1

Vlastní čísla a vlastní vektory

$\varphi : U \longrightarrow U$, U nad $\mathbb{K}$

$\lambda \in \mathbb{K}$ je vl. číslo, jestliže existuje $u \in U \setminus \{\vec{o}\}$ tak, že

$$\varphi(u) = \lambda u$$

λ počítáme jako kořen char. polynomu

$$\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E \right) = (-\lambda)^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

λ_0 je kořen polynomu $p(\lambda)$ násobnosti k, jestliže

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k q(\lambda) , \quad q(\lambda_0) \neq 0.$$

2

Nechť λ_0 je vl. číslo operátoru φ. Algebraická násobnost vl. čísla je pak definována jako násobnost λ_0 coby kořene char. polynomu.

Jestliže λ_0 je vl. číslo, pak existuje nenulový vektor u

$$\varphi(u) = \lambda u$$

$$\varphi(u) - \lambda u = 0$$

$$(\varphi - \lambda id)(u) = 0 \qquad \varphi - \lambda id : U \to U$$

Tedy $$\ker(\varphi - \lambda id) \neq \{\vec{0}\}$$

Geometrická násobnost vl. čísla λ_0 je rovna

$$\dim \ker(\varphi - \lambda id)$$

3

Věta. Algebraická násobnost vl. čísla $\geq$ geometrická násobnost.

Důkaz. Nechť $\dim \ker(\varphi - \lambda_0 id) = k$. Vezmeme bázi tohoto jádra $u_1, u_2, \dots, u_k$ a doplníme ji na bázi $(u_1, u_2, \dots u_k, \dots u_n) = \alpha$ celého prostoru U. Potom $\ker(\varphi - \lambda_0 id)$ je invariantní podprostor neboť pro $u \in \ker(\varphi - \lambda_0 id)$ je

$$\varphi(u) = \lambda_0 u \in \ker(\varphi - \lambda_0 id)$$

Tedy matice $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ vypadá takto.

$$(\varphi)_{\alpha\alpha} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & & 0 & \\ & \lambda_0 & & B \\ 0 & & \ddots \; \lambda_0 & \\ \hline & 0 & & C \end{array}\right)$$

4

$$\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right) = \det \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 - \lambda & & & \\ & \lambda_0 - \lambda & & B \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_0 - \lambda & \\ \hline & 0 & & C - \lambda E \end{array}\right) = \det \begin{pmatrix} \lambda_0 - \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_0 - \lambda \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \det(C - \lambda E) = (\lambda_0 - \lambda)^k \det(C - \lambda E)$$

Tedy alg. násobnost λ_0 coby kořene char. polynomu je aspoň k = geom. dimenze

(5)

<u>Příklad A</u> $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi(u) = 2u \quad (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Vl. číslo φ je pouze 2 a $\ker(\varphi - 2id) = \mathbb{R}^2$

geom. nás. = 2

$$\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2$$

al. násobnost je 2

<u>Příklad B</u> $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \psi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2$$ jediné vl. číslo 2 násobnosti algebraické 2

6

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x - 2x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Řešení $\ker(\varphi - 2id) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ x_1 \in \mathbb{R} \right\}$

$\dim = 1$

geom ~~dim~~ násobnost $\lambda_0 = 2$ je $1. <$ alg násobnost $= 2$

Všechna vl. čísla operátoru $\varphi : U \to U$ nazýváme SPEKTRUM operátoru φ.

(7)

Věta: Vlastní vektory k různým vl. číslům jsou lin. nezávislé.

Důkaz indukcí: Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ jsou různá vl. čísla operátoru $\varphi: U \to U$ a nechť $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou odpovídající vl. vektory. Potom $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou LN

Pro $k = 1$, je $u_1 \neq \vec{o}$ a je tedy LN.
Nechť věta platí pro $k \geq 1$. Mějme $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k, \lambda_{k+1}$ vl. čísla a vl. vektory $u_1, u_2, \dots u_k, u_{k+1}$. Dokážeme, že $u_1, \dots, u_{k+1}$ jsou LN.
Nechť $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_{k+1} u_{k+1} = \vec{o}$ (1)
aplikací operátoru φ dostaneme

8

$$a_1\varphi(u_1) + a_2\varphi(u_2) + \dots + a_k\varphi(u_k) + a_{k+1}\varphi(u_{k+1}) = \vec{o}$$

$$(2) \qquad a_1\lambda_1 u_1 + a_2\lambda_2 u_2 + \dots + a_k\lambda_k u_k + a_{k+1}\lambda_{k+1} u_{k+1} = \vec{o}$$

Spočítáme $(2) - \lambda_{k+1}(1)$:

$$a_1\lambda_1 u_1 - a_1\lambda_{k+1}u_1 + a_2\lambda_2 u_2 - a_2\lambda_{k+1}u_2 + \dots \; a_k\lambda_k u_k - a_k\lambda_{k+1}u_k$$

$$+ \underbrace{a_{k+1}\lambda_{k+1}u_{k+1} - a_{k+1}\lambda_{k+1}u_{k+1}}_{\vec{o}} = \vec{o}$$

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})u_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})u_2 + \dots + a_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})u_k = \vec{o}$$

Podle ind. předpokladu jsou $u_1, u_2, \dots u_k$ LN, proto

$$a_1\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} = \dots = a_k\underbrace{(\lambda_k - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0.$$

(9)

Dosazením do rovnice (1) dostaneme

$$a_{k+1} u_{k+1} = \vec{o}$$

Protože $u_{k+1} \neq \vec{o}$ (je to vl. vektor), je také $a_{k+1} = 0$

Tím jsme dokázali, že $u_1, \dots, u_{k+1}$ jsou LN.

VĚTA Nechť φ je lin. operátor na prostoru dimenze n a nechť součet geom. násobností jeho vl. čísel je roven n. Pak existuje báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

λ_i vl. čísla
každé tolikrát, kolik
činí jeho geom. násobnost.

10

Důkaz. Nechť $c_1, c_2, \dots c_k$ jsou všechna navzájem různá vl. čísla. Nechť $u_1, u_2, \dots \dots u_n$ je báze prostoru U seřazená z vl. vektorů pro čísl c_i, potom

$$\alpha = \underbrace{u_1 \dots u_{i_1}}_{\text{báze } \ker(\varphi - c_1 id)} \quad \underbrace{u_{i_1+1} \dots u_{i_2}}_{\text{báze } \ker(\varphi - c_2 id)} \quad \dots \quad \underbrace{u_{i_{k-1}+1} \dots u_{i_k}}_{\text{báze } \ker(\varphi - c_k id)}$$

Platí, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} c_1 & & & & & 0 \\ & c_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & c_1 & & \\ & 0 & & & c_2 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

c_1 se opakuje i_1 krát

c_2 se opakuje $i_2 - i_1$ krát

atd

11

Důsledek Pro operátor $\varphi: U \to U$ existuje báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$$

je diagonální, právě tehdy když existuje báze tvořená vl. vektory operátoru φ

Příklad $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ $\det(B-\lambda E) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

$\lambda_1 = 1$ příslušný vl. vektor je $(B-E)x = 0$ $v_1 = (1,1,2)^T$

$\lambda_2 = 2$ —— // —— $(B-2E)x = 0$ $v_2 = (1,0,1)^T$

$\lambda_3 = 3$ —— // —— $(B-3E)x = 0$ $v_3 = (1,2,2)^T$

12

$\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ $\quad \varphi(x) = Bx$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\varphi(v_1) = v_1 = 1\, v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$

$\varphi(v_2) = 2v_2 = 0\, v_1 + 2 \cdot v_2 + 0\, v_3$

$\varphi(v_3) = 3v_3 = 0\, v_1 + 0 \cdot v_2 + 3\, v_3$

Príklad operátor, ktorý v žiadnej báze nemá diagonálny tvar

$\varphi: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \quad \varphi(p) = p'$

Napíšme maticu φ v štand báze $\varepsilon = (1, x, x^2)$

$\varphi(1) = 0$

$\varphi(x) = 1$

$\varphi(x^2) = 2x$

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vl. čísla

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)^3$$

13

jediné vl. číslo je 0 alg. násobnosti 3

Geom. násobnost

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = 0$

$x_3 = 0$

x_1 libovolné

jediný vl. vektor je v $\mathbb{R}_2[x]$

$$p(x) = a \quad \text{(konstantní polynom)}$$

$\mathbb{R}_2[x]$ nemá ~~bázi~~ tvořenou vl. vektory operátoru φ, proto ~~pro~~ žádné α

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} \text{ není diagonální}$$

14

Operátory unitární a samoadjungované jsou zvláštní typy lin. operátorů, které díky svým vlastnostem mají také krásné vl. vektory

UNITÁRNÍ a ORTOGONÁLNÍ OPERÁTORY

Definice Nechť U je vekt. prostor se skal. součinem nad $\mathbb{C}$. Operátor $\varphi: U \to U$ se nazývá UNITÁRNÍ, jestliže

$$\forall u, v \in U: \quad \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

15

Definice $\varphi: U \to U$, kde U je prostor se skal. součinem nad $\mathbb{R}$ se nazývá ORTOGONÁLNÍ, jestliže

$$\forall u, v \in U: \quad \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

Příklady ort. operátorů se středními úhly

jsou to všechny shodnosti, které zachovávají počátek

- otočení o úhel α kolem počátku v $\mathbb{R}^2$
- zrcadlení podle přímky procházející počátkem v $\mathbb{R}^2$
- otočení kolem přímky proch. počátkem v $\mathbb{R}^3$ o úhel α
- zrcadlení podle roviny nebo přímky proch. počátkem v $\mathbb{R}^3$.

16

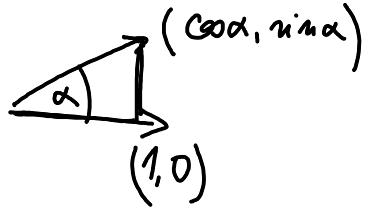
Ortog. zobrazení zachovává velikosti vektorů a úhly, které vektory svírají

$$\|\varphi(u)\|^2 = \langle \varphi(u), \varphi(u)\rangle = \langle u, u\rangle = \|u\|^2$$

Odchylka vektorů u, v (její cosinus)

$$\frac{\langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle}{\|\varphi(u)\| \, \|\varphi(v)\|} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \, \|v\|}$$

Otočení o úhel α v $\mathbb{R}^2$ $\quad \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

17

Každé ortog. nebo unitární zobrazení $U \to U$ je isomorfismus.

Důkaz $\|\varphi(u)\| = \|u\|$, tak $\varphi(u) = 0$ pouze pro $u = 0$

φ je prosté, $\varphi: U \to U$, tak φ je na

VĚTA Následující vlastnosti jsou ekvivalentní

(1) $\varphi : U \to U$ je unitární (ortogonální nad $\mathbb{R}$)

(2) φ převádí ortonormální bázi na ortonormální bázi

(3) Pro každou ortonormální bázi α má matice

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = A \quad \text{vlastnost} \quad A^{-1} = \overline{A}^{T} \quad \left(A^{-1} = A^{T} \text{ nad } \mathbb{R}\right)$$

(18)

Důkaz.

(1) => (2) Nechť $u_1, \dots, u_n$ je ortonormální báze. Pak

$$\langle \varphi(u_i), \varphi(u_j) \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Tedy $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)$ tvoří ortonorm. bázi.

(3) => (1) Nechť $u_1, \dots, u_n$ je ortonorm. báze a nechť $u = \sum a_i u_i$, $v = \sum b_j u_j$.

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle \varphi(\sum_i a_i u_i), \varphi(\sum_j b_j u_j) \rangle = \sum_{i,j} a_i \overline{b_j} \langle \varphi(u_i), \varphi(u_j) \rangle$$

$$= \sum_{i,j} a_i \overline{b_j} \langle u_i, u_j \rangle = \langle \sum_i a_i u_i, \sum_j b_j u_j \rangle = \langle u, v \rangle$$

$\langle \varphi(u_i), \varphi(u_j) \rangle = 0$ pro $i \neq j$, 1 pro $i = j$.

19

$(1) \Longleftrightarrow (3)$ Nechť $\alpha = (u_1, \dots, u_n)$ je ON báze, $u = \sum_i x_i u_i$, $v = \sum_j y_j u_j$

Víme, že $\langle u, v \rangle = \sum x_i \overline{y_i} = x^T \cdot \overline{y}$ $\qquad (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}$

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = (\varphi(u))_\alpha^T \cdot \overline{(\varphi(v))_\alpha} =$$

$$= \left(A\,(u)_\alpha\right)^T \cdot \overline{\left(A \cdot (v)_\alpha\right)}$$

$$= x^T \cdot A^T \cdot \overline{A} \cdot \overline{y}$$

$$\langle u, v \rangle = x^T \cdot \overline{y}$$

Tato rovnost nastane právě když $A^T \cdot \overline{A} = E$ dále platí

$$\overline{A}^T \cdot A = \overline{A^T}\,\overline{\overline{A}} = \overline{E} = E \Longleftrightarrow A^{-1} = \overline{A}^T$$

20

Komplexní matice A řádu n×n splňující podmínku

$$\overline{A}^T \cdot A = E$$

se nazývá UNITÁRNÍ

Reálná matice A řádu n×n splňující podmínku

$$A^T \cdot A = E$$

se nazývá ortogonální matice

Místo $\overline{A}^T$ budeme psát A^*

(21)

<u>Věta</u>. Je-li A ortogonální matice, pak

$$\det A = \pm 1$$

Je-li A unitární matice, pak

$$|\det A| = 1 \qquad (\det A \in \mathbb{C})$$

<u>Důkaz:</u> Unitární matice

$$\overline{A}^T \cdot A = E \quad / \det$$

$$\det \overline{A}^T \cdot A = \det E$$

$$\det \overline{A}^T \cdot \det A = 1$$

$$\det \overline{A} \cdot \det A = 1$$

22

$$\overline{\det A} \cdot \det A = 1$$

$$|\det A|^2 = 1 \implies |\det A| = 1$$

Jestliže A je ortogonální, pak rovněž $|\det A| = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$.

Věta: Všechna vlastní čísla unitárních a ort. operátorů mají absolutní hodnotu rovnu 1.

Důkaz: Nechť $\varphi(u) = \lambda u$, $u \neq \vec{o}$

Pak $\langle u, u\rangle = \langle \varphi(u), \varphi(u)\rangle = \langle \lambda u, \lambda u\rangle = \lambda \cdot \bar{\lambda} \langle u, u\rangle$

$$\|u\|^2 = |\lambda|\, \|u\|^2 \implies |\lambda| = 1.$$

23

Věta: Nechť λ_1, λ_2 jsou dvě různá vl. čísla pro unitární (ortogonální) operátor. Pak jejich vlastní vektory jsou navzájem kolmé.

Důkaz K λ_1 je vl. vektor u_1, k λ_2 je vl. vektor u_2.

$$\lambda_1\overline{\lambda_2}\langle u_1, u_2\rangle = \langle \lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2\rangle = \langle \varphi(u_1), \varphi(u_2)\rangle = \langle u_1, u_2\rangle$$

Kdyby $\langle u_1, u_2\rangle \neq 0$, pak dostaneme

$$\lambda_1 \cdot \overline{\lambda_2} = 1 \qquad = |\lambda_2|^2$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\overline{\lambda_2}} = \frac{\lambda_2\overline{\lambda_2}}{\overline{\lambda_2}} = \lambda_2,$$ to není možné