Kvadratické formy

Bilineární forma: U vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

$f : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$

$f(au_1 + bu_2, v) = a\, f(u_1, v) + b\, f(u_2, v)$

$f(u, av_1 + bv_2) = \dots$

$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$.

Symetrická bilin. forma

$f(u, v) = f(v, u)$

Jestliže A je matice formy $f: U \times U \to \mathbb{K}$ v bázi α a B je matice téže formy v bázi β, pak platí

$$B = P^T A P$$

kde $P = (id)_{\alpha, \beta}$.

Zajímají nás hlavně symetrické bilin. formy.

<u>Nové</u>

Kvadratická forma je zobrazení $g: U \to \mathbb{K}$ takové, že existuje symetrická bilin. forma $f: U \times U \to \mathbb{K}$ a platí

$$g(u) = f(u, u).$$

Je zřejmé, že každá sym bilin forma určuje jednoznačně kvadratickou formu. Pokud jsme nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, platí i obrácené tvrzení: Každá kvadr forma jednoznačně určuje sym bilin. formu. Nechť $g : U \to K$ je kvadr forma definovaná pomocí sym bilin formy

$$g(u) = f(u,u)$$

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)(a+b) &= \\ &= a(a+b) + b(a+b)\end{aligned}}$$

$$= a.a + a.b + b.a + b.b$$

Pak

$$f(u,v) = \frac{1}{4}\Big(g(u+v) - g(u-v)\Big)$$

Důkaz: $\frac{1}{4}\Big(g(u+v) - g(u-v)\Big) = \frac{1}{4}\Big(f(u+v,u+v) - f(u-v,u-v)\Big) =$

$$= \frac{1}{4}\Big(f(u,u+v) + f(v,u+v) - f(u,u-v) + f(v,u-v)\Big)$$

Věta: Ke každé symetrické bilin formě $f : U \times U \to \mathbb{K}$ existuje báze $\mathcal{B}$ taková, že matice f v této bázi je diagonální.

Jinak:

$$f(u, v) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}\, x_i y_i$$

kde $(u)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ a $(v)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Důkaz: Nechť $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ je nějaká báze v prostoru U.

Uvažujme následující schéma

Stejné řádkové i sloupcové úpravy provádíme tak, abychom na místě matice dostali diagonální matici

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|l} b_{11} & 0 & \cdots & 0 & v_1 = \sum c_{1i} u_i \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 & v_2 = \sum c_{2i} u_i \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} & v_n = \sum c_{ni} u_i \\ \hline v_1 = \sum c_{1i} u_i & \cdots & & & \end{array}\right)$$

$f(v_1, v_1) = b_{11}$

$f(v_1, v_j) = 0 \quad j \neq 1$

atd.

Tedy hledaná báze B je $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$

a matice f v bázi B je $\begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & b_{22} & \\ 0 & & \ddots \; b_{nn} \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|c} f(u_i, u_j) & u_i \\ \hline u_j & \end{array}$$

$$\sum c_{ij} u_j$$

$\mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \\ \hline e_1 \, e_2 \, \ldots \, e_n & \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c|c} B & \sum c_{ij} e_j \\ \hline & \end{array} = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots c_{in})$$

$$\begin{array}{c|c} A & 1\;0\;0\;\ldots\;0 \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \end{array}$$

Diagonalizace kvadr. formy pomocí tzv. úprav na čtverce

Mějme kvadr. formu $g : U \to \mathbb{K}$ a označme její vyjádření v souřadnicích báze α

$$g(u) = \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} \, x_i x_j \qquad (u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(1) Pokud $a_{11} \neq 0$.

$$g(u) = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{1n} x_1 x_n + \sum_{2 \le i \le j \le n} a_{ij} x_i x_j$$

$$= a_{11} \left(x_1 + \frac{a_{12}}{2a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{2a_{11}} x_3 + \dots \frac{a_{1n}}{2a_{11}} x_n \right)^2 - \text{něco bez } x_1 + \sum_{2 \le i \le j \le n} a_{ij} x_i x_j$$

$$a_{11} \left[x_1^2 + \left(\frac{a_{12}}{2a_{11}} \right)^2 x_2^2 + \dots \; 2 x_1 \frac{a_{13}}{2a_{11}} x_3 \quad + 2 \frac{a_{12}}{2a_{11}} \frac{a_{13}}{2a_{11}} x_2 x_3 \right.$$

$$a_{ij} x_i x_j = a_{ij}(x_i' + x_j') x_j' = a_{ij} x_i' x_j' + a_{ij} x_j'^2$$

a v nových souřadnicích dostaneme koeficient u $x_j'^2$ různý od nuly,
proto můžeme pokračovat podle (2)

Takto postupně dostaneme, že souřadnic $x_1, x_2, \dots x_n$ souřadnice

$y_1, y_2, \dots y_n$

$$y_1 = q_{11} x_1 + q_{12} x_2 + \dots + q_{1n} x_n$$
$$y_2 = q_{21} x_1 + q_{22} x_2 + \dots + q_{2n} x_n$$
$$\dots$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$x_1, x_2, \dots x_n$ jsou souřadnice v bázi α
$y_1, y_2, \dots y_n$ jsou souřadnice v neznámé bázi β.

Hodnost kvadr. formy = hodnost její matice v nějaké bázi

$$B = P^T A P$$

A matice v α, B matice v β, $P = (id)_{\alpha\beta}$ je regulární

Pak $h(B) = h(A)$

Nyní se budeme zabývat pouze reálnými kvadr. formami

SYLVESTRŮV ZÁKON SETRVAČNOSTI

Nechť $g : U \to \mathbb{R}$ je kvadr. forma. Pak existuje báze $\mathcal{B}$, v jejíž souřadnicích má g vyjádření

$$g(u) = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \dots + b_{nn}x_n^2,$$

$a_{ii} y_i^2 = (-1)(-a_{ii} y_i^2) = (-1)\ x_i^2$

Nezávislost počtu 1, -1 a 0 na volbě báze (setrvačnost)

Nechť $g(u) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots\dots$ v bázi α

$g(u) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_q^2 - y_{q+1}^2 \dots\dots$ v bázi β

a nechť $p > q$

$A \subseteq U$ je podprostor s vlastností ~~A = {u ∈ U, g(u)}~~

$A = [u_1, u_2, \dots u_p]$, kde $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_p, \dots\dots u_n)$

$B = [v_{q+1}, \dots\dots v_n]$, kde $\beta = (v_1, \dots, v_{q+1} \dots v_n)$