Jordanův maticky tv.:

Příklad 5

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$\varphi(x) = Ax \qquad \varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$\det(A - \lambda E) = (1-\lambda)^4$

Ví se, že $\lambda = 1$ má alg. násobnost 4, geom. násobnost 2

$(A - E)x = 0$

$u = (0, 1, 0, 1)^T, \quad v = (-2, 1, 3, 0)^T$

JKT bude mít 1 na diagonále, a bude mít 2 buňky

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & & \\ \hline 0 & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

②

Zjistíme, kdy z vlastních vektorů $au+bv$ může být začátkem řetězce

$$w \xmapsto{A-E} au+bv \xrightarrow{A-E} 0$$

$(A-E)w = au+bv$ taková soustava má matici

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 6 & 8 & 4 & -8 & a \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a \end{array}\right)}_{A-E} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & 2 & 0 & -2 & a+4b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array}\right)$$

Soustava má řešení, právě když $a+6b=0$.

$a=-6,\ b=1 \qquad -6u+v = (-2,-6,3,-6)$

$w = (\frac{1}{3},-1,0,0) + a_1 u + b_1 v$ Už z tohoto diagramu víme, že JKT je $\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & 1 \end{array}$

3

Pokračujeme v hledání řetězce délky 3

$$z \xmapsto{A-E} w \xmapsto{A-E} -6u+v \xmapsto{A-E} 0$$

Řešíme soustavu $(A-E)z = w$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3}-2b_1 \\ 6 & 8 & 4 & -8 & -1+a_1 \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 0+3b_1 \\ 9 & 9 & 6 & -9 & 0+a_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3}-2b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -\frac{5}{3}+a_1+4b_1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{1}{3}+b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1+a_1+6b_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3}-2b_1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{1}{3}+b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1+a_1+6b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1+a_1+6b_1 \end{array}\right)$$

Řešení existuje, právě když $-1+a_1+6b_1=0$, $a_1=1$, $b_1=0$.

$w = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, 1\right)$ $\quad z = \left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) + a_2 u + b_2 v$, zvolíme $a_2 = b_2 = 0$.

4

Máme řetězec délky 3

$$z \longrightarrow w \longrightarrow -6u+v \longrightarrow 0$$

Bázi vytvoříme dvěma řetězci, které musí začínat lin. nezávislými vlastními vektory. Protože řetězec délky 1 je tvořen vlastním vektorem, který je lin. nezávislý s vektorem $-6u+v$

Vybereme např. u

$$\text{Báze } \alpha = (\underbrace{-6u+v,\ w,\ z}_{\text{1. řetězec}},\ \underbrace{u}_{\text{2. řetězec}}) \qquad (\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = J$$

$$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)_{\alpha,\varepsilon}(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}(id)_{\varepsilon,\alpha} = P^{-1}AP \qquad P = (id)_{\varepsilon,\alpha}$$

5

$$D = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2/3 & 0 \\ -6 & 1 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = (\underbrace{u}_{\text{z vektor}}, \; -6u+v, w, z) \qquad (\varphi)_{B,B} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\gamma = (u, \; z, w, -6u+v) \qquad (\varphi)_{\gamma,\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(u) = 1u \qquad \varphi(z) = 1 \cdot z + w$$

$$\varphi(w) = 1 \cdot w + (-6u+v)$$

$$\varphi(-6u+v) = -6u+v$$

(6)

Metoda „zlepí diely"

$$w_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{A-E} \underbrace{\begin{pmatrix}3\\6\\-3\\9\end{pmatrix}}_{= w_2} \xrightarrow{A\cdot E} \underbrace{\begin{pmatrix}-6\\-18\\9\\-18\end{pmatrix}}_{= w_1} \longmapsto \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{A\cdot E} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\delta = (w_1, w_2, w_3, u)$$

$$(\varphi)_{\delta,\delta} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

7

Rozdíl mezi případem, kdy matice A je podobná matici

$$J_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & 1 & & \\ 0 & \lambda & & \\ \hline & & \lambda & 1 \\ & & 0 & \lambda \end{array}\right)$$

a kdy je podobná matici: $J_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 0 & \\ 0 & \lambda & 1 & \\ 0 & 0 & \lambda & \\ \hline & & & \lambda \end{array}\right)$

spočívá také v následujícím.

$$J_1 - \lambda E = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (J_1 - \lambda E)^2 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \\ \hline 0 & & \begin{array}{cc} 0 & \\ 0 & 0 \end{array} \end{array}\right) = 0$$

. .

(8)

$$(J_2-\lambda E)=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right) \qquad (J_2-\lambda E)^2=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right)$$

$$(J_2-\lambda E)^3=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right)$$

<u>Pravidlo 3</u>: velikost největší buňky s vl. číslem λ = nejmenší číslo k takové, že

$$\text{hodnost } (A-\lambda E)^k = n - \text{alg. násobnost vl. č. } \lambda$$

9

Důkaz Jordanovy věty

Zdroj: skripta prof. Slovíka (odkaz s instrukcemi známý)

Nilpotentní operátor $\psi : U \to U$ je takový lin. operátor, že existuje přirozené číslo k tak, že

$$\psi^k = \underbrace{\psi \circ \psi \circ \cdots \circ \psi}_{k\text{-krát}} = 0$$

Kořenový podprostor lin. operátor $\varphi : U \to U$.
Nechť φ má vl. číslo λ. Kořenový podprostor přísl. vl. čísla λ je

10

$$R_\lambda = \{ u \in U,\ \exists k \in \mathbb{N},\ (\varphi - \lambda\, id)^k (u) = 0 \}$$

(rest)

Lastnosti: ① R_λ je vektorski podprostor

② R_λ je invariantni podprostor operatorja φ.

$$\varphi(R_\lambda) \subseteq R_\lambda .$$

$u \in R_\lambda$, tj. ek. k $(\varphi - \lambda id)^k (u) = 0$

$$(\varphi - \lambda id)^k (\varphi(u)) = \varphi\big(\underbrace{(\varphi - \lambda id)^k (u)}_{0}\big) = 0$$

$$\varphi' \circ \varphi = \varphi \circ \varphi'$$

11

(3) λ je vl. číslo a $\mu \neq \lambda$. Pak

$$(\varphi - \mu\, id)(R_\lambda) \subseteq R_\lambda$$

a $(\varphi - \mu\, id)|_{R_\lambda} : R_\lambda \longrightarrow R_\lambda$ je izomorfismus.

$\varphi - \mu\, id$ je prosté na R_λ

$$(\varphi - \mu\, id)u = 0 \qquad u \in R_\lambda \quad (\varphi - \lambda\, id)^k u = 0$$

$$(\varphi - \lambda\, id)^{k-1} u \neq 0$$

$$0 = (\varphi - \lambda\, id)^k u = (\varphi - \lambda\, id)^{k-1} \left(\underbrace{\varphi - \mu\, id + (\mu - \lambda)\, id}_{\varphi - \lambda id}\right) u =$$

$$= (\varphi - \lambda\, id)^{k-1} (\mu - \lambda) u \neq 0 \quad \text{spor.}$$

12

4. $(\varphi - \lambda id)|_{K_\lambda} : R_\lambda \longrightarrow R_\lambda$ je nilpotentní operátor

R_λ má bázi $u_1, u_2, \ldots u_r$

Pro každé u_i existuje k_i tak, že $(\varphi - \lambda id)^{k_i} u_i = 0$

Vezmeme $k = \max\{k_1, \ldots, k_r\}$

Pak pro všechna $u \in R_\lambda$ $\quad (\varphi - \lambda id)^k u = 0$, tedy

$$(\varphi - \lambda id)^k = 0$$

(13)

1 část důkazu

Idea: Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ jsou vl. čísla operátoru $\varphi : U \to U$.

Nechť součet alg. násobností těchto vl. čísel je $= \dim U$.

Pak

$$U = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus R_{\lambda_k}$$

kde jde o direktní součet vekt. podprostorů.

Definice $U = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_k$

jestliže $\forall u \; \exists! (u_1, u_2, \ldots u_k)$ $u_i \in U_i$

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_k.$$

14

Tato podmínka je ekvivalentní podmínkám

(1) $\forall u \in U \;\; \exists u_i \in U_i: \quad u = u_1 + \dots + u_k$

(2) jestliže $u_1 + \dots + u_k = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 = \dots = u_k = \vec{0}$.
$u_i \in U_i$

<u>Důkaz</u> 2 kroky

1. krok $R_{\lambda_1} + R_{\lambda_2} + \dots + R_{\lambda_k} \doteq U$ je přímý součet

2 krok $\dim R_{\lambda_1} + \dim R_{\lambda_2} + \dots + \dim R_{\lambda_k} = \dim U$

odtud $\dim(R_{\lambda_1} \dotplus R_{\lambda_2} \quad + R_k) = \dim U \Rightarrow R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k} = U$.

Stačí dk. $\dim R_{\lambda_i} =$ alg násobnost λ_i

15

Důkaz 1. tvrzení indukcí podle k

Pro $k=1$ dostáváme $u_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0$.

Nechť platí $u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1} = 0 \Rightarrow u_1 = 0$.

$u_i \in R_{\lambda_i}$

Nyní $u_1 + u_2 + \dots + u_k = 0$, $u_i \in R_{\lambda_i}$

$u_k \in R_{\lambda_k}$. Existuje $l \in \mathbb{N}$ $(\varphi - \lambda_k \mathrm{id})^l (u_k) = 0$.

Aplikujme $(\varphi - \lambda_k \mathrm{id})^l$ na naši rovnici.

$$0 = \underbrace{(\varphi - \lambda_k \mathrm{id})^l u_1}_{v_1} + \dots + \underbrace{(\varphi - \lambda_k \mathrm{id})^l u_{k-1}}_{v_{k-1}} + \underbrace{(\varphi - \lambda_k \mathrm{id})^l u_k}_{0} =$$

16

$= v_1 + v_2 + \ldots + v_{k-1}$

Vě

$v_i = (\varphi - \lambda_k \, id) u_i \in R_{\lambda_i}$

$(\varphi - \lambda_k \, id)$ je izomorfismus na R_{λ_i}

Máme $\quad v_1 + v_2 + \ldots + v_{k-1} = 0 \, , \quad v_i \in R_{\lambda_i}.$

Z ind. předpokladu

$\forall i \qquad v_i = 0 \qquad\qquad v_i = (\varphi - \lambda_k \, id)^e u_i$

$(\varphi - \lambda_k \, id)^e$ je izomorfismus, tak $u_i = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots k-1$.

$u_k = 0.$

17

2. Úvod důkazu celé Jord. věty

Definice: Operátor $\psi : V \to V$ se nazývá cyklický, jestliže ve V existuje báze $\alpha(v_1, v_2, \dots v_s)$ taková, že

$$\psi(v_1) = 0,\ \psi(v_2) = v_1,\ \dots\ \psi(v_s) = v_{s-1}$$

Vidíme, že

$$(\psi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Jordanova buňka pro vl. číslo 0

$\psi^s = 0$ (je nilpotentní)

18

Věta B Je-li φ nilpotentní operátor $U \to U$, pak existuje direktní rozklad
$$U = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_p$$
na invariantní podprostory, takový že
$$\varphi/U_i : U_i \to U_i$$
je cyklický.

Důkaz: Najdeme bázi U tvořenou řetězci. Každý řetězec dá podprostor U_i.

Důkaz Jord. věty. $\varphi : U \to U$

① $U = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k}$ a 2 kroku aplikujeme předchozí větu B na

19

$$(\varphi - \lambda \, id)\big|_{U_i} : U_i \to U_i$$

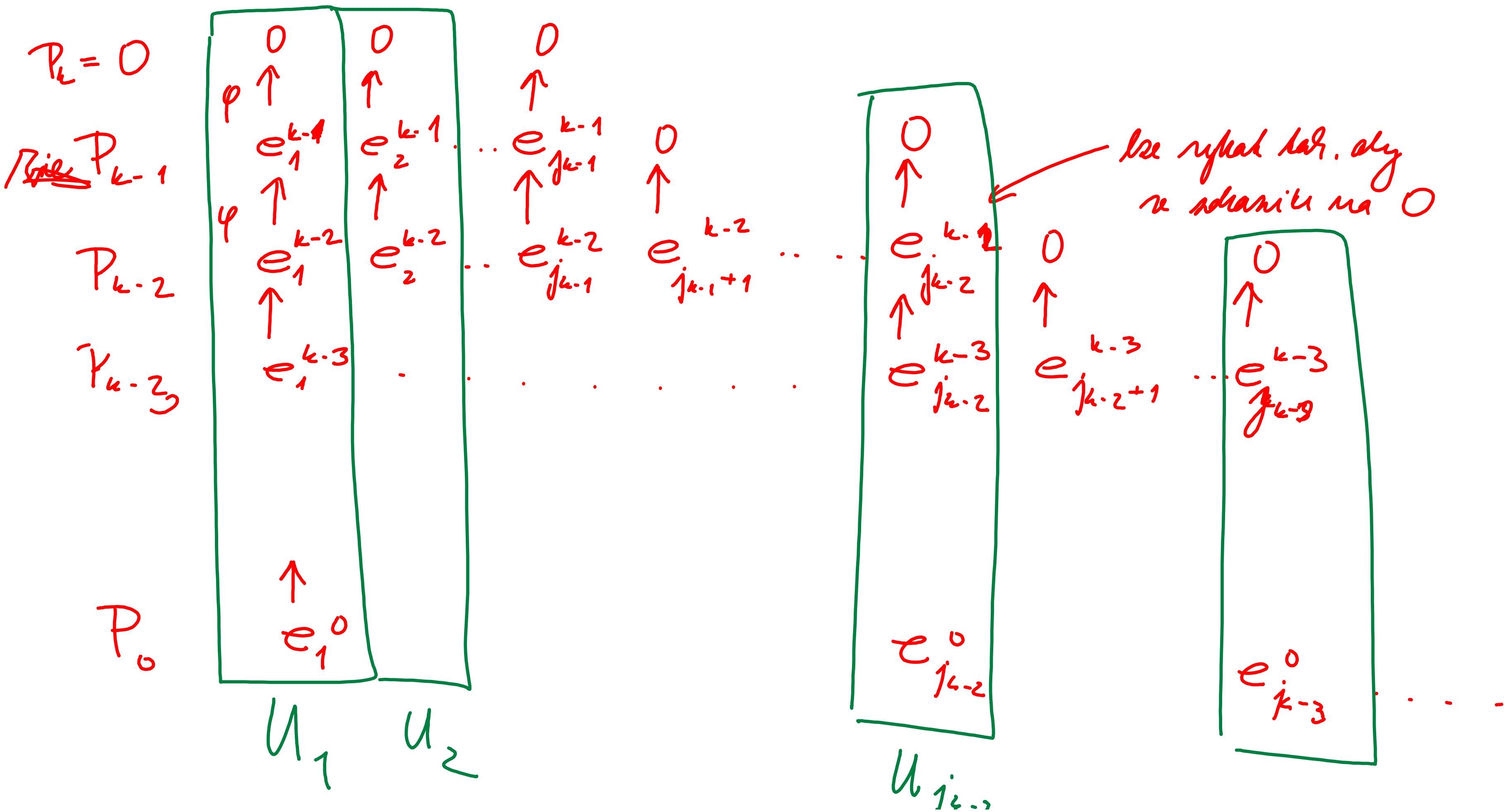
Důkaz věty B   Definujme $P_i = \operatorname{im} \varphi^i$

$$\{0\} = P_k \subsetneq P_{k-1} \subsetneq \cdots \subsetneq P_0 = U$$

Bázi U najdeme postupně: nejdřív bázi P_{k-1} pak rozšíříme na bázi P_{k-2}, atd

Dokážeme, že $e_1^{k-1} \ldots e_{j_{k-1}}^{k-1}, e_1^{k-2} \ldots e_{j_{k-1}}^{k-2}$ jsou LN

Lze doplnit na bázi celého P_{k-2}


$P_k = 0$
P_{k-1}
P_{k-2}
P_{k-3}
P_0
φ
e_1^{k-1} e_2^{k-1} $e_{j_{k-1}}^{k-1}$
e_1^{k-2} e_2^{k-2} $e_{j_{k-1}}^{k-2}$ $e_{j_{k-1}+1}^{k-2}$ $e_{j_{k-2}}^{k-2}$
e_1^{k-3} $e_{j_{k-2}}^{k-3}$ $e_{j_{k-2}+1}^{k-3}$ $e_{j_{k-3}}^{k-3}$
e_1^0 $e_{j_{k-2}}^0$ $e_{j_{k-3}}^0$
lze vybrat tak, aby se zobrazily na 0
U_1 U_2 $U_{j_{k-2}}$

$$\varphi\left(e^{k-2}_{j_{k-1}+1}\right) = \sum a_i e_i^{k-1}$$

$$\varphi\left(e^{k-2}_{j_{k-1}+1} - \sum a_i e_i^{k-2}\right) = 0$$