Definice: Vektor $v \neq \vec{o}$ se nazývá vlastní vektor lin. operátoru φ, jestliže existuje $\lambda \in K$ tak, že $\varphi(v) = \lambda v$. $\quad (\varphi - \lambda \, id) v = \vec{o}$

Číslo λ se nazývá vlastní číslo.

Pro nulový vektor je $\varphi(\vec{o}) = \vec{o} = \lambda \vec{o}$ pro všechna $\lambda \in K$

Ť. ...dt α je nějaká báze v prostoru U. Je-li v vlastní vektor a λ vlastní číslo pak
$$(\varphi - \lambda id) v = \vec{o}$$

Tuto rovnici napíšeme v souřadnicích báze α
$$((\varphi - \lambda id) v)_\alpha = (\vec{o})_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$(\varphi - \lambda id)_{\alpha,\alpha} (v)_\alpha = 0$$

$\det(A - \lambda E)$ se nazývá char. polynom matice A

Platí tedy: λ je vlastní číslo operátoru φ právě tehdy je kořenem char. polynomu matice $A = (\varphi)_{\alpha,\alpha}$

To je způsob, jakým se vlastní čísla počítají.

Jestliže známe vlastní čísla operátoru φ, můžeme spočítat jeho vlastní vektory tak, že pro každé vlastní číslo λ najdeme netriviální řešení homogenní soustavy

$$(A - \lambda E)\,x = \bar{o}$$

Tím dostaneme souřadnice vlastního vektoru v, $x = (v)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Jestliže $\alpha = (u_1, \ldots, u_n)$, pak $v = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n$.

Definice Char polynom lin operátoru $\varphi : U \to U$ je polynom

$$\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda I \right)$$

kde α je lib. báze v U

Něco málo o kořenech polynomů

Uvažujme polynom $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$

To je polynom stupně n. Stupeň nulového polynomu je $-\infty$.

$$\text{st}(p \cdot q) = \text{st}\, p + \text{st}\, q$$

x_0 je kořenem polynomu p, jestliže $p(x_0) = a_n x_0^n + \dots + a_1 x_0 + a_0 = 0$

Věta: x_0 je kořenem polynomu p, právě když

$$p(x) = (x - \lambda)\, q(x) \quad \text{st}\, q = \text{st}\, p - 1.$$

V případě char. polynomu tvaru

$$p(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

mohou být racionální kořeny pouze celočíselné a musí dělit číslo a_0.

To znamená, že při hledání celočíselných kořenů zkusíme nejdříve dělitele a_0.

Opět k vlastním číslům

Algebraická násobnost vlastního čísla λ operátoru φ je násobnost λ jako kořene char. polynomu.

Geometrická násobnost vlastního čísla λ je

$$\dim \ker(\varphi - \lambda\, id)$$

Tj. je-li λ vlastní číslo, pak $\exists$ nenulový $v \neq \vec{o}$ tak, že $\varphi(v) = \lambda$ ...

Příklady

① $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Ax \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Vlastní čísla jsou kořeny char. polynomu

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3$$

jediné vlastní číslo je 2 alg. násobnosti $\underline{\underline{3}}$

Hledáme vlastní podprostor

$$(A - 2E)x = 0 \qquad \ker(A - 2E) = \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0$$

geom. násobnost vl. čísla 2 je $\underline{\underline{3}}$

3) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Cx \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Vlastní čísla λ jsou kořeny

$$\det(C - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3$$

Vlastní číslo 2 má alg. násobnost $\underline{\underline{3}}$

Geom. násobnost

$$(C - \lambda E)x = 0$$

Řešení

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$x = (t, 0, 0)^T$

$\dim \ker (C - \lambda E) = 1$

geom. násobnost $= \underline{\underline{1}}$

Char. polynom ~~matice~~ operátoru φ je

$$\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right) = \det\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0-\lambda & & 0 & \\ & \ddots & & B \\ 0 & & \lambda_0-\lambda & \\ \hline & 0 & & C-\lambda E \end{array}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda_0-\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_0-\lambda \end{pmatrix} \cdot \det\left(C-\lambda E\right)$$

$$= (\lambda_0-\lambda)^k \det\left(C-\lambda E\right)$$

$\Rightarrow$ alg. násobnost kořene λ_0 je aspoň k.

geom násobnost $\leq$ alg. násobnost

$$\varphi(a_1 u_1 + \dots + a_k u_k) = \varphi(\vec{o})$$
$$a_1 \varphi(u_1) + \dots + a_k \varphi(u_k) = \vec{o}$$

(2) $$a_1 \lambda_1 u_1 + a_2 \lambda_2 u_2 + \dots + a_{k-1} \lambda_{k-1} u_{k-1} + a_k \lambda_k u_k = \vec{o}$$

Od rovnice (2) odečteme λ_k násobek rovnice (1).

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k) u_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_k) u_2 + \dots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) u_{k-1} + \underbrace{a_k(\lambda_k - \lambda_k) u_k}_{\vec{o}} = \vec{o}$$

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k) u_1 + \dots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) u_{k-1} = \vec{o}$$

Z ind. předpokladu plyne, že $u_1 \dots u_{k-1}$ jsou lin. nezávislé a proto

$$a_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)}_{\neq 0} = a_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_k)}_{\neq 0} = \dots = a_{k-1} \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)}_{\neq 0} = 0,$$

Proto $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 0$.

Důkaz: Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ jsou navzájem různá vlastní čísla

$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_{k-1} \neq \lambda_{k+1} = \ldots = \neq$

a nechť geom nás λ_1 + geom nás λ_2 + . . + geom nás $\lambda_k = n = \dim U$

Vezmeme báze podprostorů $\ker(\varphi - \lambda_i \, id)$

Podobně jako v předchozí větě lze ukázat, že spojením těchto bází dostaneme n lineárně nezávislých vektorů, tedy bázi prostoru U. Prvky báze jsou vlastní vektory, proto

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\varphi(u_i) = \lambda_i u_i$$