UNITÁRNÍ A ORTOGONÁLNÍ OPERÁTORY

$\varphi: U \to U$ $\quad \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$

nad $\mathbb{C}$ unitární

nad $\mathbb{R}$ ortogonální operátor

1) Vl. čísla unitárních a ort. operátorů mají abs. hodnotu $= 1$

2) jsou-li λ_1, λ_2 dvě různá vl. čísla, pak odpovídající vl. vektory u_1, u_2 jsou navzájem kolmé

<u>VĚTA</u> Je-li $\varphi: U \to U$ unitární operátor, pak v U existuje ORTONORMÁLNÍ BÁZE α tvořená vlastními vektory

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou vl. č. φ

2

<u>Důkaz.</u> Indukce podle $\dim_{\mathbb{C}} U$. Je-li $\dim U = 1$, pak

$$\varphi(u) = \lambda u \quad a \quad |\lambda| = 1, \quad u \neq \vec{o}$$

vezmeme $\frac{u}{\|u\|}$ za bázi α.

Nechť věta platí pro $n-1$. Nechť U má dimenzi n.
Vezmeme char. polynom operátoru φ

$$\det\left((\varphi)_{B,B} - \lambda E \right) = (-\lambda)^n + \dots$$

Tento polynom má alespoň v $\mathbb{C}$ kořen λ_1, tedy λ_1 je vl. číslo φ
s vlastním vektorem u_1. Nechť $\|u_1\| = 1$.

$$\varphi(u_1) = \lambda_1 u_1.$$

Dokážeme, že $[u_1]^{\perp}$ je invariantní podprostor pro operátor φ.

3

$\lambda_1 = a + ib$

$\bar{\lambda}_1 = a - ib$

Nech $v \in [u_1]^\perp$. Chceme dokázat, že $\varphi(v) \in [u_1]^\perp$.

$$\langle \varphi(v), u_1 \rangle = \left\langle \varphi(v), \frac{1}{\lambda_1}\varphi(u_1) \right\rangle = \langle \varphi(v), \bar{\lambda}_1 \varphi(u_1) \rangle$$

$$= \lambda_1 \langle \varphi(v), \varphi(u_1) \rangle = \lambda_1 \langle v, u_1 \rangle = 0.$$

Tedy $\varphi|_{[u_1]^\perp} : [u_1]^\perp \longrightarrow [u_1]^\perp$

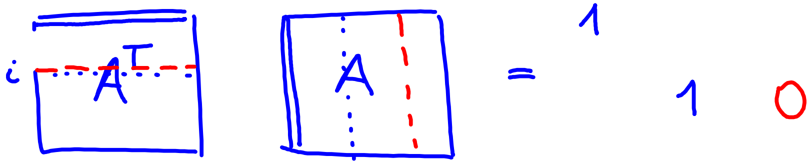
$\dim [u_1]^\perp = n-1$. $\varphi|_{[u_1]^\perp}$ je unitární. Podle ind. předpokladu existují v $[u_1]^\perp$ báze $u_2, u_3, \dots u_n$ ortonormální a tvořená vlastními vektory. Potom $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ je ortonormální báze α v U tvořená vl. vektory. Protože $\varphi(u_i) = \lambda_i u_i$, tak

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

4

Ortogonální operátory Zde je situace složitější. Pro jednoduchost se budeme zabývat pouze operátory $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tvaru $\varphi(x) = Ax$, kde A je ortogonální matice.

$$\overline{A}^T = A^T = A^{-1} \iff A^T A = E \iff A A^T = E$$



Každé zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = Ax$, A ortogonální, určuje rovněž zobrazení $\varphi_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $\varphi(x+iy) = A(x+iy) = Ax + iAy$

$x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $x+iy \in \mathbb{C}^n$

5

(1) Nechť čtv. matice A má v $\mathbb{C}$ vl. číslo $a+ib$ s $b\neq 0$.
a s vlastním vektorem $u_1 + i u_2$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$
Pak $a-ib$ je rovněž vl. číslo matice A a má vl. vektor $u_1 - i u_2$.

Důkaz.

$$A(u_1 + i u_2) = (a+ib)(u_1 + i u_2)$$

provedeme kompl. sdružení

$$\overline{A(u_1 + i u_2)} = \overline{(a+ib)(u_1 + i u_2)}$$

$$\overline{A}\,\overline{(u_1 + i u_2)} = \overline{(a+ib)}\;\overline{(u_1 + i u_2)}$$

$$A(u_1 - i u_2) = (a-ib)(u_1 - i u_2)$$

Tedy $a-ib$ je vl. číslo s vl. vektorem $u_1 - i u_2$

6

(2) Je-li $\lambda = \cos\alpha + i\sin\alpha$ se $\sin\alpha \neq 0$ vl. číslo zobrazení $\varphi(x) = Ax$, pak pro příslušný vl. vektor $u_1 + i u_2$ platí

$$\|u_1\| = \|u_2\| \qquad u_1 \perp u_2$$

Navíc $[u_1, u_2] \subseteq \mathbb{R}^n$ je invariantní podprostor a v bázi $\alpha = (u_2, u_1)$ je

$$\left(\varphi \big|_{[u_1, u_2]} \right)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

<u>Důkaz:</u> $\lambda = \cos\alpha + i\sin\alpha$ je vl. číslo s vl. vektorem $u_1 + i u_2$.

$\overline{\lambda} = \cos\alpha - i\sin\alpha$ je vl. číslo s vl. vektorem $u_1 - i u_2$.

$\lambda \neq \overline{\lambda}$. Tedy $u_1 + i u_2 \perp u_1 - i u_2$.

$\oplus$

$$\langle u_1 + i u_2, u_1 - i u_2 \rangle = 0$$

$$\langle u_1, - + i \langle u_2, u_1 \rangle + \langle u_1, -i u_2 \rangle + \langle i u_2, -i u_2 \rangle = 0$$

$$\langle u_1, u_1 \rangle + i \langle u_1, u_2 \rangle + i \langle u_1, u_2 \rangle - \langle u_2, u_2 \rangle = 0 + i\,0$$

Poronainim realni a im căsti dostaneme

$$\|u_1\|^2 - \|u_2\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \|u_1\| = \|u_2\|$$

$$2 \langle u_1, u_2 \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 \perp u_2$$

$$\varphi(u_1 + i u_2) = (\cos\alpha + i \sin\alpha)(u_1 + i u_2) = \cos\alpha\, u_1 - \sin\alpha\, u_2 + i \cos\alpha\, u_2 + i \sin\alpha\, u_1$$

$$\varphi(u_1) = \cos\alpha\, u_1 - \sin\alpha\, u_2$$

$$\varphi(u_2) = \sin\alpha\, u_1 + \cos\alpha\, u_2$$

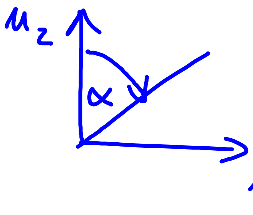
(8)

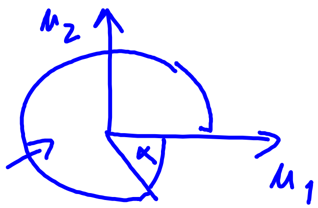
Tedy $[u_1, u_2]$ je invariantní podprostor a zvolíme-li bázi

$\alpha = \underline{(u_2, u_1)}$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Tato odpovídá otočení o úhel α od u_2 k u_1





$\beta = (u_1, u_2)$

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

Tato odpovídá otočení o úhel $-\alpha$ od u_1 k u_2

Věta: Nechť $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je ortogonální operátor. Potom je $\mathbb{R}^n$ direktním součtem navzájem kolmých invariantních podprostorů dimenze 1 nebo 2. Na podprostorech dimenze 1 je φ identita nebo $-$identita a na podprostorech dimenze 2 je φ otočení o úhel α.

Důkaz: Uvažujme $\varphi_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definované stejnou ortogonální maticí jako φ. $\varphi_{\mathbb{C}}$ je unitární operátor a má tedy bázi ortonormální tvořenou vlastními vektory. Vl. vektory (k vl. číslům 1 a -1 mají 1-rozměrné inv. podprostory

(10)

Vl. vektory u_1+iu_2 a u_1-iu_2 k vl. číslům $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$ mají 2-dim invariantní podprostory. Jestliže pro vl. vektory u_1+iu_2 a v_1+iv_2 platí, že jsou kolmé, pak také

$$[u_1,u_2] \perp [v_1,v_2]$$

Stačí dokázat tato tvrzení

u_1+iu_2 vl. vektor s $a+ib$

v_1+iv_2 je vl. vektor k $c+id$

v_1-iv_2 je vl. vektor k $c-id$

$$\langle u_1+iu_2, v_1+iv_2\rangle = 0$$

$$\langle u_1+iu_2, v_1-iv_2\rangle = 0$$

$\langle u_1,v_1\rangle - \langle u_2,v_2\rangle = 0$ reálná část 1. rovnice

$\langle u_1,v_1\rangle + \langle u_2,v_2\rangle = 0$ reálná část 2. rovnice

$\Rightarrow \langle u_1,v_1\rangle = \langle u_2,v_2\rangle = 0$

Z imaginárních částí obou rovnic dostaneme, že

$$\langle u_1, v_2 \rangle = \langle u_2, v_1 \rangle = 0$$

Tedy $[u_1, u_2] \perp [v_1, v_2]$.

Na $\mathbb{R}^n$ máme skalární součin $\langle \, , \, \rangle$

Pak na $\mathbb{C}^n$ můžeme definovat

$$\langle x+iy, v+iz \rangle = \langle x, y \rangle + \underbrace{\langle y, z \rangle}^{\langle iy, iz \rangle} + i \underbrace{\langle y, v \rangle}^{\langle iy, v \rangle} - i \underbrace{\langle x, z \rangle}^{\langle x, iz \rangle}$$

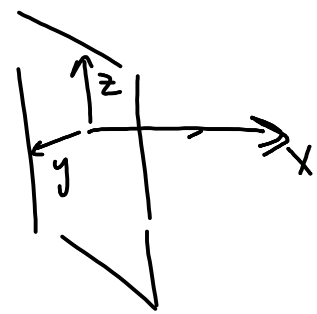
a toto je skalární součin na $\mathbb{C}^n$.

$$\langle iy, iz \rangle = (i)\,\bar{i}\,\langle y, z \rangle = 1 \langle y, z \rangle \qquad \langle x, iz \rangle = -i \langle x, z \rangle$$

12

Důsledek: Každá ortogonální matice 3×3 popisuje buď otočení kolem osy procházející počátkem nebo složení takového otočení se symetrií podle roviny kolmé k této ose. Ve vhodné ortonormální bázi má zobrazení $\varphi(x) = Ax$ matici:

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$



13

Char. polynom matice 3×3 je stupně 3 a proto má reálný kořen.

Protože A je ortogonální, je kořen ± 1.

Možnosti
- 3 reálné kořeny
- 1 reálný a dva $\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha$, $\cos\alpha - i\cdot\sin\alpha$ s $\sin\alpha \neq 0$.

1. možnost

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \alpha = \pi \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \alpha = \pi$$

14

Pokud má 1 vl. čísla $\cos\alpha + i\sin\alpha$ a $\cos\alpha - i\sin\alpha$ se $\sin\alpha \neq 0$,
pak vezmeme ortonormální bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$,
kde u_1 je vl. vektor pro vl. číslo ± 1.
a $u_3 + i u_2$ je vl. vektor pro vl. číslo $\cos\alpha + i\sin\alpha$
Potom vidíme, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Osa otáčení je dána vl. vektorem u_1 k ± 1
Rovina po symetrii je dána rovinou $[u_2, u_3] \perp u_1$.

Příklad $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 1)$$

Kořeny $\lambda_1 = 1$

$$\lambda_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \qquad \lambda_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

u_1 vl. vektor k $\lambda_1 = 1$ je $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$

u vl. vektor k λ_2 je

$$u = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_3} + i \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}}_{u_2}$$

$$\alpha = \left(u_1, \frac{u_3}{\|u_3\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}\right)$$

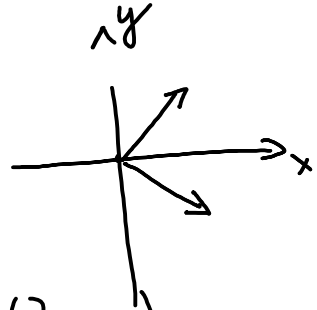
$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

Příklad Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je otočení kolem osy
$x_1 = x_2, \; x_3 = 0$
a úhel $\frac{\pi}{2}$ tak, že $\varphi(1,0,0)$ má všechny složky kladné.
Najděte matici φ ve stand. bázi.

Řešení spočívá v tom, že najdeme vhodnou ortonormální bázi, v níž je matice φ jednoduchá a pomocí této matice a matic přechodu najdeme $(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}$

(17)

v_1 vektor z osy otáčení $\qquad v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^T$



$$v_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \qquad \alpha = (v_1, v_2, v_3)$$

$$v_3 = (0, 0, 1)$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_1) = v_1$$

$$\varphi(v_2) = v_3$$

$$\varphi(v_3) = -v_2$$

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = (id)_{\varepsilon,\alpha} (\varphi)_{\alpha\alpha} (id)_{\alpha,\varepsilon}$$

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = (id)^{-1}_{\varepsilon,\alpha} = (id)^T_{\varepsilon,\alpha}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

18

Vynásobením dostaneme

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$