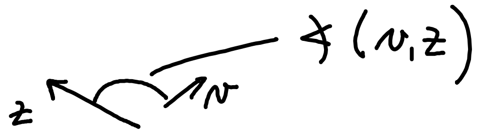
Odchylky afinních podprostorů

Jestliže M a N jsou dva afinní podprostory ve vekt. prostoru U,
pak jejich odchylka $\sphericalangle(M, N)$ je definována jako odchylka jejich
zaměření $\sphericalangle\big(Z(M), Z(N)\big)$

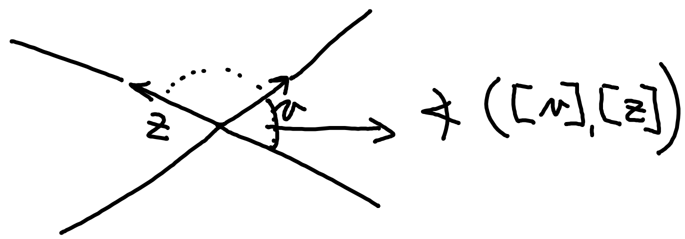
Odchylka vekt. podprostorů $V, Z \subseteq U$ se definuje v několika krocích
takto.

(1) $\cancel{V} = [v]$, $v \neq \vec{o}$, $Z = [z]$, $z \neq \vec{o}$.



Pak $\sphericalangle\big([v],[z]\big) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\cos \sphericalangle\big([v],[z]\big) = \frac{|\langle v, z\rangle|}{\|v\|\,\|z\|}$$



2

2) jestliže $V \cap Z = \{\vec{o}\}$, pak $\sphericalangle(V,Z) = \inf\limits_{\substack{v \in V\setminus\{o\} \\ z \in Z\setminus\{o\}}} \sphericalangle([v],[z])$

3) jestliže $V \subseteq Z$ nebo $Z \subseteq V$, pak $\sphericalangle(V,Z) = 0$

4) jestliže $V \cap Z \neq \{\vec{o}\}$, pak

$$\sphericalangle(V,Z) = \sphericalangle\left(V \cap (V\cap Z)^{\perp},\ Z \cap (V \cap Z)^{\perp}\right)$$

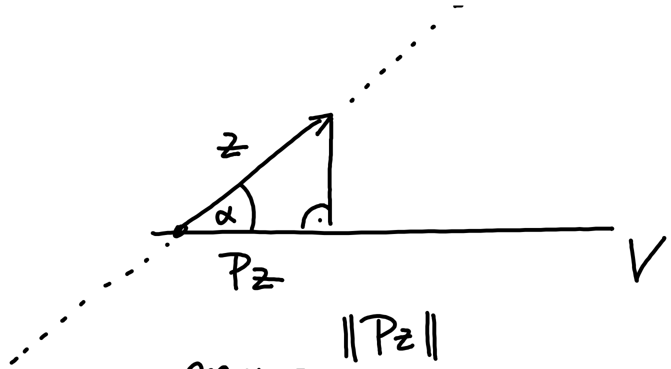
Ke (4) ukážeme, že $V \cap (V\cap Z)^{\perp} \cap Z \cap (V\cap Z)^{\perp} = V \cap Z \cap (V \cap Z)^{\perp} = \{\vec{o}\}$

3

Věta: Nechť $Z = [z]$, $V \subseteq U$. Potom

$$\cos \measuredangle([z], V) = \frac{\|P_V z\|}{\|z\|}$$

pro $z \neq \vec{o}$



$$\cos\alpha = \frac{\|Pz\|}{\|z\|}$$

Důkaz: Když jsme definovali kolmou projekci, tak jsme rovněž dokázali větu, že

$$\max_{v \in V \setminus \{o\}} \frac{|\langle z, v\rangle|}{\|z\| \, \|v\|} = \frac{\|P_V z\|}{\|z\|}.$$

$\|$ podle definice

$\cos \measuredangle([z], V)$

4

Příklad. $U = \mathbb{R}^4$, $V = [e_1 + e_2,\ e_1 + e_2 + e_3]$ $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e_2 = \dots$

$Z = [e_2 + e_4,\ e_2 + e_3 + e_4]$

$V \cap Z = [e_2 + e_3]$ $\qquad (V \cap Z)^{\perp} = [e_1, e_2, e_4]$

$V \cap (V \cap Z)^{\perp} = [e_1 + e_2]$

Odchylka V a Z je $\frac{\pi}{3}$.

$Z \cap (V \cap Z)^{\perp} = [e_2 + e_4]$

$\measuredangle(V, Z) = \measuredangle([e_1 + e_2], [e_2 + e_4])$

$$\cos \measuredangle([e_1 + e_2], [e_2 + e_4]) = \frac{|\langle e_1 + e_2, e_2 + e_4 \rangle|}{\|e_1 + e_2\| \, \|e_2 + e_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

5

VLASTNÍ ČÍSLA A VEKTORY

Lin. zobrazení $\varphi : U \to U$ se nazývá lin. endomorfismus
lin. operátor

1. Nechť α je báze prostoru U. Potom matice $\varphi : U \to U$ v bázi α je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\alpha , (\varphi(u_2))_\alpha , \dots , (\varphi(u_n))_\alpha \right)$$

pro $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$.

2. α, β dvě báze prostoru U

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = \underbrace{(id)_{\beta,\alpha}}_{= (id)^{-1}_{\alpha,\beta}} (\varphi)_{\alpha,\alpha} (id)_{\alpha,\beta}$$

6

A, B jsou podobné matice (obě čtvercové), jestliže existuje invertibilní matice P taková, že

$$B = P^{-1} A P$$

V našem případě $B = (\varphi)_{\beta,\beta}$, $A = (\varphi)_{\alpha,\alpha}$, $P = (id)_{\alpha,\beta}$

INVARIANTNÍ PODPROSTOR

$\varphi : U \to U$ lin. operátor. $V \subset U$ se nazývá invariantní podprostor (vůči φ), jestliže

$$\varphi(V) \subset V.$$

7

Každý operátor $\varphi: U \to U$ má dva tzv. triviální inv. podprostory

$\{\vec{0}\}$ $\quad U$

__Příklad__ : $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \qquad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} -3 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{matrix}$$

$$V = \Big[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_2} \Big]$$

$\varphi(u_1) = u_1 + 2u_2 \in V$

$\varphi(u_2) = -2u_1 + u_2 \in V$

$\varphi(au_1 + bu_2) = a\varphi(u_1) + b\varphi(u_2) \in V$

$\varphi(V) \subset V$.

V je invariantní podprostor

8

Vezmeme v $\mathbb{R}^4$ bázi $\mathcal{B} = (\underbrace{u_1, u_2}_{\text{báze } V}, e_3, e_4)$

$$(\varphi)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

spočítat samalu doma, kdo tomu nerozumí, neudělá zkoušku!

<u>Věta:</u> Nechť $\varphi: U \to U$ je lin. operátor s inv. podprostorem V dimenze $k < \dim U = n$. Nechť $\mathcal{B}$ je báze U taková, že prvních k vektorů je báze podprostoru V. Pak

$$(\varphi)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \underbrace{O}_{k} & \underbrace{C}_{n-k} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array}$$

9

$\underline{\text{Dk}}$: Nechť $B = (\underbrace{u_1, u_2, \ldots u_k}_{\text{báze } V}, u_{k+1}, \ldots u_n)$ $\quad u_1, \ldots u_k \in V$

Protože pro $i = 1, 2, \ldots k$ je

$$\varphi(u_i) = a_{1i} u_1 + a_{2i} u_2 + \ldots + a_{ki} u_k + 0 \cdot u_{k+1} + 0 \cdot u_{k+2} + \ldots$$

neboť $\varphi(u_i) \in V$.

i-tý sloupec matice $(\varphi)_{B, B}$ je

$$\begin{array}{c} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}$$

10

Pokračování v příkladu

$$W = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{matrix} u_3 & & u_4 \end{matrix}$$

W je invariantní podprostorem operátoru φ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(u_3) = 4u_3 - u_4 \in W$$

$$\varphi(u_4) = u_3 + 4u_4 \in W$$

$$\varphi(V) \subset V$$

$$\varphi(W) \subset W$$

$$\begin{matrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{matrix}$$

Báze $\mathbb{R}^4$ $\quad \mu = (u_1, u_2, u_3, u_4)$

$$(\varphi)_{\mu,\mu} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\mathbb{R}^4 = V \oplus W$$

11

VĚTA Nechť $\varphi: U \to U$, $U = V \oplus W$ a V, W jsou invariantní vůči φ. Vezmeme bázi β prostoru U takovou, že prvních k vektorů tvoří bázi V, dalších $n-k$ vektorů tvoří bázi W. Pak

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{}_{k} & \underbrace{}_{n-k} \end{array} \end{array}$$

Důkaz je stejný jako v předchozím případě. Kdo rozumí matici zobrazení, tak ho DÁ.

12

Význam předchozí věty. Místo φ na U se stačí zabývat

$$\varphi/V : V \to V$$

$$\varphi/W : W \to W,$$

tedy zobrazeními na menších prostorech

$u = v + w$

$\varphi(u) = \varphi(v) + \varphi(w)$ Znalost φ/V, φ/W mi řekne vše o φ.

Proto nás zajímají JEDNOROZMĚRNÉ INVARIANTNÍ PODPROSTORY.

13

$\varphi : U \to U$

$V \subseteq U$ je jednorozměrný inv podprostor, existuje $v \neq \vec{o}$

$$V = [v]$$

$\varphi(v) \in V$

Tedy $\varphi(v) = \lambda v$ pro nějaké λ.

$$\varphi(av) = a\,\varphi(v) = a\lambda v = \lambda(av).$$

VLASTNÍ VEKTOR operátoru $\varphi : U \to U$ je NENULOVÝ vektor $v \in U$ takový, že

$$\varphi(v) = \lambda v$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{K}$. Toto λ nazýváme VLASTNÍ ČÍSLO operátoru φ.

13

Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů:

Začneme u zobrazení $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $\varphi(x) = Ax$

Nechť $v \in \mathbb{K}^n$ je vlastní vektor s vl. číslem λ, tj.

$$\varphi(v) = \lambda v$$

$$Av = \lambda v \quad v \neq 0$$

$$Av - \lambda v = 0$$

$$(A - \lambda E) v = 0$$

λ je vl. číslo, právě když homogenní soustava $(A - \lambda E)v = 0$ má netriviální řešení. Dimenze prostoru řešení je

$$n - h(A - \lambda E)$$

13

λ je vl. číslo právě když $h(A-\lambda E)$ $\cancel{\neq 1}$ $< n$

a to nastane právě když

$$\det(A \quad \lambda E) = 0.$$

$\det(A-\lambda E)$ je polynom stupně n v proměnné λ, neboť

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots \end{pmatrix} = (-\lambda)^n + \dots\ . + \det A\cdot\lambda^0$$

Tento polynom se nazývá <u>charakt. polynom matice</u> A.

14

Známe-li vlastní číslo λ_0 operátoru $\varphi(x) = Av$, $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

tak příslušné vlastní vektory jsou (netriviální) řešení homogenní soustavy

$$(A - \lambda_0 E)v = O \qquad (\Leftrightarrow\ Av = \lambda_0 v)$$

Tuto soustavu umíme řešit.

Věta: Podobné matice mají stejné charakteristické polynomy

Důkaz: $B = P^{-1}AP$

$$\det(B - \lambda E) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}EP) = \det(P^{-1}(A - \lambda E)P) =$$

(15)

$$= \det P^{-1} \det (A-\lambda E) \det P = \frac{1}{\det P} \cdot \det(A-\lambda E) \det P = \det(A-\lambda E)$$

Proto můžeme definovat

Nechť $\varphi: U \to U$ je lin. operátor a α nějaká báze prostoru U

Potom charakteristický polynom operátoru φ je

$$\det\left((\varphi)_{\alpha\alpha} - \lambda E\right)$$

Tato definice je nezávislá na výběru báze α

16

Příklad: $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-2-\lambda) + 4 =$$

$$= (\lambda+2)(\lambda-3) + 4 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1)$$

φ má vl. čísla $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$

Vl. vektor k $\lambda_1 = -1$

$$(A+E)x = 0 \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 4x_1 - x_2 = 0$$

Řešení $a \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = a v_1$

Vl. vektor k $\lambda_2 = 2$

$$(A-2E)x = 0 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Řešení $b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b v_2$

17

Polynom stupně n je

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0.$$

λ_0 je kořen polynomu $p(\lambda)$, jestliže

$$p(\lambda_0) = 0$$

Větička λ_0 je kořenem polynomu p stupně ≥ 1, právě když

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)\, q(\lambda)$$

kde q je polynom stupně $n-1$.

Dk: Jestliže $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)\, q(\lambda)$, pak $p(\lambda_0) = (\lambda_0 - \lambda_0)\, q(\lambda_0) = 0$

(18)

Nechť $p(\lambda_0)=0$. Pak

$$p(\lambda)=p(\lambda)-p(\lambda_0)=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_1\lambda+a_0-a_n\lambda_0^n-a_{n-1}\lambda_0^{n-1}-\dots$$

$$\dots-a_1\lambda_0-a_0=a_n(\lambda^n-\lambda_0^n)+a_{n-1}(\lambda^{n-1}-\lambda_0^{n-1})+\dots+a_1(\lambda-\lambda_0)=$$

Ze všech rozdílů

$\lambda^i-\lambda_0^i$ lze vytknout $\lambda-\lambda_0$, neboť platí

$$\lambda^2-\lambda_0^2=(\lambda-\lambda_0)(\lambda+\lambda_0)$$

$$\lambda^3-\lambda_0^3=(\lambda-\lambda_0)(\lambda^2+\lambda\lambda_0+\lambda_0^2)$$

$$\lambda^i-\lambda_0^i=(\lambda-\lambda_0)(\lambda^{i-1}+\lambda^{i-2}\lambda_0+\lambda^{i-3}\lambda_0^2+\dots+\lambda\lambda_0^{i-2}+\lambda_0^{i-1})$$

pokračování ně $n-1$)

Definice λ_0 je kořen násobnosti k polynomu $p(\lambda)$ stupně n, jestliže existuje polynom $q(\lambda)$ stupně $n-k$ tak, že

$$p(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^k q(\lambda), \qquad q(\lambda_0) \neq 0.$$