Dokončení afinní geometrie

Dány p, q přímky a bod A ~~...~~ $\notin p$, $\notin q$ v $\mathbb{R}^3$
(mimoběžné)

Úloha: bodem A veďte přímku r protínající p a q

Rozbor

$p \cap r = \{P\}$ $\quad$ p a r určují rovinu $\rho = p \sqcup r$

$q \cap r = \{Q\}$ $\quad$ r leží v ρ

r protíná q v bodě Q

ρ protíná q v bodě Q

$A \in r$, $A \notin p$

$\rho = p \sqcup A$

Řešení: Sestrojíme $\rho = p \sqcup A$

Spočítáme $Q = \rho \cap q$

Přímka r je $\overleftrightarrow{AQ}$

Analogická úloha v $\mathbb{R}^4$

π rovina, q přímka v $\mathbb{R}^4$, mimoběžné

$A \in \mathbb{R}^4$, $A \notin \pi$, $A \notin q$

Najděte přímku r, která prochází bodem A, protíná π i q

Přímka r a přímka q určují rovinu $\rho = \cancel{q} \sqcup r = q \sqcup A$

Jestliže $r \cap \pi = \{Q\}$, pak i $\rho \cap \pi \supseteq \{Q\}$.

Spočítáme průnik $\rho \cap \pi$, čím dostaneme bod Q

a hledaná přímka bude

$$r = \overleftrightarrow{AQ}.$$

Lineární formy a duální vekt. prostor

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C})$

Lineární forma na U je lineární zobrazení

$$f : U \longrightarrow \mathbb{K}$$

$\boxed{\text{Příklady}}$

(1) Lineární formy na $\mathbb{R}^3$: $\quad f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

$\mathbb{R}^3$ má bázi (e_1, e_2, e_3)

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = x_1 \underbrace{f(e_1)}_{a_1} + x_2 \underbrace{f(e_2)}_{a_2} + x_3 \underbrace{f(e_3)}_{a_3} =$$

(4) $U = C^1(\mathbb{R})$ zvezno diferenciabilne funkcije na $\mathbb{R}$

Definiramo $F : C^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$F(g) = g'(1)$$

linearnost

$$F(ag+bf) = (ag+bf)'(1) = (ag'+bf')(1)$$

$$= a g'(1) + b f'(1) = a F(g) + b F(f)$$

(5) $U = C[a,b]$ $\quad F : C[a,b] \to \mathbb{R}$

$$F(g) = \int_a^b g(x)\,dx$$ linearni funkcional

Příklad $U = \mathbb{R}^n$, kde prvky bereme jako sloupce $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$U^* = (\mathbb{R}^n)^* = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = (a_1\ a_2 \dots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\}$$

si můžeme reprezentovat jako prostor řádkových reálných vektorů velikosti n

Na tomto příkladu. Duál má stejnou dimenzi.

„Je podobný U, ale není s ním totožný."

Duální báze v U^* Nechť $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ je báze v prostoru U.

Ukážeme si, že pak v prostoru U^* existuje báze $\alpha^* = (f^1, f^2, \dots, f^n)$

(1) f^i je lineární forma (za DÚ)

(2) $f^1, f^2, \ldots, f^n$ jsou lin. nezávislé.

Chceme dk, že $x_1 f^1 + x_2 f^2 + \ldots + x_n f^n = O \Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$

Nechť $x_1 f^1 + x_2 f^2 + \ldots + x_n f^n = O$ (jako lin. formy $O(u) = 0$)

forma, číslo

Do obou stran dosadím vektor u_i z báze α:

$$x_1 f^1(u_i) + \ldots + x_i f^i(u_i) + \ldots + x_n f^n(u_i) = O(u_i)$$

$$x_1 0 + \ldots + x_i \cdot 1 + \ldots + x_n 0 = 0$$

$$x_i = 0$$

Tedy $f^1, \ldots, f^n$ jsou lin. nezávislé.

(3) $f^1, f^2, \ldots, f^n$ generují U^*. Hledáme pro zadané $f \in U^*$ koeficienty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tak, že $f = x_1 f^1 + \ldots + x_n f^n$.

Takže obrácení: souřadnice f v bázi α^* jsou
i-tá souřadnice f v bázi α^* je $f(u_i)$ ... u_i i-tý vektor báze α

Jednoznačnost duální báze

f^i je určena jednoznačně svými hodnotami na vektorech báze α předpisem

$$f^i(u_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

$$f^i(u) = f^i(x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n) = x_1 f^i(u_1) + \dots + x_i f^i(u_i) + \dots + x_n f^i(u_n)$$

$$= x_1\cdot 0 + \dots + x_i \cdot 1 + \dots + x_n \cdot 0 = x_i$$ ... i-tá souřadnice vektoru u.

Druhý duál

Lin. formy na U tvoří duální vekt. prostor U^*

Lin. formy na U^* tvoří tzv. druhý duální vekt. prostor U^{**}

druhý duál

Existuje kanonické lineární zobrazení

$$E_U : U \longrightarrow U^{**}$$

kanonické („stejné pro všechny vekt. prostory")

E ... evaluace, neboť E je vyčíslení:

$u \in U$ $\quad E(u)$ má být lineární forma na U^*

$f \in U^*$ $\quad E(u)(f) = f(u)$ $\quad E(u) : U^* \longrightarrow \mathbb{K}$

Tedy $u = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n = \vec{o}$

Udělali jsme

k vekt. prostoru U jsme přiřadili vekt. prostor U^*

Nyní k $\varphi : U \to V$ lineárnímu přiřadíme

$$\varphi^* : V^* \longrightarrow U^*$$

Toto zobrazení se nazývá duální zobrazení k zobrazení φ.

<u>Definice</u>: Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární zobrazení.
Potom zobrazení $\varphi^* : V^* \longrightarrow U^*$ se nazývá duální k zobrazení,
jestliže je definováno předpisem: $\varphi^*(g) = g \circ \varphi$
pro všechna $g \in V^*$.

$$\boxed{A_{ij} = \text{i-tá souřadnice vektoru } \varphi(u_j) \text{ v bázi } \beta}.$$

Věta: Nechť α je báze U, β je báze V, a $\varphi: U \to V$ lineární a $\varphi^*: V^* \to U^*$ duální k φ. Potom pro matici φ^* v bázích β^* a α^* platí:

$$(\varphi^*)_{\alpha^*, \beta^*} = (\varphi)_{\beta, \alpha}^T$$

Důkaz: $\dim U = n$, $\dim V = k$

$(\varphi)_{\beta,\alpha}$ je matice $k \times n$

$(\varphi^*)_{\alpha^*,\beta^*}$ je matice $n \times k$