Dokončení afinní geometrie

Připomenutí: Afinní podprostor $\mathcal{M}$ je vekt. prostoru $\mathcal{U}$

je

- $\mathcal{M} = P + V$ kde $P \in \mathcal{U}$, $V \leq \mathcal{U}$ je podprostor

- $\forall P, Q \in \mathcal{M} \quad \lambda P + (1-\lambda) Q \in \mathcal{M}$, $\quad \mathcal{M} \neq \emptyset$

Vzájemná poloha afinních podprostorů

$\mathcal{M} \quad \mathcal{N} \qquad \mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$

$\neq \emptyset$

Lemma: Průnik afinních podprostorů, je-li neprázdný, je afinní podprostor.

<u>Důkaz</u> $P, Q \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$

$$\lambda P + (1-\lambda) Q \in \mathcal{M}, \quad \lambda P + (1-\lambda) Q \in \mathcal{N}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda P + (1-\lambda) Q \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$$

Spojení afinních podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ je nejmenší afinní podprostor, který obsahuje $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$.

$$\mathcal{M} = P + V$$

$$\mathcal{N} = Q + W$$

$$\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N} = P + \underbrace{\left(V + W + [Q-P]\right)}_{\text{zaměření}}$$

Afinní zobrazení

$\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ jsou afinní podprostory ve vektorových prostorech $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ $\quad \mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}$, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{V}$.

Zobrazení $\Phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ se nazývá afinní, jestliže zachovává afinní kombinace bodů:

$$\Phi(\lambda P + (1-\lambda) Q) = \lambda \Phi(P) + (1-\lambda) \Phi(Q)$$

Příklad: $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{N} = \mathbb{R}^k$

$$\Phi(x) = Ax + b \quad , \; A \text{ je matice } k \times n \text{ a } b \in \mathbb{R}^k$$

$$\phi(\lambda x+(1-\lambda)y) = A(\lambda x+(1-\lambda)y)+b = \lambda Ax+(1-\lambda)Ay+b$$

$$= \lambda Ax+\lambda b+(1-\lambda)Ay+(1-\lambda)b = \lambda\phi(x)+(1-\lambda)\phi(y).$$

<u>Speciálně:</u> $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \phi(x) = ax+b$
je afinní.

Lze ukázat, že každé afinní zobrazení je tvaru

$$\Phi(P+v) = \Phi(P) + \varphi(v)$$

kde $\varphi : Z(m) \to Z(n)$ je lineární.

<u>Příklad:</u> $\phi(x) = Ax+b$ $\quad$ lineární

$$\phi(0+x) = \underset{b}{\underset{\parallel}{\phi(0)}} + Ax$$

Bilineární a kvadratické formy

Lineární forma Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$.

Lineární zobrazení $f: U \to \mathbb{K}$ se nazývá lineární forma.

Množina všech lineárních forem na vekt. prostorem U se nazývá duální vekt. prostor k U a označuje se U^*.

Příklad: $U = \mathbb{R}^n$

Všechny lin. formy, tj. lin. zobrazení z $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou tvaru

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \dots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

6

U^* je vekt. prostor a je-li $\dim U < \infty$, pak

$$\dim U^* = \dim U.$$

<u>Bilineární forma</u> je zobrazení

$$g : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$$

takové, že

(1) $g(au + bv, w) = a\,g(u,w) + b\,g(v,w)$

$\forall w$ je zobrazení $g(-, w) : U \to \mathbb{K}$ lin. forma

(2) $g(u, av + bw) = a\,g(u,v) + b\,g(u,w)$

$\forall u \in U$ je zobrazení $g(u, -) : U \to \mathbb{K}$ lin. forma

Proto <u>bi</u>lineární forma

Příklad bilineární formy

$$g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$g(x, y) = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + \dots + a_{ij} x_i y_j + \dots a_{nn} x_n y_n$$

$$= (x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= x^T A y$$

Linearita v y:

$$g(x, ay + bz) = x^T A (ay + bz) = a x^T A y + b x^T A z = a g(x,y) + b g(x,z)$$

jiný příklad

$$g : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p, q \in \mathbb{R}_n[x]$$

$$g(p,q) = p(1)\cdot q(3)$$

$p \longmapsto p(1)$ lin. forma

$q \longmapsto q(3)$ lin. forma

součin dvou lin. forem je vždy bilin. forma

(obrácené neplatí)

g je bilineární

$$g(ap_1+bp_2, q) = (ap_1+bp_2)(1)\cdot q(3) =$$

$$= \big(a p_1(1) + b p_2(1)\big)\, q(3) = a\, p_1(1) q(3) + b\, p_2(1) q(3)$$

$$= a g(p_1, q) + b g(p_2, q)$$

Matice bilin. formy v dané bázi

U vekt. prostor s bází $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$

$f : U \times U \to \mathbb{K}$ bilin. forma

matice bilin. formy f v bázi α je matice

$$A = (A_{ij}) \qquad A_{ij} = f(u_i, u_j)$$

Příklad $f \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f(x, y) = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + \dots + a_{ij} x_i y_j + \dots$

$\varepsilon = (e_1, e_2, \dots e_n)$ matice f ve stand. bázi je

$$A_{ij} = f(e_i, e_j) = a_{ij}$$

matice je (a_{ij})

(10)

Nech $f: U \times U \to \mathbb{K}$ je bilineární a nech $A = (a_{ij})$ je její matice v bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$.

Nech u a v jsou dva vektory v U se souřadnicemi

$$(u)_\alpha = x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (v)_\alpha = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Potom $$f(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = x^T A y$$

Důkaz: $$f(u,v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \sum_{j=1}^{n} y_j u_j\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i\, f\left(u_i, \sum_{j=1}^{n} y_j u_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \underbrace{f(u_i, u_j)}_{= a_{ij}}\right)$$

11

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j a_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = x^T A y.$$

matice bilin. formy při změně báze

$f : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ v U máme 2 báze

$\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$

$\beta = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

$u, v \in U$

$(u)_\alpha = x \quad (v)_\alpha = y$

$(u)_\beta = \overline{x} \quad (v)_\beta = \overline{y}$

$P = (id)_{\alpha\beta}$

A matice f v bázi α

B matice f v bázi β

$x = P\overline{x} \qquad y = P\overline{y}$

(12)

$$\underline{\bar{x}^T B \bar{y}} = f(u,v) = x^T A y = (P\bar{x})^T A (P\bar{y}) =$$

$$= (\bar{x}^T P^T) A (P\bar{y}) = \underline{\bar{x}^T (P^T A P) \bar{y}}$$

Tento vztah platí pro všechna $u, v \in U$, tedy i pro všechny $\bar{x}, \bar{y} \in K^n$. Dokážeme, že potom

$$B = P^T A P$$

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \ldots 1\, 0 \ldots 0 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = (P^T A P)_{ij}$$

i-té místo

j-té místo

<u>Lemma:</u> Je-li A matice f v bázi α a B matice f v bázi β, pak

$$B = (id)_{\alpha\beta}^T A (id)_{\alpha\beta}$$

Kongruentní matice

Čtvercové matice A, B typu $n \times n$ se nazývají **kongruentní**, jestliže existuje regulární (invertibilní) matice P taková, že

$$B = P^T A P$$

Kongruence je relace ekvivalence.

Připomínám podobnost matic

A, B podobné, jestliže

$$B = P^{-1} A P$$

Symetrická bilin. forma $f: U \times U \to \mathbb{K}$ je bilin. forma s vlastností:

$$f(u,v) = f(v,u)$$

Symetrická bilin. forma má v každé bázi symetrickou matici:

$$A_{ij} = f(u_i, u_j) = f(u_j, u_i) = A_{ji}$$

V dalším budeme pracovat pouze se sym. bilin. formami a symetrickými maticemi.

<u>Věta:</u> Je-li A symetrická matice, pak existuje regulární matice P tak, že $P^T A P$ je diagonální.

V reči bilin. forem

<u>Věta:</u> Pro každou symetrickou bilin. formu $f: U \times U \to \mathbb{K}$, existuje báze α taková, že matice f v bázi α je diagonální, neboli v souřadnicích báze α je

$$f(u,v) = a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + \dots + a_{nn}x_ny_n,$$

kde $(u)_\alpha = x$, $(v)_\alpha = y$.

Naším cílem je ukázat si algoritmus pro nalezení matice P, resp. báze α.

Element. řádk. a sloupcové operace

Řádk. operace lze realizovat násobením tzv. element. maticí zleva.

τ .... elem. řádk. operace

$$\tau(A) = \underbrace{\tau(E)}_{\text{element. matice}} \cdot A$$

K 1. řádku přičtu 2. řádek

$$\tau(E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdot \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

σ element. sloupc. operace

$$\sigma(A) = A \cdot \underbrace{\sigma(E)}_{\text{element. matice}}$$

Platí:

Je-li τ výměna dvou řádků, a σ výměna stejných sloupců, pak

$$\tau(E) = \sigma(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ ← symetrická

$$\sigma(E) = \tau(E) = \tau(E)^T$$

$$\sigma(E) = \tau(E)^T$$

τ násobení 2. řádku číslem a

$$\tau(E) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ a & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \tau(E)^T$$

σ násobení 2. sloupce číslem a

$$\sigma(E) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ a & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(E) = \tau(E) = \tau(E)^T$$

τ je přičtení c-násobku 2. řádku k 1. řádku

$$\tau(E) = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

σ je přičtení c-násobku 2. sloupce k 1. sloupci

$$\sigma(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ c & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(E) = \tau(E)^T$$

Závěr:

Provádíme-li na čtvercovou matici A stejné řádkové a sloupcové operace, dostaneme matici

$$B = P_k^T \cdots P_2^T P_1^T A P_1 P_2 \cdots P_k$$

$$= (P_1 P_2 \cdots P_k)^T A (P_1 P_2 \cdots P_k)$$

$$= P^T A P$$

Stejnými řádkovými a sloupcovými operacemi, dostaneme kongruentní matici.

Je-li A symetrická, je výsledná matice opět symetrická.

Úpravy lze provádět tak, že když A je symetrická, tak výsledná matice bude diagonální. $= B$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline E & \end{array}\right) \xrightarrow[\text{i sloupc. úpravy}]{\text{stejné řádk.}} \left(\begin{array}{c|c} P^T A P & P^T \\ \hline P & \end{array}\right)$$

A / E ← řádkové

E ↑ sloupc. úpravy

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \underset{\substack{\text{k 1. ř.} \\ \text{přičteme} \\ \text{2. ř.}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim$$

stejná sloupcová

22

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
4 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\
2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\
10 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & & & \\
1 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
4 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\
4 & 0 & 12 & 0 & 2 & 0 \\
20 & 12 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
\hline
1 & 0 & 0 & & & \\
1 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}\right)
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
4 & 4 & 20 & 1 & 1 & 0 \\
4 & 0 & 24 & 0 & 2 & 0 \\
20 & 24 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
\hline
1 & 0 & 0 & & & \\
1 & 2 & 0 & & & \\
0 & 0 & 2 & & &
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
4 & 4 & 20 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 4 & -100 & -5 & -5 & 2 \\
\hline
1 & 0 & 0 & & & \\
1 & 2 & 0 & & & \\
0 & 0 & 2 & & &
\end{array}\right)
\sim
$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -100 & -5 & -5 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -5 & & & \\ 1 & 1 & -5 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -96 & -6 & -4 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -5 & & & \\ 1 & 1 & -5 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -96 & -6 & -4 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -6 & & & \\ 1 & 1 & -4 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right)$$

Platí:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$