UNITÁRNÍ a ORTOGONÁLNÍ OPERÁTORY

Definice: U vekt. prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$

nad $\mathbb{C}$: operátor $\varphi: U \to U$ se nazývá unitární, jestliže

$$\forall u, v \in U: \quad \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

nad $\mathbb{R}$ operátor $\varphi: U \to U$ se stejnou vlastností se nazývá ortogonální (zachovává délky a úhly)

Příklady: Ze střední školy:

(1) otočení o úhel α kolem počátku v $\mathbb{R}^2$

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Věta. Následující tvrzení jsou ekvivalentní

(1) $\varphi: U \to U$ je unitární (ortogonální)

(2) φ převádí ortonormální bázi na ortonormální bázi

(3) je-li α ortonormální báze, pak matice $A = (\varphi)_{\alpha,\alpha}$

má vlastnost

$$A^{-1} = \overline{A}^{T} \qquad \left(A^{-1} = A^{T} \right)$$

prvek v A $\quad a+ib$

$\qquad\qquad\qquad\downarrow$

prvek v $\overline{A}$ $\quad a-ib$

(1) <=> (2)

$u_1, \dots u_n$ ortonorm $\quad \langle \varphi(u_i), \varphi(u_j) \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$\varphi(u_1) \dots \varphi(u_n)$ je ortonormální

Obráceně: Je-li $\varphi(u_1), \dots \varphi(u_n)$ ortonormální, je φ unitární, resp. ortogonální

$$u = \sum a_i u_i, \quad v = \sum b_j u_j$$

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle \varphi(\sum a_i u_i, \sum b_j u_j \rangle = \sum_{i,j} a_i \overline{b_j} \underbrace{\langle \varphi(u_i), \varphi(u_j) \rangle}_{0 \text{ nebo } 1}$$

$$= \sum_i a_i \overline{b_i}$$

$$\langle u, v \rangle = \dots = \sum_i a_i \overline{b_i}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

<u>Definice</u> Reálnou matici A tvaru $n \times n$, pro kterou $A \cdot A^T = E$, nazýváme <u>ortogonální</u>

Komplexní matici A tvaru $n \times n$, pro kterou $A \cdot \overline{A}^T = E$, nazýváme <u>unitární</u> maticí

<u>Determinant</u> unitárních a ortogonálních matic

Ortogonální: $A \cdot A^T = E \Rightarrow \det (A \cdot A^T) = \det E = 1$

$\det A \cdot \det A = \det A \cdot \det A^T = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$

Dk (a) Nechť $\varphi(u) = \lambda u$, $u \neq \vec{o}$

$\underset{\neq 0}{\lambda \cdot \bar{\lambda} \langle u, u \rangle} = \langle \lambda u, \lambda u \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle = \underset{\neq 0}{\langle u, u \rangle}$

Tedy $|\lambda|^2 = \lambda \cdot \bar{\lambda} = 1$.

(b) Nechť $\varphi(u) = \lambda_1 u$, $\varphi(v) = \lambda_2 \cdot v$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $u \neq \vec{o}$, $v \neq \vec{o}$.

$$\underline{\lambda_1 \bar{\lambda}_2 \langle u, v \rangle} = \langle \lambda_1 u, \lambda_2 v \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \underline{\langle u, v \rangle}$$

$$(\lambda_1 \bar{\lambda}_2 - 1) \langle u, v \rangle = 0$$

~~Kdyby~~ Víme už, že $|\lambda_1| = 1$, $|\lambda_2| = 1$ $\lambda_2^{-1} = \bar{\lambda}_2$

Kdyby $0 = \lambda_1 \bar{\lambda}_2 - 1 = \lambda_1 \lambda_2^{-1} - 1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ což není možné.

Tedy nutně $\langle u, v \rangle = 0$.

Nechť toto vlastní číslo je λ_1 a příslušný vl. vektor $u_1 \neq \vec{0}$. $\lambda_1 \neq 0$

$U = [u_1] \oplus \underbrace{[u_1]^T}_{V}$ $\qquad |u_1| = 1$

$\dim V = n - 1$

Ukažeme, že V je invariantní podprostor pro φ.

$v \in V$, chceme ukázat že $\varphi(v) \in V$

$\langle \varphi(v), u_1 \rangle = \lambda_1 \langle \varphi(v), \lambda_1 u_1 \rangle = \lambda_1 \langle \varphi(v), \varphi(u_1) \rangle$

$\lambda_1 \overline{\lambda_1} = 1$

$= \lambda_1 \underbrace{\langle v, u_1 \rangle}_{0} = 0$

Tedy $\varphi(v) \in V$. $\varphi/V : V \longrightarrow V$ je unitární operátor a my na něj můžeme použít ind. předp. Tj existuje ortonormální báze $u_2, \ldots u_n$ prostoru V tvořená vl. vektory. Pak $u_1, u_2, \ldots u_n$ je ortonormální báze prostoru U tvořená vl. vektory.

Vlastní podprostory ortogonálních operátorů

Pro jednoduchost berme pouze ortogonální zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

tvaru $\varphi(x) = Ax$.

A je ortogonální matice $A \cdot A^T = E$. Tato matice ale určuje

také zobrazení $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $\Phi(x) = Ax$, $x \in \mathbb{C}^n$

Toto zobrazení Φ je unitární neboť jeho matice A splňuje

$$A \cdot \bar{A}^T = A \cdot A^T = E$$

To znamená, že matice A má všechny vlastnosti jako mají unitární matice, především vlastní čísla jsou tvaru

$$\lambda = \cos\alpha + i \sin\alpha$$

Vlastní vektor k λ má tvar $u = u_1 + i u_2 \in \mathbb{C}^n$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$

$$A(u_1 + i u_2) = (a+ib)(u_1 + i u_2)$$

$$\underbrace{A u_1}_{\in \mathbb{R}^n} + i \underbrace{A u_2}_{\mathbb{R}^n} = (a+ib)(u_1 + i u_2)$$

$$\overline{A u_1 + i A u_2} = \overline{(a+ib)(u_1 + i u_2)}$$

$$A u_1 - i A u_2 = (a-ib)(u_1 - i u_2)$$

$$A(u_1 - i u_2) = (a-ib)(u_1 - i u_2) \Rightarrow u_1 - i u_2 \text{ je vlastný vektor k } \overline{\lambda}$$

Pre unitárne operátory platí

jestliže $\lambda \neq \overline{\lambda}$, pak $\langle u_1 + i u_2, u_1 - i u_2 \rangle = 0$

$$\underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle - \langle u_2, u_2 \rangle}_{\text{reálna zložka} = 0} + i \left(\langle u_1, u_2 \rangle + \langle u_2, u_1 \rangle \right) = 0$$

$\|u_1\| = \|u_2\|$

im. zložka $= 0$

$\langle u_1, u_2 \rangle = 0$

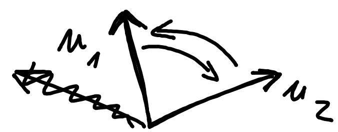
Vzemimo še $V = [u_1, u_2]$ t.d. $\alpha = (u_2, u_1)$

$\varphi|V : V \longrightarrow V$

$$(\varphi|V)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$\varphi|V$ je vrtenje za kot α od vektorja u_2 k vektorju u_1.

$\beta = (u_1, u_2)$



$$(\varphi|V)_{\beta,\beta} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

Stačí dk, že tyto podprostory jsou navzájem kolmé

Vlastní čísla

$\lambda = a+ib,\ b \neq 0$ .... vlastní vektor $u_1 + i u_2$ $\qquad \lambda \neq \mu, \overline{\mu}$

$\mu = c+id,\ d \neq 0$ ... vlastní vektor $v_1 + i v_2$

Chceme ukázat, že $[u_1, u_2] \perp [v_1, v_2]$

Víme, že $u_1 + i u_2$ a $v_1 + i v_2$ v $\mathbb{C}^n$ jsou na sebe kolmé

$u_1 + i u_2$ a $v_1 - i v_2$ v $\mathbb{C}^n$ jsou na sebe kolmé

$\langle u_1 + i u_2, v_1 + i v_2 \rangle = 0 \qquad \langle u_1, v_1 \rangle + \langle u_2, v_2 \rangle = 0 \qquad -\langle u_1, v_2 \rangle + \langle u_2, v_1 \rangle = 0$

$\langle u_1 + i u_2, v_1 - i v_2 \rangle = 0 \qquad \langle u_1, v_1 \rangle - \langle u_2, v_2 \rangle = 0 \qquad \langle u_1, v_2 \rangle + \langle u_2, v_1 \rangle = 0$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$\langle u_1, v_1 \rangle = \langle u_2, v_2 \rangle = 0 \qquad \langle u_1, v_2 \rangle = \langle u_2, v_1 \rangle = 0$

Vektory u_1, u_2, u_3 jsou na sebe navzájem kolmé. Lze je zvolit jednotkové

Pak tvoří orton. bázi

$$\alpha = (u_1, u_2, u_3)$$

V této bázi φ

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

<u>Příklad</u>: $A = \begin{pmatrix} 2/3 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = 1 \longrightarrow u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$$

$$\lambda_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \Bigg\| \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_3} + i \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}}_{u_2}\right)$$

$$\lambda_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$