici v JKT tak, že budeme hledat bázi, která se skládá z několika maximálních řetězců. Jsou-li splněny předpoklady věty o JKT, pak taková báze existuje

Věta o JKT: Nechť $\varphi: U \to U$, $\dim U = n$ a φ má n vlastních čísel včetně alg. násobnosti. Pak existuje báze α tak, že $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$ je matice v JKT. Ta je určena jednoznačně až na pořadí buněk.

Předpoklad o vlastních číslech je automaticky splněn pokud pracujeme nad $\mathbb{C}$.

<u>Verze věty o JKT pro matice</u>

Nechť A je matice $n \times n$ a nechť její char polynom má n kořenů včetně násobnosti. Pak je A podobná matici v JKT, tj existuje regulární matice P tak, že

$$P^{-1} A P = J$$

kde J je matice v JKT. Ta je určena jednoznačně, až na pořadí bloků.

<u>Důkaz maticové verze z předchozí věty</u>

$\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ $\quad \varphi(x) = Ax$, φ má součet alg násobností vlastních čísel rovna řádu n. Můžeme tedy použít větu o JKT. Existuje báze α tak, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J \quad \text{je matice v JKT}$$

To znamená, že

$$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)^{-1}_{\varepsilon,\alpha} (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} \cdot (id)_{\varepsilon,\alpha} = P^{-1} A P$$

Pravidlo pro počítání JKT číslo 1

Na diagonále JKT jsou vlastní čísla operátoru, každé tolikrát, kolik činí jeho algebraická násobnost.

$$\det(J - \lambda\, id) = \det\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & & & & \\ & \lambda_1 - \lambda & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_2 - \lambda & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} (\lambda_2 - \lambda)^{k_2} \cdots$$

Příklad 1a $\quad \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -4 & -9 & -6 \\ 6 & 15 & 10 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

$\lambda = 2$ alg nás. 1 geom nás. 1 $\qquad v_1 = (1,-2,3)^T$

$\lambda = 1$ alg. nás. 2 geom nás. 2 $\qquad v_2 = (3,6,-8)^T$

$\qquad v_3 = (1,-1,1)^T$

3 řetězce

$$v_1 \xrightarrow{A-2E} \vec{o}$$
$$v_2 \xrightarrow{A-E} \vec{o}$$
$$v_3 \xrightarrow{A-E} \vec{o}$$

$\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ tvoří bázi

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = J$$

<u>Příklad 1b</u> $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

$\lambda = 2$ alg. nás. 1 geom nás. 1 $\quad v_1 = (1,0,0)^T$

$\lambda = 1$ alg. nás. 2 geom nás 1 $\quad v_2 = (1,-1,0)^T$

Pro $\lambda = 1$ hledáme řetězec délky 2

$$x = v_3 \xrightarrow{A-E} v_2 \xrightarrow{A-E} \vec{0}$$

$$(A-E)x = v_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x \downarrow v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$x_3 = -\frac{1}{2}$

$x_2 = p$

$x_1 = 1 + x_3 - x_2 = \frac{1}{2} - p \qquad p = 0$

$\alpha = (v_1, v_2, v_3)$

$\varphi(v_1) = 2v_1$

$\varphi(v_2) = v_2$

$\varphi(v_3) = v_2 + v_3$ $\Leftarrow$ $(\varphi - id)v_3 = v_2$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = J = (id)^{-1}_{\varepsilon,\alpha} (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} \underbrace{(id)_{\varepsilon,\alpha}}_{P}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Pravidlo číslo 2}}$ Počet buněk v JKT pro vlastní číslo λ je roven geom. násobnosti tohoto vlastního čísla.

Příklad 2

$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -28 & 3 \\ 4 & -8 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (2 - \lambda)^3$$

Vl. čísla 2 alg. násobnost: 3 geom. násobnost: 1

$u_1 = (2, 1, 2)^T$

Podle pravidla 2 existuje jediná buňka v JKT. Tedy máme

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Chceme najít báz. – ta je tvořena řetězcem délky 3.

$$u_3 \xrightarrow{A-2E} u_2 \xrightarrow{A-2E} u_1 \longrightarrow \vec{o}$$

$$(A-2E)u_2 = u_1$$
$$(A-2E)u_3 = u_2$$

$$(A-2E)(u_2 + a u_1) = \underbrace{(A-2E)u_2}+ a(A-2E)u_1 = u_1 + \vec{o}$$

Soustavy mají více řešení, vybereme jedno

$$u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(u_1) = 2u_1$$
$$\varphi(u_2) = u_1 + 2u_2$$
$$\varphi(u_3) = u_2 + 2u_3$$

V bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ má φ matici $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J$

$$= P^{-1}AP \qquad P = (id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 3

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = (2 - \lambda)^3$$

$\lambda = 2$ je vl. číslo alg. nás. 3 a geom. nás. 2

$u = (2, -1, 0)^T$

$v = (0, 0, 1)^T$

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Jeden řetězec délky 1

Jeden řetězec délky 2

Řetězec délky 2 je tvaru

$$w \xrightarrow{A-2E} au+bv \xrightarrow{A-2E} \vec{o}$$

Hledáme $(a,b) \neq (0,0)$ tak, aby soustava

$$(A-2E)w = au+bv$$

měla řešení

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2a \\ -1 & -2 & 0 & -a \\ -2 & -4 & 0 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2a \\ -1 & -2 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Soustava má řešení právě tehdy, když $2a+b=0$.

Zvolme $a = 1,\ b = -2$

$$u - 2v = (2,-1,0)^T - 2\,(0,0,1)^T = (2,-1,-2)^T$$

$$w = (-1,1,1)^T$$

je řešení soustavy $(A - 2E)\,w = u - 2v$

$$\alpha = (u,\ u-2v,\ w)$$

musí být LN

$$\varphi(u) = 2u$$

$$\varphi(u-2v) = 2\,(u-2v)$$

$$\varphi(w) = (u-2v) + 2w$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J = P^{-1} A P \qquad P = (id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Jiný postup „hádáním", „slepou střelbou"

tj. uplatnit pouze v případě jednoho vlastního vektoru násobnosti n $(n=3)$

Hledáme řetězec délky $u_2 \xrightarrow{A\cdot 2E} u_1 \xrightarrow{A\cdot 2E} 0$

tak, že u_2 si zvolíme libovolně

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-2E} \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-2E}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & -28 & 3 \\ 4 & -18 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \qquad 143-$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-2E} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A\cdot 2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

$$(J-2E)(J-2E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice 4×4

aspoň 2 vlastní čísla .... JKT lze najít pouze ze znalosti algebraických a geom. násobností

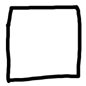
Nelze hádat

alg. násobnost ≤ 3

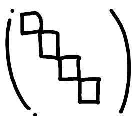
$3 = 3$

$3 = 2 + 1$

jediné vl. číslo alg. násobnosti 4

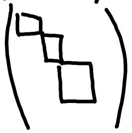
$J =$ 

$4 = 4$ jedna buňka pro geom. násobnost 1

$J =$ 

$4 = 1+1+1+1$ pro geom. násobnost 4

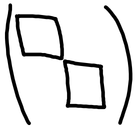
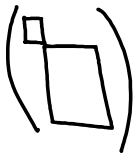
Lze hádat

$J =$ 

$4 = 1+1+2$ pro geom. násobnost 3

$4 = 2+2$

$= 1+3$ pro geom. násobnost 2

$J =$  nebo 

Příklad 4 $\quad \varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A-\lambda E) = (1+\lambda)^4$$

$\lambda = -1$ alg. nás. 4 geom. násobnost je 2 $\quad u = (1,0,3,0)^T$

$v = (0,0,1,-2)^T$

Zjistíme, pro které vektory $au + bv$ existuje řešení

$$w \xrightarrow{A+E} au+bv \xrightarrow{A+E} 0$$

$$(A+E)w = au + bv$$

Tato soustava má řešení pro všechna $\underline{a}$ a $\underline{b}$

~~Přesvědčte~~ se o tom úpravami matice $\left(A+E \mid au+bv\right)$

Přesvědčte se

Lze najít řetězce

$$u_2 \xrightarrow{A+E} u \longrightarrow 0$$

$$v_2 \xrightarrow{A+E} v \longrightarrow 0$$

Tedy JKT má dvě buňky velikosti 2×2

$$u_2 = (0,-1,0,3)^T$$

$$v_2 = (0,-2,0,5)^T$$

$$\alpha = (u, u_2, v, v_2)$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = J = P^{-1} A P$$

$$P = (id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

„Hádáním"

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A+E} v_1 = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -30 \\ -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{A+E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A+E} w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{A+E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektory v_1, v_2, w_1, w_2 jsou LN, tvoří bázi a proto

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & 0 & -1 \end{pmatrix} = \overline{P}^{-1} A \overline{P} \qquad \overline{P} = (id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} -12 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 0 & 12 & 0 \\ -12 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 5 $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (1-\lambda)^4$$

$\lambda = 1$ vl. čísla alg. násobnosti 4 a geom. násobnosti 2

$u = (0,1,0,1)^T \quad v = (-2,0,3,0)^T$

jsou vl. vektory

Zjistíme, pro která a, b je řešitelná rovnice

$$(A-E)w = au + bv$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 6 & 8 & 4 & -8 & a \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & 2 & -2 & 10 & a+4b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array}\right)$$

B

Nutná a postačující podmínka řešitelnosti je $a+6b=0$

Už tato soustava (řešení nezávisí na volbě a, b) stačí, že bude existovat řetězec délky 3

$a=-6,\ b=1 \qquad -6u+v=(-2,-6,3,-6)^T$

$(A-E)w=-6u+v$

$w=\left(\frac{1}{3},-1,0,0\right)^T+a_1u+b_1v$

Hledáme 3. vektor řetězce

$(A-E)z=w$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3}-2b_1 \\ 6 & 8 & 4 & -8 & -1+a_1 \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b_1 \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} & & & & \frac{1}{3}-2b_1 \\ & B & & & -1+a_1 \\ & & & & 3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1+a_1+6b_1 \end{array}\right)$$

Nutná a post. podmínka řešitelnosti je $-1+a_1+6b_1=0$.

Pokud zvolíme $a_1=1,\ b_1=0$

$$\overline{w} = \left(\tfrac{1}{3}, -1, 0, 0\right)^T + u = \left(\tfrac{1}{3}, 0, 0, 1\right)^T$$

$$z = \left(0, 0, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)^T$$

$$z \xrightarrow{A\cdot E} \overline{w} \xrightarrow{A\cdot E} -6u+v \xrightarrow{A\cdot E} 0$$

$$v \xrightarrow{A\cdot E} 0$$

$$\alpha = (-6u+v,\ \overline{w},\ z,\ v)$$

$$(\varphi)_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = J = P^{-1} A P \qquad P := (id)_{\varepsilon, \alpha} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Za domácí úlohu řešte příklad „hádáním".