(1)

A symetrická matice

diagonální

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline E & \end{array}\right) \xrightarrow[\text{a sloupc. el. operace}]{\text{stejné řádk.}} \left(\begin{array}{c|c} D & P^T \\ \hline P & \end{array}\right)$$

$$D = P^T A P$$

$$A \mid E \xrightarrow{\text{řádk.}} P^T A \mid P^T$$

sloupcové

$$D = \left(\begin{array}{c|c} P^T A P & P^T \\ \hline P & \end{array}\right)$$

2

Sym. bilin. forma $f : U \times U \to \mathbb{K}$, $f(u,v) = f(v,u)$

$\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

Matice bilin. formy f v bázi α je

$$A = (A_{ij}) \quad A_{ij} = f(u_i, u_j)$$

$$\beta = (v_1, v_2, \dots, v_n) \quad B = (B_{ij}) \quad B_{ij} = f(v_i, v_j)$$

$$B = (id)_{\alpha\beta}^{T} \, A \, (id)_{\alpha\beta}$$

$$P^{T} A \; P$$

Věta: Ke každé symetrické bilin. formě $f: U \times U \to \mathbb{K}$ existuje báze B v U tak, že matice f v bázi B je diagonální. Tedy v souřadnicích báze B je

$$f(u,v) = b_{11} x_1 y_1 + b_{22} x_2 y_2 + \dots + b_{nn} x_n y_n ,$$

kde $(u)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $(v)_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Důkaz: Vezměme nějaký tah $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_n)$ v prostoru U.

Napišme následující schéma

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
f(n_1,n_1) & \cdots & \cdots & f(n_1,n_n) & n_1 \\
 & & & & n_2 \\
 & f(n_i,n_j) & & & n_i \\
f(n_n,n_1) & \cdots & \cdots & f(n_n,n_n) & n_n \\
\hline
n_1 & n_2 \dots & n_j & \dots n_n &
\end{array}\right)
$$

prohodíme stejné sloupce a řádky $\rightsquigarrow$

sečtem 1. a 2. řádku

$$
\left(\begin{array}{cc|c}
\overbrace{f(n_1,n_1) + f(n_2,n_1)}^{f(n_1+n_2,\, n_1)}, & \cdots & n_1+n_2 \\
f(n_2,n_1) & \cdots & n_2 \\
\hline
n_1 & n_2 \cdots &
\end{array}\right)
$$

$f(n_1+n_2, n_1)$ $\qquad$ n_1+n_2

n_1

Upravíme-li takto matici $f(u_i,u_j)$ na diagonální tvar, dostaneme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} b_{11} & & & 0 & v_1 \\ & b_{22} & & & v_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & b_{nn} & v_n \\ \hline v_1 & v_2 & \dots & v_n & \end{array}\right)$$

To znamená, že

$$b_{ii} = f(v_i, v_i)$$

$$0 = b_{ij} = f(v_i, v_j) \quad \text{pro } i \neq j$$

Diagonální matice bude matici bilin. formy f v bázi

$$\beta = (v_1, v_2 \dots v_n)$$

Dostaneme jako lin kombinace $u_1, u_2, \dots u_n$

$$\begin{array}{c|c} f(u_i,u_j) = A_{ij} & E \\ \hline E & \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c|c} B = b_{ij} & P^T \\ \hline P & \end{array}$$

$$B = P^T A \underset{\displaystyle (id)_{\alpha\beta}}{\underset{\parallel}{P}}$$

$$(v_1, v_2, \dots v_n) = (u_1, u_2 \dots u_n)(id)_{\alpha\beta}$$

$$= (u_1, u_2, \dots u_n) P$$

Kvadratické formy

Příkladem kvadr. formy je $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$g(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - 4z_1z_2 + 2z_2^2 - 8z_2z_3$$

$$f(x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - 4x_2y_3 - 4x_3y_2$$

$$\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{array}$$

sym. bilin. forma

$$f(z, z) = z_1^2 - 4z_1z_2 + 2z_2^2 - 8z_2z_3 = g(z)$$

<u>Definice</u>: Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$. Zobrazení

$$g : U \longrightarrow \mathbb{K}$$

je kvadratická forma, jestliže existuje bilin. symetrická forma $f : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ taková, že

$$g(z) = f(z, z).$$

<u>Lemma</u>: Je-li f symetrická bilin. forma, která definuje kvadr. formu g, pak platí

$$f(u, v) = \frac{1}{4}\big(g(u+v) - g(u-v)\big)$$

9

<u>Důkaz:</u>

$$f(u+v, u+v) - f(u-v, u-v) = \cancel{f(u,u)} + f(u,v) + f(v,u) + \cancel{f(v,v)}$$

$$- \cancel{f(u,u)} + f(u,v) + f(v,u) - \cancel{f(v,v)} = 2f(u,v) + 2f(v,u)$$

$$= 4f(u,v)$$

$$g(u+v) - g(u-v) = 4f(u,v)$$

$$f(u,v) = \frac{1}{4}\left(g(u+v) - g(u-v)\right)$$

Matice kvadr. formy v dané bázi je matici příslušné symetrické bilin. formy.

Jestliže g je kvadr. forma a f příslušná sym. bilin. forma, s maticí $A = (a_{ij})$ v bázi α, pak v souřadnicích báze α máme tato vyjádření:

$$g(u) = f(u,u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = x^T A x = (u)_\alpha^T A (u)_\alpha$$

kde $(u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

minule

$$f(u,v) = \sum a_{ij} x_i y_j = x^T A y = (u)_\alpha^T A (v)_\alpha$$

Věta: Pro každou kvadratickou formu $g : U \to K$ existuje báze B taková, že v souřadnicích této báze je

$$g(u) = b_{11} z_1^2 + b_{22} z_2^2 + \dots + b_{nn} z_n^2$$

↙ diagonální tvar

Důkaz: Pro příslušnou sym. bilin. formu $f : U \times U \to K$ existuje báze B tak, že

$$f(v, w) = b_{11} x_1 y_1 + \dots + b_{nn} x_n y_n.$$

Dosazením $v = w = u$ dostaneme požadované.

Takovouto bázi někdy nazýváme polární bází.

DŮLEŽITÉ UPOZORNĚNÍ !

Takových bází je více !

12

Jiná metoda diagonalizace kvadr. forem

ÚPRAVA NA ČTVERCE

Mějme v zářadních bázích α následující vyjádření kvadr. formy

$$g(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + \dots$$

1) Nechť $a_{11} \neq 0$

$$g(x) = a_{11}\left(x_1^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \dots + 2\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n\right) + \text{členy bez } x_1$$

$$= a_{11}\left\{\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}^2}x_2^2 - 2\frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}^2}x_2x_3 - \dots\right\} + \text{další členy}$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + \overbrace{\sum_{i,j=2}^{n} b_{ij}x_ix_j}^{\text{bez } x_1}$$

13

$$x_1^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 = \left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2\right)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}^2}x_2^2$$

$$x_1^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \frac{a_{12}^2}{a_{11}^2}x_2^2$$

$$x_1^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + 2\frac{a_{13}}{a_{11}}x_1x_3 = \left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3\right)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}^2}x_1^2 - 2\frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}^2}x_2x_3$$

$$= x_1^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + 2\frac{a_{13}}{a_{11}}x_1x_3 + \frac{a_{12}^2}{a_{11}^2}x_2^2 + 2\frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}^2}x_2x_3 + \frac{a_{13}^2}{a_{11}^2}x_3^2$$

$$-\frac{a_{13}^2}{a_{11}^2}x_3^2$$

14

Výraz $\sum_{i,j=2}^{n} b_{ij} x_i x_j$ upravujeme analogicky.

2 Jestliže $a_{11} = 0$, nalezneme nějaké $a_{ii} \neq 0$ a postupujeme stejně, jenom místo x_1 teď píšeme x_i.

3 Jestliže $a_{ii} = 0$ pro všechna i, postupujeme takto:
najdeme $a_{ij} \neq 0$ a provedeme záměnu:

$$y_i = x_i - x_j \qquad i \neq j$$

$$y_j = x_j$$

$$y_k = x_k \text{ pro } k \neq i, k \neq j$$

$$g(x) = \ldots 2 a_{ij} x_i x_j$$

$$x_i = y_i + x_j = y_i + y_j$$

$$x_j = y_j$$

$$g(x) = \ldots 2a_{ij} x_i x_j \ldots = \ldots 2a_{ij}(y_i + y_j) y_j \ldots =$$

$$= 2a_{ij} y_i y_j + 2a_{ij} y_j^2$$

$$2a_{ij} \neq 0$$

Nyní porádíme výrazy s ypsilony podle 1 a 2.

<u>Závěr</u>: Prozradíme-li úpravy tak, jak byla popsána, dostaneme

$$g(x) = b_{11} y_1^2 + b_{22} y_2^2 + \dots + b_{nn} y_n^2$$

kde

$$
\begin{aligned}
y_1 &= p_{11} x_1 + p_{12} x_2 + \dots + p_{1n} x_n \\
y_2 &= p_{21} x_1 + p_{22} x_2 + \dots + p_{2n} x_n \\
&\dots \\
y_n &= p_{n1} x_1 + p_{n2} x_2 + \dots + p_{nn} x_n
\end{aligned}
$$

souřadnice v nové bázi β

souřadnice v původní bázi α

$$y = P X$$

$$y = (id)_{\beta\alpha} X$$

Chceme najít novou bázi $\beta = (v_1 \dots v_n)$
$\alpha = (u_1, \dots u_n)$

$$(u_1, u_2, \dots u_n) = (v_1 \dots v_n)(id)_{\beta\alpha} = (v_1 \dots v_n) P$$

$$(v_1, v_2 \dots v_n) = (u_1, u_2, \dots u_n) P^{-1}$$

<u>Příklad</u>: $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ má ve stand. souřadnicích vyjádření

$$g(x) = \underline{4} x_1 x_2 + 8 x_1 x_3 + 12 x_2 x_3$$

Matice příslušné sym. bilin. formy je

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

18

$$y_1 = x_1 - x_2 \qquad y_2 = x_2 \qquad y_3 = x_3 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = y_1 + y_2,\ x_2 = y_2,\ x_3 = y_3$$

$$g(x) = 4(y_1+y_2)y_2 + 8(y_1+y_2)y_3 + 12y_2y_3 =$$

$$= \underbrace{4y_2^2 + 4y_2y_1 + 20y_2y_3}_{} + 8y_1y_3$$

$$= 4\left\{(y_2 + 2y_1 + 10y_3)^2 - 4y_1^2 - 100y_3^2 - 40y_1y_3\right\} + 8y_1y_3$$

$$= 4(y_2+2y_1+10y_3)^2 - 16y_1^2 - 400y_3^2 - 152y_1y_3$$

$$= 4(y_2+2y_1+10y_3)^2 - 16\left(y_1^2 + 25y_3^2 + \frac{19}{2}y_1y_3\right)$$

$$= 4(y_2+2y_1+10y_3)^2 - 16\left\{\left(y_1 + \frac{19}{4}y_3\right)^2 - \left(\frac{19}{4}\right)^2 y_3^2 + 25y_3^2\right\}$$

$$= 4(y_2+2y_1+10y_3)^2 - 16\left(y_1 + \frac{19}{4}y_3\right)^2 + (19^2 - 400)y_3^2$$

$$= 4(y_2+2y_1+10y_3)^2 - (4y_1 + 19y_3)^2 - 39y_3^2$$

$$= 4(x_2 + 2x_1 - 2x_2 + 10x_3)^2 - (4x_1 - 4x_2 + 19x_3)^2 - 39x_3^2 =$$

$$= 4\underbrace{(2x_1 - x_2 + 10x_3)}_{z_1}{}^2 - \underbrace{(4x_1 - 4x_2 + 19x_3)}_{z_2}{}^2 - 39\underbrace{x_3}_{z_3}{}^2$$

$$= 4z_1^2 - z_2^2 - 39z_3^2$$

z_1, z_2, z_3 jsou souřadnice v nějaké bázi B. Jak B najdeme?

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 4 & -4 & 19 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

!%!%%%%

Báze ve souřadnicemi x_1, x_1, x_3 je $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$

Nová báze $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$

$$(u)_{\mathcal{B}} = P\,(u)_{\mathcal{E}} = (id)_{\mathcal{B}\mathcal{E}}\,(u)_{\mathcal{E}}$$

$$(e_1\ e_2\ e_3) = (v_1\ v_2\ v_3)\underbrace{(id)_{\mathcal{B}\mathcal{E}}}_{P}$$

$$(e_1\ e_2\ e_3)P^{-1} = (v_1\ v_2\ v_3)$$

v_1 je 1. sloupec P^{-1} $\qquad$ P^{-1} si spočítejte za DU.

v_2 je 2. sloupec P^{-1}

v_3 je 3. sloupec P^{-1}