Dokončení kvadr. forem

Sylv. zákon setrvačnosti

$g: U \to \mathbb{R}$ existuje báze α, v jejíž souřadnicích

$$g(u) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_\ell^2 + 0 \cdot x_{\ell+1}^2 + \dots 0 \cdot x_n^2$$

Počet $+1, -1, 0$ nezávisí na bázi.

Signatura kvadr. formy (s_+, s_-, s_0) — s_+ je počet 1, s_- je počet -1, s_0 počet 0

$\dim U = n \qquad s_+ + s_- + s_0 = n$

$\sim$ hodnost kvadr. formy je $s_+ + s_-$.

Nechť A i B mají stejnou signaturu, pak

$$A = P^T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}}_{D} P \qquad B = Q^T D Q$$

$$D = (P^T)^{-1} A P^{-1}$$

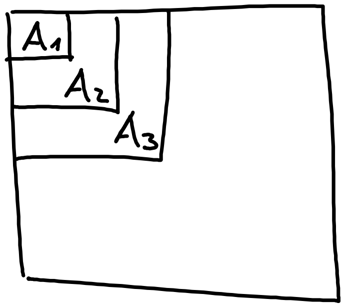
$$= (P^{-1})^T A P^{-1}$$ dosadíme do vyjádření pro B

$$B = Q^T D Q = \underbrace{Q^T (P^{-1})^T}_{(P^{-1}Q)^T} A P^{-1} Q = (P^{-1}Q)^T A (P^{-1} Q)$$

B a A jsou kongruentní.

Sylvestrovo kritérium

Kvadr. forma je pozitivně definitní, jestliže všechny hlavní minory její matice v nějaké bázi jsou kladné.

$A =$ 

hlavní minory jsou $\det A_i$

$g(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ pozitivně def.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A_i = 1 > 0$$

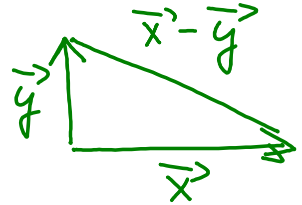
SKALÁRNÍ SOUČIN

Souvislost s kvadr. a lineár. formami

– skalární součin na reálném vektorovém prostoru je lineár. sym. forma na U, jejíž příslušná kvadr. forma je pozitivně definitní

Motivace: $\mathbb{R}^2$, $\vec{x}, \vec{y}$ dva vektory $\vec{x} \perp \vec{y}$, jestliže platí:

Pythagorova věta   velikost $\vec{x} = |\vec{x}|$



$$|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = |\vec{x}-\vec{y}|^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2$$

(2) je symetrická : $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

(3) je pozitivně definitní $\forall u \neq 0 : \langle u, u\rangle > 0$.

Příklady

① $\mathbb{R}^n$ stand. skalární součin je

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = x^T \cdot y = (x_1, x_2 \dots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

② $\mathbb{R}^2$ $\langle x, y\rangle = 3x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 2x_2 y_2$ příslušná matice

je opět skal. součin : sym. lin.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \det(3) = 3 > 0 \text{ a současně } \det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 > 0$$

forma je pozitivně definitní,

Skalární součin v komplexních vektorových prostorech

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{C}$, potom

$$\langle \, , \, \rangle : U \times U \to \mathbb{C}$$

se nazývá skalární součin, jestliže

(1) je lineární v 1. složce

$$\langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle \qquad a, b \in \mathbb{C}$$

(2) je antilineární v 2. složce

$$\langle u, av + bw \rangle = \overline{a} \langle u, v \rangle + \overline{b} \langle u, w \rangle \,, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

$\overline{a}, \overline{b}$ komplexně sdružená.

(3) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$, kde $\overline{}$ značí kompl. sdružené číslo

(4) $\langle u, u \rangle \in \mathbb{R}$ a pro $u \neq \vec{0}$ je $\langle u, u \rangle > 0$.

Pozn. vlastnost (2) plyne z (1) a (3).

② Obecný skalární součin na $\mathbb{C}^n$ je dán

$$\langle x,y\rangle = x^T A \overline{y}$$

kde A je komplexní matice s vlastností, že $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$

(hermitovská matice) $\qquad \langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

$$\langle x,x\rangle = x^T A \overline{x} > 0 \text{ pro } x \neq \vec{0}.$$

③ Spojité funkce na $[a,b]$ s hodnotami v $\mathbb{C}$

$$f = f_1 + i f_2 \qquad \int f(x)dx = \int f_1(x)dx + i\int f_2(x)dx$$

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

$$\langle f,f\rangle = \int_a^b f(x)\overline{f(x)}\,dx = \int |f(x)|^2 \ge$$

Aplikace pro $\mathbb{R}^n$ a standardní skalární součin

$x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}\,\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$$

Rovnost nastane pro nulová a jiná násobek.

$$\forall i \quad x_i = k\, y_i$$

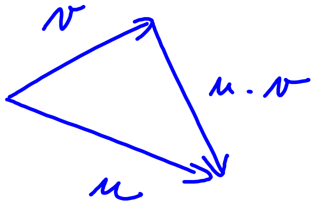
nebo $\forall i \quad y_i = k\, x_i$

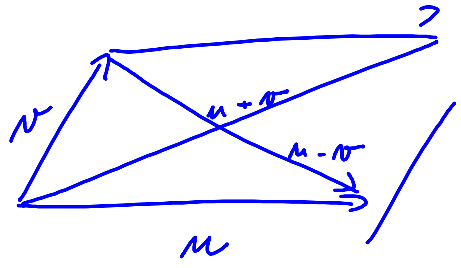
Aplikace na integrál $U = C[a, b]$,

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leq \left(\int_a^b f^2(x)\, dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x)\, dx \right)^{1/2}$$

Z Cauchyovy nerovnosti plyne trojúhelníková nerovnost

$$\|u - v\| \le \|u\| + \|v\|$$





$$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \|u\|^2 \mp 2\underbrace{\langle u,v\rangle}_{\le 2\|u\|\|v\|} + \|v\|^2 \le \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$$

$$= (\|u\| + \|v\|)^2$$

$$\|u-v\| \le \|u\| + \|v\|$$

<u>Rovnoběžníkové pravidlo</u> $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

Systém ortogonálních vektorů

je ~~...~~ posloupnost vektorů $v_1, v_2, \dots, v_k$ taková, že

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad i \neq j$$

Věta Nechť vektory $v_1, v_2, \dots v_k$ jsou nenulové a tvoří ortogonální systém. Potom jsou lin. nezávislé

Důkaz: Nechť

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = \vec{0}$$

Skalárně vynásobíme tuto rovnici vektorem $\bar{v}_1$

$$\langle a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k, v_1 \rangle = \langle \vec{0}, \vec{v}_1 \rangle$$

$$a_1 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{\neq 0} + a_2 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{= 0} + \underbrace{\dots}_{= 0} = 0$$