Postup. Má platiť $[v_1] = [u_1]$, preto zvolíme

$$v_1 = u_1$$

Ďalej má platiť $[v_1, v_2] = [u_1, u_2]$

preto hľadáme v_2 v tvare

$$v_2 = u_2 - a_1 v_1$$

Chceme, aby $\langle v_2, v_1 \rangle = 0$ Skalárny súčin s v_1 dáva

$$0 = \langle v_2, v_1 \rangle = \langle u_2, v_1 \rangle - a_1 \langle v_1, v_1 \rangle$$

$$a_1 = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}$$

Zvolíme-li takto a_1 dostaneme v_2 kolmé na v_1.

Věta: Každý prostor se skal. součinem má ortonormální bázi.

Dk. Vezmeme nějakou bázi $u_1, u_2, \dots, u_n$, provedeme G-S Ort. proces dostaneme $v_1, v_2, \dots, v_n$ navzájem kolmé se stejným lin. obalem (ortogonální báze) a pak vezmeme

$$\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}$$

To je ortonormální báze.

$$\| c u \| = |c| \, \|u\|$$

$$\left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| = \frac{1}{\|u\|} \cdot \|u\| = 1$$

V dalším budeme pracovat v prostoru V se skal. součinem a $U \subseteq V$ bude nějaký jeho podprostor

$$v - P_U v \in U^\perp \iff \forall u \in U \ \langle v - P_U v, u \rangle = 0.$$

Ukážeme si, že kolmá projekce vždy existuje.

Nechť $u_1, u_2, \dots u_k$ je ortonormální báze podprostoru U

Doplníme ji na bázi $u_1, \dots u_k, u_{k+1}, \dots u_n$ ortonormální celého prostoru V.

Potom položíme

$$P_U v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2 + \dots \langle v, u_k \rangle u_k$$

$P_U v \in U$

Platí, že $v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$

$$\langle v, u_i \rangle = a_1 \underbrace{\langle u_1, u_i \rangle}_{=0} + \dots a_i \underbrace{\langle u_i, u_i \rangle}_{=1} + \dots + a_n \underbrace{\langle u_n, u_i \rangle}_{=0}$$

Posledek 1 $P_U : V \to U$ je linearna in sledi soharmeni

Dk $P_U v = \langle v, u_1\rangle u_1 + \dots + \langle v, u_k\rangle u_k$ je linearni v v.

Posledek 2 $V = U \oplus U^{\perp}$

Dk. Vemo, da $v = \underbrace{\langle v, u_1\rangle u_1 + \dots + \langle v, u_k\rangle u_k}_{U} + \underbrace{\langle v, u_{k+1}\rangle u_{k+1} + \dots + \langle v, u_n\rangle u_n}_{U^{\perp}}$

$\forall v \in V \ \exists u \in U$ a $\exists w \in U^{\perp}$

$v = u + w$

Naj $u \in U \cap U^{\perp}$, za nj velja $u \in U, u \in U_{\perp}$ $\langle u, u\rangle = 0$

$\|u\| = 0 \Rightarrow u = \vec{0}$.

$$\langle P_U v, u_i \rangle = \langle v, u_i \rangle$$

$$\langle a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3, u_i \rangle = \langle v, u_i \rangle$$

$$a_1 \langle u_1, u_i \rangle + a_2 \langle u_2, u_i \rangle + a_3 \langle u_3, u_i \rangle = \langle v, u_i \rangle \qquad i = 1, 2, 3$$

Věta: Hezké počítání s ortonormální bází

Nechť $v_1, v_2, \dots v_n$ je ortonormální báze prostoru V.

Pak souřadnice vektoru v v této bázi jsou dány skalárními součiny

(1) $$v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle v, v_n \rangle v_n$$

Dále skalární součin vektorů u, v v souřadnicích ortonorm. báze je

(2) $$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}, \quad \text{kde } (u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ (v)_\alpha = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

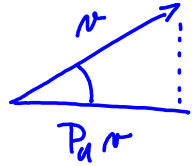
Věta: Vlastnosti kolmé projekce $(U \subseteq V)$

(a) Nechť $v \in V$. Potom $P_U v$ je jediný vektor z U s vlastností

$$\| v - P_U v \| = \min_{u \in U} \| v - u \|$$

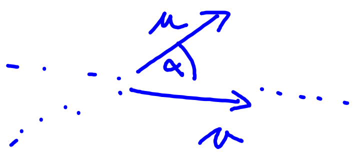
(b) $P_U v$ je (až na nenulový násobek) jediný vektor z U s vlastností

$$\frac{\| P_U v \|}{\| v \|} = \max_{\substack{u \in U \\ u \neq \vec{0}}} \underbrace{\frac{|\langle v, u \rangle|}{\|u\| \, \|v\|}}_{\cos \alpha}$$

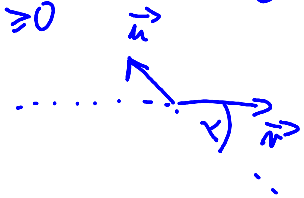


$\frac{\|P_U v\|}{\|v\|} = \cos$ odchylky

α je odchylka přímek $[u]$ a $[v]$ $\in [0, \frac{\pi}{2}]$



$\frac{\langle v, u \rangle}{\|u\| \|v\|} \geq 0$



$\frac{\langle v, u \rangle}{\|u\| \|v\|} \leq 0$

$$= \frac{|\langle P_u v, u\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} \underset{\text{Cauchyova nerovnost}}{\leq} \frac{\|P_u v\|\,\|u\|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{\|P_u v\|}{\|v\|}$$

Rovnost v Cauchyově nerovnosti nastane, jedině že u je násobek $P_u v$.

<u>Vzdálenost dvou bodů</u> $A, B \in V$

$$\mathrm{dist}(A,B) = \|A - B\|$$

Vzdálenost bodu A od afinního podprostoru $\mathcal{M} = B \dot{+} Z(\mathcal{M})$

$$\mathrm{dist}(A, \mathcal{M}) = \inf\{\|A - X\|,\ X \in \mathcal{M}\}$$

Důkaz: $X \in \mathcal{M}$, $X = B + u$, $u \in Z(\mathcal{M})$

$$\|A - X\| = \|A - B - u\| \underset{\text{předch. věta}}{\geq} \underbrace{\|A - B - P_{Z(\mathcal{M})}(A - B)\|}_{P_{Z^{\perp}(\mathcal{M})}(A-B)} = \|P_{Z^{\perp}(\mathcal{M})}(A - B)\|$$

$$v = P_U v + P_{U^\perp} v$$

$$P_{U^\perp} v = v - P_U v$$

(a) $\Rightarrow$ (c) $\quad M = B + u$ libovolné

$\|A - M\| = \|A - B - u\|$ nabývá minima pro $u = P_{Z(\mathcal{M})}(A - B)$

podle předchozí věty tedy

$$M = B + P_{Z(\mathcal{M})}(A - B)$$

Příklad $V=\mathbb{R}^4$, $A=(x_1,x_2,x_3,x_4)$

Chceme spočítat $\operatorname{dist}(A,\mathcal{M})$, kde $\mathcal{M}$ je nadrovina

$$\mathcal{M}=\{y\in\mathbb{R}^4;\ ay_1+by_2+cy_3+dy_4+e=0\},\qquad d\neq 0$$

Počítáme podle naší teorie

$$\operatorname{dist}(A,\mathcal{M}) = \|P_{Z(\mathcal{M})}^{\perp}(A-B)\| \qquad B\in\mathcal{M}$$

$$Z(\mathcal{M}):\ ay_1+by_2+cy_3+dy_4=0$$

$$=\langle (a,b,c,d)^T,(y_1,y_2,y_3,y_4)^T\rangle$$

$$B=\left(0,0,0,-\frac{e}{d}\right)$$

$$Z(\mathcal{M})^{\perp}=[(a,b,c,d)]=[u]$$

$$A-B=\left(x_1,x_2,x_3,x_4+\frac{e}{d}\right)$$

$$P_{Z(\mathcal{M})^{\perp}}(A-B)=\alpha u \qquad A-B-P_{Z(\mathcal{M})^{\perp}}(A-B)\perp u$$