Euklidovská geometrie - dokončení

Vzdálenost dvou afinních podprostorů $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ ve vekt. prostoru $\mathcal{U}$

$$\operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \inf \{ \| X - Y \|, \; X \in \mathcal{M}, Y \in \mathcal{N} \}$$

<u>Věta:</u> Vzdálenost $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ je rovna $\big(\mathcal{M} = A + Z(\mathcal{M}), \; \mathcal{N} = B + Z(\mathcal{N}) \big)$ velikosti kolmé projekce vektoru $A - B$ do $\big(Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}) \big)^{\perp}$.

Pro body $M \in \mathcal{M}$, $N \in \mathcal{N}$ jsou následující podmínky ekvivalentní

(a) $\operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \| M - N \|$ (body M, N realizují vzdálenost $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$)

(b) $M - N \perp Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N})$

(c) $M - N = P_{(Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}))^{\perp}} (A - B)$

$$= \| A - B - P_{Z(m)+Z(n)}(A-B) \|^2 + \| P_{Z(m)+Z(n)}(A-B) + u - v \|^2$$

Minimalita znamená, že $\| P_{Z(m)+Z(n)}(A-B) + u - v \| = 0$

$$v - u = P_{Z(m)+Z(n)}(A-B)$$

$$M - N = A - B + u - v = A - B - P_{Z(m)+Z(n)}(A-B)$$

$$M - N \qquad = P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B)$$

$(b) \Longleftrightarrow (c)$ $\quad M - N \perp Z(m)+Z(n)$

Stejně (obráceně) $\quad M - N = P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B)$

$\Longrightarrow \|M - N\|^2$ je minimální

Riešením rovníc nájdeme M a N

$$dist(m,n) = \|M - N\|$$

2. postup Najskôr spočítame $P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B)$

$$(Z(m)+Z(n))^\perp = \{z \in \mathbb{R}^5, \langle z, u_1\rangle = 0, \langle z, u_2\rangle = 0, \langle z, v_1\rangle = 0, \langle z, v_2\rangle = 0\}$$

Predp. že $(Z(m)+Z(n))^\perp = [z]$

$$P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B) = tz, \quad t \in \mathbb{R}$$

Spočítame z rovnice

$$\langle \underbrace{A-B-tz}_{\perp z}, z\rangle = 0$$

$$dist(m,n) = \|tz\|$$

Odchylka dvou afinních podprostorů

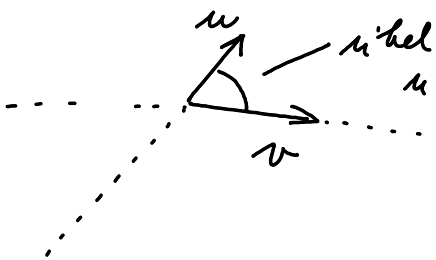
Odchylka dvou afinních podprostorů = odchylka jejich zaměření

$$\sphericalangle(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \sphericalangle(Z(\mathcal{M}), Z(\mathcal{N}))$$

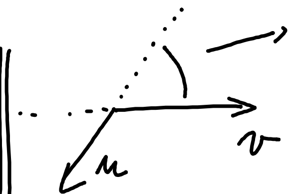
Definice odchylky dvou podprostorů U a V

1. $U = [u]$, $V = [v]$, $u \neq \vec{o}$, $v \neq \vec{o}$

$$\cos \sphericalangle([u], [v]) = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|} \qquad \sphericalangle([u], [v]) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$



úhel mezi u a v je odchylka $[u]$ a $[v]$

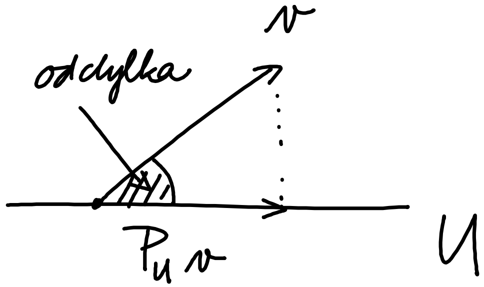


odchylka $[u]$ a $[v]$ je úhel mezi $-u$ a v

Věta Odchylka přímky $[v]$ $(v \neq \vec{o})$ od podprostoru U je

$$\cos\left(\measuredangle\, [v], U\right) = \frac{\|P_U v\|}{\|v\|}$$

Důkaz:



Podle věty z minulé přednášky

$$\frac{\|P_U v\|}{\|v\|} = \max \frac{|\langle v, u\rangle|}{\|v\|\,\|u\|}$$

$$= \max_{u \in U \setminus \{\vec{o}\}} \cos\left(\measuredangle [u], [v]\right)$$

$$= \cos \min_u \left(\measuredangle [u], [v]\right)$$

$$= \cos \measuredangle\left([v], U\right)$$

VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY

Lineární zobrazení φ z prostoru U do téhož prostoru U nazýváme

- lineární endomorfismus
- operátor (lineární)
- lineární transformace

$$\varphi : U \to U$$

Matice lin. operátoru v dané bázi $\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ prostoru U je matice typu $n \times n$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \Big((\varphi(u_1))_\alpha \; (\varphi(u_2))_\alpha \; \ldots \; (\varphi(u_n))_\alpha \Big)$$

Invariantní podprostor

Nechť $\varphi : U \to U$. Řekneme, že podprostor $V \subseteq U$ je invariantní vzhledem k φ, jestliže

$$\varphi(V) \subseteq V$$

Příklady

Triviální inv. podprostory jsou $\{\vec{o}\}$ $\quad \varphi(\vec{o}) = \vec{o}$

$U \quad \varphi : U \to U$

jiné. $\ker \varphi \subseteq U \quad v \in \ker \varphi, \ \varphi(v) = \vec{o} \in \ker \varphi$

$$B = (v_1, v_2, e_3, e_4)$$

$$(\varphi)_{B,B} = \left((\varphi(v_1))_B \ (\varphi(v_2))_B \ (\varphi(e_3))_B \ (\varphi(e_4))_B \right)$$

$$= \left((v_1 + 2v_2)_B \ (-2v_1 + v_2)_B \ \cdots \ \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1 + 4e_3 - e_4 \qquad \varphi(e_4) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = -3v_1 + 2v_2 + e_3 + 4e_4$$

Dokončení příkladu

$\varphi(x) = Ax$

$$W = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

lze ukázat, že $\varphi(W) \subseteq W$

$$\begin{array}{cc} w_3 & w_4 \end{array}$$

$$\varphi(w_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 4w_3 - w_4 \in W$$

$$\varphi(w_4) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ +1 \\ 4 \end{pmatrix} = +w_3 + 4w_4 \in W$$

$\gamma = (v_1, v_2, w_3, w_4)$

$$(\varphi)_{\gamma,\gamma} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$$