Bilineární a kvadratické formy

$$g(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{X}) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$

$$f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j \implies g(x) = f(x, x)$$

Definice. Bilineární forma je zobrazení

$$f : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$$

splňující: $\forall u \in U$: $f(-, u), f(u, -) : U \longrightarrow \mathbb{K}$ jsou lineární

$$(A \cdot B)_{k\ell} = \sum_i a_{ki} \cdot b_{i\ell} \qquad (\ )_{1i} \qquad (\ )_{j1}$$

$$\Big((x_i)\,(a_{ij})\,(y_j) \Big)_{11} = \sum_{i,j} x_i \, a_{ij} \, y_j$$

f je opravdu bilineární :

$$f(x, y + y') = x^T A (y + y') = x^T A y + x^T A y'$$

$$= f(x, y) + f(x, y')$$

$$f(x, ky) = x^T A (ky) = k \cdot (x^T A y) = k \cdot f(x, y)$$

Nechť $u = \sum_i x_i u_i$, $v = \sum_j y_j u_j$ (tj. $(x_i) = (u)_\alpha$
$(y_j) = (v)_\alpha$)

Spočítejme $f(u,v)$:

$$f\left(\sum_i x_i u_i , \sum_j y_j u_j\right) \overset{\text{lineanta v prvni složce}}{=} \sum_i x_i \, f\left(u_i, \sum_j y_j u_j\right)$$

$$= \sum_i x_i \cdot \left(\sum_j y_j \, \overbrace{f(u_i, u_j)}^{a_{ij}}\right)$$

$$= \sum_{i,j} x_i \, y_j \, a_{ij} = x^T A y$$

neboli : $\boxed{f(u,v) = (u)_\alpha^T \, A \, (v)_\alpha}$

Matice bilineární formy při změně báze

$\alpha = (u_1, \ldots, u_n)$

$\beta = (v_1, \ldots, v_n)$

$P = (id)_{\alpha\beta}$

Pro souřadnice vektoru u platí: $x = (u)_\alpha$; $\bar{x} = (u)_\beta$

$x = P\bar{x}$ $\quad$ $\left((u)_\alpha = (id)_{\alpha\beta} (u)_\beta \right)$

Stejně pro souřadnice vektoru v : $y = P\bar{y}$

$$f(u,v) = x^T A y$$
$$= \bar{x}^T B \bar{y}$$

kde B je matice f v bázi β

Symetrické bilineární formy

f je **symetrická**, jestliže pro každé $u, v \in U$ platí

$$f(u,v) = f(v,u)$$

Pro matici f to znamená

$$a_{ij} = f(u_i, u_j) = f(u_j, u_i) = a_{ji},$$

tedy, že je symetrická: $A^T = A$.

Naopak, je-li matice bilin. formy f symetrická, pak je f symetrická

b) násobení 1 řádku skalárem

$$\begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = P^T \quad , \quad P = P^T \quad \ldots$$

odpovídá vynásobení 1. sloupce týmž skalárem

c) přičítání násobku 1 řádku k 2. řádku

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ a & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = P^T \quad , \quad P = \begin{pmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \ldots$$

odpovídá přičtení téhož násobku 1 sloupce k 2. sloupci

<u>Příklad</u> diagonalizujte $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

přičtení
1. ř k 2. ř
1. s k 2. s